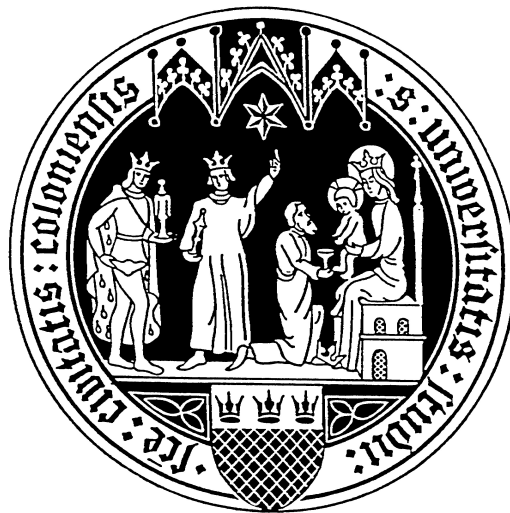


Notizen zur Vorlesung

# Partielle Differentialgleichungen



G. Sweers

Sommersemester 2011



# Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einführung</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1      | Differentialgleichungen und klassische Lösungen . . . . .                            | 1         |
| 1.2      | Räume stetiger und differenzierbarer Funktionen . . . . .                            | 2         |
| 1.3      | Intermezzo zu glatten Rändern . . . . .  | 5         |
| 1.4      | Linear und nicht-linear . . . . .  | 7         |
| 1.5      | Schwache Ableitungen . . . . .   | 8         |
| 1.6      | Schwache und distributionelle Lösungen . . . . .                                     | 9         |
| 1.7      | Kriterien von Hadamard . . . . .   | 12        |
| <b>2</b> | <b>Modelle</b>   | <b>13</b> |
| 2.1      | Transportgleichung . . . . .   | 13        |
| 2.2      | Wärmeleitungsgleichung . . . . .   | 15        |
| 2.2.1    | Einfache Ergebnisse für die Wärmeleitungsgleichung auf beschränkte Gebiete . . . . . | 15        |
| 2.3      | Die Laplace Gleichung . . . . .  | 17        |
| 2.3.1    | Ein Ergebnis für harmonische Funktionen . . . . .                                    | 17        |
| 2.4      | Die schwingende Saite . . . . .  | 19        |
| 2.5      | Die Wellengleichung . . . . .  | 20        |
| 2.6      | Die Membran . . . . .  | 21        |
| 2.7      | Der schwingende Balken . . . . .   | 23        |
| <b>3</b> | <b>Erster Ordnung: Transportgleichungen</b>  | <b>25</b> |
| 3.1      | Lineare und semilineare Transportgleichungen . . . . .                               | 25        |
| 3.1.1    | Mit konstanten Koeffizienten . . . . .   | 25        |
| 3.1.2    | Allgemeine (semi)lineare Transportgleichungen . . . . .                              | 27        |
| 3.2      | Quasilineare Transportgleichungen . . . . .  | 30        |
| 3.2.1    | Stoßwellen . . . . .   | 31        |
| 3.2.2    | Verdünnungswellen . . . . .  | 35        |
| <b>4</b> | <b>Klassifizierung zweiter Ordnung</b>   | <b>39</b> |
| 4.1      | Die einfachsten Fälle als Begründung . . . . .                                       | 39        |
| 4.2      | Standardbeispiele zu diesen Fällen . . . . .   | 41        |
| 4.2.1    | Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 - \partial_y^2$ . . . . .                 | 41        |
| 4.2.2    | Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 + \partial_y^2$ . . . . .                 | 44        |
| 4.2.3    | Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 - \partial_y$ . . . . .                   | 45        |
| 4.2.4    | Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 + \partial_y$ . . . . .                   | 48        |
| 4.2.5    | Welche Randbedingungen passen? . . . . .   | 49        |
| 4.3      | Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . .                          | 49        |
| 4.3.1    | In zwei Dimensionen . . . . .  | 49        |
| 4.3.2    | In höheren Dimensionen . . . . .   | 51        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>5 Die Wellengleichung und Distributionen</b>                        | <b>53</b>  |
| 5.1 Die Wellengleichung in Raumdimension 1 . . . . .                   | 53         |
| 5.2 Die 1d-Wellengleichung auf einem Intervall . . . . .               | 56         |
| 5.3 Intermezzo zu Distributionen . . . . .                             | 58         |
| <b>6 Die Wellengleichung in mehr Dimensionen</b>                       | <b>65</b>  |
