Prof. Guido Sweers **SS 2009**
Matthias Erven

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 8

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 18.6.2009 um 13 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1: a) Zeigen Sie, dass $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_{yz} + u_{zz} = 0$ hyperbolisch ist.

b) Für welchen Halbraum H ist

$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_{yz} + u_{zz} = 0 & \text{in } H \\ u = u_0 & \text{auf } \partial H \\ \partial_\nu u = v_0 & \text{auf } \partial H \end{cases}$$

wohlgestellt? Wählen Sie H aus $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x > 0\}$, $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; y > 0\}$ und $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z > 0\}$.

Aufgabe 2: Beweisen Sie die Lösungsformel für die Wellengleichung in Raumdimension 5.

Aufgabe 3: Verwenden Sie eine Spiegelung, um eine Formel für die Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 \Delta u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \\ \partial_t u(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \\ u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in (\{0\} \times \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

anzugeben.

Aufgabe 4: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie: Die Gleichung

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 \Delta u(x,t) = f(x,t) & \text{für } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = g_A(x) & \text{für } x \in \Omega \\ u(x,t) = g_R(x) & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_t u(x,0) = h(x) & \text{für } x \in \Omega \end{cases}$$

hat höchstens eine Lösung.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass es zwei Lösungen u_1 und u_2 gibt, betrachten Sie für $w = u_1 - u_2$ die Funktion

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega w_t(x,t)^2 + c^2 |\nabla w(x,t)|^2 \, dx,$$

und zeigen Sie $E'(t) = 0$.