

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 9

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 25.6.2009 um 13 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1: Leiten Sie eine explizite Formel für die Lösung von

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

her, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

Hinweis: Versuchen Sie es mit $u(x, t) = e^{\alpha t} v(x, t)$.

Aufgabe 2: Finden Sie alle nichtnegativen klassischen Lösungen des Randwertproblems

$$\begin{cases} u_t(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = 0 & \text{für } x \in (0, \ell), t > 0, \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 & \text{für } t > 0, \end{cases}$$

die die Form $u(x, t) = X(x)T(t)$ haben.

Aufgabe 3: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit glattem Rand. Für eine Lösung u des Anfangs-/ Randwertproblems

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = g_A & \text{auf } \Omega \times \{t = 0\} \\ u = g_R & \text{auf } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (1)$$

definieren wir die Energie

$$E(t) = \int_{\Omega} u^2(x, t) dx$$

- Seien $f = 0$ und $g_R = 0$. Zeigen Sie, dass $t \mapsto E(t)$ dann fallend ist. Wie lässt sich dieses Ergebnis physikalisch interpretieren?
- Folgern Sie daraus, dass das Anfangs-/ Randwertproblem (1) höchstens eine Lösung in $C^2(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$ haben kann.

Aufgabe 4: Für $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ sei

$$u(x, t) := \frac{x}{t\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Zeigen Sie, dass u das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

erfüllt. Auch $u(x, t) = 0$ ist eine Lösung. Wieso ist dies kein Widerspruch zur Eindeutigkeit von Lösungen (Korollar 8.5)?

Eine Mitteilung der Fachschaft:

Am 26.6.09 veranstaltet die Fachschaft wieder ein großes Sommerfest! Auf dem Parkplatz des Mathematischen Instituts wird ab 18 Uhr gegrillt und für Getränke ist auch gesorgt. Ihr seid herzlich eingeladen, wir freuen uns auf Euch!