| 6.1 Kirchhoff für Raumdimension 3 . . . . .                            | 65         |
| 6.2 Ergebnisse für beliebige Dimensionen . . . . .                     | 69         |
| 6.3 Poisson für Raumdimension 2 . . . . .                              | 71         |
| 6.4 Raumdimensionen 4 und höher . . . . .                              | 73         |
| 6.5 Gebiete mit Rand . . . . .   | 75         |
| <b>7 Die Wärmeleitungsgleichung I</b>                                  | <b>77</b>  |
| 7.1 Diffusionskern . . . . .   | 77         |
| 7.2 Mittelwert und Maximum . . . . .                                   | 82         |
| 7.3 Maximumprinzip und Eindeutigkeit . . . . .                         | 85         |
| <b>8 Die Wärmeleitungsgleichung II</b>                                 | <b>87</b>  |
| 8.1 Eindeutigkeit unter einer Wachstumsbedingung . . . . .             | 87         |
| 8.2 Eindeutigkeit mit Hilfe der Energiefunktion . . . . .              | 88         |
| 8.3 Regularität . . . . .  | 90         |
| 8.4 Existenz auf beschränkten Gebieten . . . . .                       | 92         |
| 8.5 Zwei Gegenbeispiele . . . . .                                      | 96         |
| <b>9 Die Laplace- und Poisson-Gleichungen</b>                          | <b>99</b>  |
| 9.1 Fundamentallösung . . . . .  | 99         |
| 9.2 Randwertprobleme . . . . .   | 103        |
| 9.2.1 Die Methode von Perron . . . . .                                 | 104        |
| 9.2.2 Mit Hilfe des Darstellungssatzes von Riesz . . . . .             | 105        |
| 9.2.3 Durch Variationsrechnung . . . . .                               | 106        |
| 9.2.4 Ein Beispiel . . . . .   | 107        |
| <b>10 Ordnung und Existenz bei Laplace</b>                             | <b>109</b> |
| 10.1 Greensche Funktionen auf Halbraum und Kugel . . . . .             | 109        |
| 10.2 Greensche Funktionen auf beliebigen Gebieten . . . . .            | 111        |
| 10.3 Tricks für Greensche Funktionen auf speziellen Gebieten . . . . . | 114        |
| 10.4 Folgen der Greenschen Funktion auf der Kugel . . . . .            | 116        |
| 10.4.1 Maximum-Prinzip für harmonische Funktionen . . . . .            | 117        |
| 10.4.2 Harmonisch auf Kugeln . . . . .                                 | 118        |
| <b>11 Existenz nach Perron</b>   | <b>123</b> |
| 11.1 Das Theorem von Perron . . . . .                                  | 123        |
| 11.2 Minimum und Infimum bei superharmonisch . . . . .                 | 124        |
| 11.3 Beweis mit Barrieren am Rand . . . . .                            | 126        |
| <b>12 Laplace und Regularität</b>                                      | <b>129</b> |
| 12.1 Bemerkungen zur Regularität . . . . .                             | 129        |
| 12.2 Regularität und Fundamentallösung . . . . .                       | 130        |
| 12.3 Regularität und Rand . . . . .                                    | 131        |
| 12.4 Lösungen und Abschätzungen . . . . .                              | 134        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>13 Semilineare Laplace-Gleichungen</b>              | <b>137</b> |
| 13.1 Ein erweitertes Maximum-Prinzip . . . . .         | 137        |
| 13.2 Existenz und Perturbation . . . . .               | 140        |
| 13.3 Schwach harmonisch ist harmonisch . . . . .       | 141        |
| 13.4 Existenz zwischen Ober- und Unterlösung . . . . . | 143        |
| 13.5 Variationelle Methoden . . . . .                  | 147        |



# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 1



## Einführung

### 1.1 Differentialgleichungen und klassische Lösungen

Eine partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung für eine Funktion, nennen wir sie  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , der Form

$$F(x, u, \nabla u, \nabla^2 u, \dots, \nabla^m u) = 0. \quad (1.1)$$

Hier ist  $\Omega$  ein *Gebiet*, das heißt, eine offene zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , und

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} u \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} u \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 u = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} u \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} u & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} u \end{pmatrix}, \quad \text{usw.}$$

Die höchste Ableitung die in (1.1) erscheint, nennt man die *Ordnung der Differentialgleichung*.

Oft hat eine Variable eine besondere Rolle, nämlich die Zeit, und die wird üblicherweise mit  $t$  notiert. Für die Ableitung verwendet man neben  $\frac{\partial}{\partial t}$  auch  $\partial_t$ .

Die Frage ob und wenn ja, welche Lösungen eine solche Differentialgleichung hat, lässt sich meistens nicht sinnvoll beantworten, wenn nicht passende Rand- oder Anfangswerte gegeben werden. Ein Theorem wie das von Picard-Lindelöf für gewöhnliche Differentialgleichungen, welches für alle partiellen Differentialgleichungen eine Lösung bietet, gibt es nicht. In einer Vorlesung partielle Differentialgleichungen wird man dann auch nicht versuchen, die Theorie für alle zu bringen, sondern man wird sich mit den Typen, die in den Anwendungen auftauchen, beschäftigen. Wir werden dann auch, bevor wir näher auf die verschiedenen Typen eingehen, im nächsten Kapitel erst einige dieser Anwendungen vorzustellen.

Bevor wir mit einigen Modellen anfangen, soll man etwas sagen zu „Lösung“.

**Definition 1.1** Eine Funktion  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , für die gilt:

- $u \in C^m(\Omega)$ , und
- $u$  erfüllt die Gleichung (1.1),

nennt man eine klassische Lösung von (1.1).

## 1.2 Räume stetiger und differenzierbarer Funktionen

Wir wiederholen die Definitionen von  $C^m(\Omega)$  und die einiger verwandten Funktionenräume.

**Definition 1.2** Sei  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^n$ .  $C^m(\Omega)$  ist die Menge aller Funktionen  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , die  $m$ -mal differenzierbar sind und alle diese Ableitungen sind stetig.

**Bemerkung 1.2.1** Man definiert  $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\Omega)$ .

Wenn  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$   $m$ -mal differenzierbar ist, sagt man auch  $u \in C^m(\Omega)$ . Nur wenn man explizit machen möchte, dass man Funktionen mit Werten in  $\mathbb{R}^k$  hat, wird  $C^m(\Omega; \mathbb{R}^k)$  geschrieben.

Auch begegnet man  $C^m(\bar{\Omega})$ . Die Definitionen dieser Räume sind etwas weniger geradeaus.

**Definition 1.3** Sei  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^n$ .

1. Man definiert  $C^0(\bar{\Omega}) = C(\bar{\Omega})$  als die Menge aller stetigen Funktionen  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ .
2. Für  $m \geq 1$  wird  $C^m(\bar{\Omega})$  iterativ definiert als die Menge aller stetigen Funktionen  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  mit:

- $u|_\Omega \in C^m(\Omega)$ , ( $u|_\Omega$  ist die Einschränkung von  $u$  auf  $\Omega$ ) und
- es gibt  $g_1, \dots, g_n \in C^{m-1}(\bar{\Omega})$  mit  $g_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} u(x)$  für  $x \in \Omega$ .

Wenn  $\Omega$  beschränkt ist, ist  $\bar{\Omega}$  kompakt und existiert  $\sup_{x \in \Omega} |u(x)|$  wenn  $u \in C^0(\bar{\Omega})$ . Für beschränkte Gebiete  $\Omega$  und  $u \in C^m(\bar{\Omega})$  ist  $\|\cdot\|_{C^m(\bar{\Omega})}$  durch

$$\|u\|_{C^m(\bar{\Omega})} = \sum_{k=0}^m \sup_{x \in \Omega} |\nabla^k u(x)|. \quad (1.2)$$

also wohldefiniert.  $(C^m(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^m(\bar{\Omega})})$  ist ein normierter Vektorraum.

**Bemerkung 1.3.1** Wenn klar ist, welches Gebiet gemeint ist, schreibt man auch

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \|u\|_\infty.$$

Übrigens ist  $\|\cdot\|_\infty$  auch eine Norm für den Raum  $L^\infty(\Omega)$  der beschränkten Funktionen auf  $\Omega$ .

**Bemerkung 1.3.2** Auf nicht abgeschlossenen oder unbeschränkten Gebieten gibt es unbeschränkte stetige Funktionen. So wie  $C^m(\Omega)$  hier definiert ist, kann man (1.2) also nicht als Norm für  $C^m(\Omega)$  verwenden. Das gleich trifft zu für  $C^m(\bar{\Omega})$  mit  $\Omega$  unbeschränkt.

**Proposition 1.4** Sei  $m \in \mathbb{N}$  und sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet. Dann ist  $(C^m(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^m(\bar{\Omega})})$  ein Banachraum.



**Bemerkung 1.4.1** Ein normierter Vektorraum heißt Banachraum, wenn jede Cauchy-Folge<sup>1</sup> konvergent ist.

**Beweis.** Wir betrachten vorerst den Fall  $m = 0$ . Sei  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $(C^0(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^0(\bar{\Omega})})$ . Dann gilt:

1. Der Grenzwert  $\tilde{u}(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x)$  existiert für jedes  $x \in \bar{\Omega}$ , denn  $\{u_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{R}$  ist vollständig.
2. Gleichmäßige Konvergenz: Sei  $N_\varepsilon > 0$  derart, dass  $\|u_k - u_\ell\| < \frac{1}{2}\varepsilon$  für  $k, \ell > N_\varepsilon$ . Für jedes  $x$  gibt es  $N_{x,\varepsilon}$  derart, dass  $|u_\ell(x) - \tilde{u}(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$  für  $\ell > N_{x,\varepsilon}$ . Man nehme nun  $\ell_x = \max(N_{x,\varepsilon}, N_\varepsilon) + 1$  und finde

$$|u_k(x) - \tilde{u}(x)| \leq |u_k(x) - u_{\ell_x}(x)| + |u_{\ell_x}(x) - \tilde{u}(x)| < \varepsilon.$$

Weil dies für beliebiges  $x$  gilt, folgt  $k \geq N_\varepsilon$  impliziert  $\|u_k - \tilde{u}\|_\infty < \varepsilon$ . Also konvergiert  $\{u_k\}$  nicht nur punktweise sondern sogar gleichmäßig nach  $\tilde{u}$ .

3. Der Limes  $\tilde{u}$  ist stetig: Sei  $\varepsilon > 0$ , nehme  $k$  genügend groß so dass  $\|\tilde{u} - u_k\|_\infty < \frac{1}{3}\varepsilon$  und nehme  $\delta_{\varepsilon,k} > 0$  derart, dass  $|x - y| < \delta_{\varepsilon,k}$  impliziert  $|u_k(x) - u_k(y)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ . Es folgt

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq |\tilde{u}(x) - u_k(x)| + |u_k(x) - u_k(y)| + |u_k(y) - \tilde{u}(y)| < \varepsilon.$$

Es gibt also  $\tilde{u} \in C^0(\bar{\Omega})$  derart, dass  $\|u_k - \tilde{u}\|_\infty \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Die Aussage für  $m = 0$  ist bewiesen.

Sei nun  $m \geq 1$  und  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $(C^m(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^m(\bar{\Omega})})$ . Aus dem ersten Teil dieses Beweises wissen wir, dass es für jede Ableitung<sup>2</sup>  $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha$  mit  $|\alpha| \leq m$  eine stetige Funktion  $g_\alpha \in C^0(\bar{\Omega})$  gibt mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u_k - g_\alpha \right\|_{C^0(\bar{\Omega})} = 0.$$

Wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} u_k - g_i \right\|_{C^0(\bar{\Omega})} = 0$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - g_0\|_{C^0(\bar{\Omega})} = 0$ , dann folgt, dass gleichmäßig für  $[a, a + he_i] \subset \Omega$

$$\begin{aligned} u_k(a + he_i) - u_k(a) &\rightarrow g_0(a + he_i) - g_0(a) \text{ und} \\ u_k(a + he_i) - u_k(a) &= \int_{[a, a+he_i]} \frac{\partial}{\partial x_i} u_k(x) dx_i \rightarrow \int_{[a, a+he_i]} g_i(x) dx_i. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum.  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V$  ist eine Cauchy-Folge, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} : k, \ell > m \implies \|u_k - u_\ell\| < \varepsilon.$$

<sup>2</sup>Wir haben hier die *Multiindex*-Notation verwendet:  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  bedeutet  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  und man setzt

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\alpha_2} \cdots \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}.$$

Man schreibt außerdem  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ .

Der Hauptsatz für Integrale liefert

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g_0(x) = g_i(x) \text{ für } x \in [a, a + h e_i].$$

Ähnliches gilt für jede Ableitung und die Kombination ergibt  $g_\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \tilde{u}$ , das heißt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - \tilde{u}\|_{C^m(\bar{\Omega})} = 0,$$

oder anders gesagt,  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  ist eine konvergente Folge in  $C^m(\bar{\Omega})$ . ■

**Bemerkung 1.4.2** Man begegnet auch  $C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})$  mit  $m \in \mathbb{N}$  und  $\gamma \in (0, 1]$ :

$$C^{m,\gamma}(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C^m(\bar{\Omega}); \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{\left| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u(x) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u(y) \right|}{|x - y|^\gamma} < \infty \text{ für } |\alpha| = m \right\}.$$

So sind  $C^{0,1}(\bar{\Omega})$  die Lipschitz<sup>3</sup>-stetigen Funktionen auf  $\bar{\Omega}$ .

Man nennt  $C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$  mit  $\gamma \in (0, 1)$  die zum Exponenten  $\gamma$  Hölder<sup>4</sup>-stetige Funktionen. Die Vektorräume  $C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})$  werden Hölder-Räume genannt.

Schlußendlich gibt es noch einige Funktionenmengen, die sich mit besonderem Benehmen am Rand beschäftigen.

**Definition 1.5** Man definiert  $C_0^m(\bar{\Omega})$  als die Teilmenge von  $C^m(\bar{\Omega})$  der Funktionen  $u$  mit  $\nabla^k u(x) = 0$  für  $x \in \partial\Omega$  und  $k \leq m$ .

**Bemerkung 1.5.1** Sei  $\Omega$  beschränkt. Dann ist  $C_0^m(\bar{\Omega})$ , als eine abgeschlossene Teilmenge von  $C^m(\bar{\Omega})$ , bezüglich der  $\|\cdot\|_{C^m(\bar{\Omega})}$ -Norm ein Banachraum.

**Definition 1.6** Man definiert  $C_0^\infty(\Omega)$  als die Teilmenge der Funktionen  $u \in C^\infty(\Omega)$  mit kompaktem Träger<sup>5</sup> innerhalb von  $\Omega$ .

**Beispiel 1.7** Die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} (1 + x^2 + 2x - 3y) \exp\left(\frac{-1}{1-x^2-2y^2}\right) & \text{für } x^2 + 2y^2 < 1, \\ 0 & \text{für } x^2 + 2y^2 \geq 1, \end{cases}$$

hat einen kompakten Träger, ist beliebig oft stetig differenzierbar und liegt also in  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Dass sie beliebig oft differenzierbar ist, findet man mit den Standardableitungsregeln wenn  $x^2 + 2y^2 \neq 1$ . Weil  $\lim_{t \rightarrow -\infty} t^n e^t = 0$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , folgt  $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = 0$  für  $x^2 + 2y^2 = 1$ . Durch Induktion findet man, dass

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x) = 0 \text{ für } x^2 + 2y^2 = 1$$

und dass die Ableitungen  $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f$  alle stetig sind.

Gelegentlich findet man auch  $C_c^m(\bar{\Omega})$  und  $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ . Mit  $C_c^m(\bar{\Omega})$  meint man die Teilmenge der Funktionen  $u \in C^m(\bar{\Omega})$ , beziehungsweise  $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ , mit kompaktem Träger.

<sup>3</sup>Rudolf Otto Sigmund Lipschitz, Bönkein 1832 - Bonn 1905

<sup>4</sup>Otto Ludwig Hölder, Stuttgart 1859 - Leipzig 1937

<sup>5</sup>Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  und  $u \in C(A)$ . Der Träger von  $u$  ist die abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  definiert durch:

$$\text{support}(u) = \overline{\{x \in A; u(x) \neq 0\}}.$$

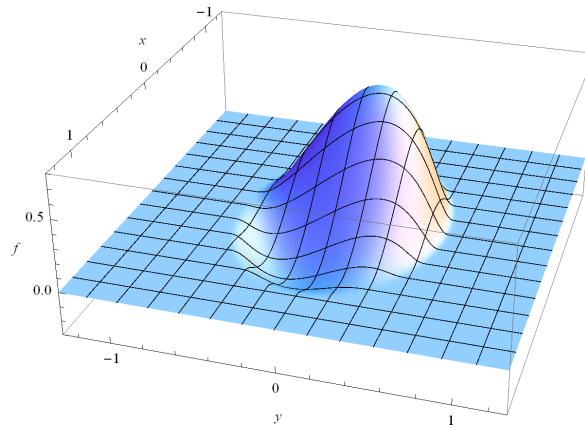


Abbildung 1.1: Darstellung der Funktion aus Beispiel 1.7.

### 1.3 Intermezzo zu glatten Rändern

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen hat man neben dieser Differentialgleichung oft Anfangs- oder Randwerte an einigen Punkten zu erfüllen. Bei partiellen Differentialgleichungen in  $n$  Dimensionen werden Anfangs- oder Randwertbedingungen typischerweise auf  $(n - 1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten definiert. Häufig hat man zu tun mit Gebieten, die Ecken oder Kanten haben. Solche Gebiete geben spezifische Probleme, die kaum in einer Anfängervorlesung angesprochen werden können.

**Beispiel 1.8** Wir definieren die Funktion  $u_\alpha$  für  $\alpha \in (0, 2\pi)$  mit Hilfe von Polarkoordinaten  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$

$$u_\alpha(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) \quad \text{für } r \in [0, 1] \text{ und } \varphi \in [0, \alpha].$$

Der Differentialoperator  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$  in Polarkoordinaten wird  $\Delta = \frac{1}{r} \partial_r r \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2$  und es folgt

$$\begin{aligned} (\Delta u_\alpha)(r \cos \varphi, r \sin \varphi) &= \\ &= \left( \frac{1}{r} \partial_r r \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 \right) r^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) = \\ &= \frac{1}{r} \partial_r \frac{\pi}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) + \frac{\pi}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}-2} \partial_\varphi^2 \cos\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) = \\ &= \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 r^{\frac{\pi}{\alpha}-2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) - \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 r^{\frac{\pi}{\alpha}-2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) = 0. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} u_\alpha(\cos \varphi, \sin \varphi) &= \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right), \\ u_\alpha(x, 0) &= u_\alpha(r \cos \alpha, r \sin \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Wir haben eine Lösung vom Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u_\alpha = 0 & \text{in } \Omega_\alpha, \\ u_\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) & \text{auf } \partial\Omega_\alpha. \end{cases}$$

Hier ist  $\Omega_\alpha = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi); 0 < r < 1 \text{ und } 0 < \varphi < \alpha\}$  und  $\partial\Omega_\alpha$  der Rand des Gebietes.

Trotz der Tatsache, dass der Sinus eine unendlich oft differenzierbare Funktion ist, ist die Lösung nicht unbedingt differenzierbar. Die Differenzierbarkeit in 0 hängt ab von der Öffnung  $\alpha$ :

$$(\partial_r u_\alpha)(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) = \frac{\pi}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\varphi\right)$$

und nur für  $\alpha \leq \pi$  existiert  $(\partial_v u_\alpha)(0)$  wenn  $v = (\cos(\frac{1}{2}\alpha), \sin(\frac{1}{2}\alpha))$ .

Skizzen zu diesen Funktionen  $u_\alpha$  findet man in Abbildung 1.2.

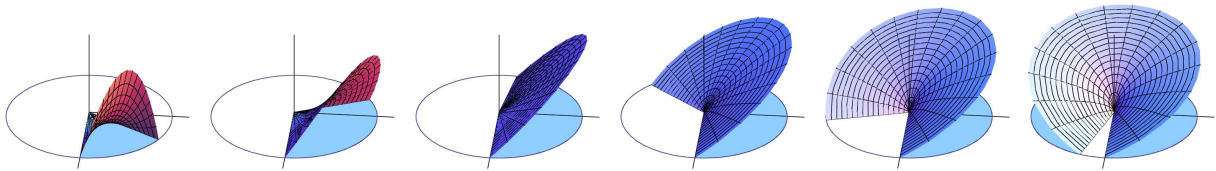


Abbildung 1.2: Funktionen  $u_\alpha$  mit  $\alpha = 1, 2, \dots, 6$ .

Das Beispiel zeigt, dass bei Ecken eine Lösung nicht unbedingt differenzierbar sein muss. Es bedeutet auch, dass man um Ergebnisse genau formulieren zu können, die Regularität des Randes genau klassifizieren soll.

Für den Rand des Gebietes  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  schreibt man  $\partial\Omega$ . Dieser Rand ist definiert durch

$$\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gilt } B_\varepsilon(x) \cap \Omega \neq \emptyset \text{ und } B_\varepsilon(x) \cap \Omega^c \neq \emptyset\}.$$

**Definition 1.9** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Man sagt  $\partial\Omega \in C^m$ , wenn man für jedes Kompaktum  $K$ , endlich viele (lokale) kartesische Koordinatensysteme  $\{y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_n^{(i)}\}_{i=1}^M$  und Funktionen  $\psi^{(i)} \in C^m(\mathbb{R}^{n-1})$  hat derart, dass es

- offene Blöcke  $B^{(i)} = \{y \in \mathbb{R}^n; a_k^{(i)} < y_k^{(i)} < b_k^{(i)} \text{ mit } 1 \leq k \leq n\}$  mit  $1 \leq i \leq M$  gibt, die  $\partial\Omega \cap K$  überdecken, und
- $\Omega \cap B^{(i)} = \{y_n^{(i)} > \psi^{(i)}(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_{n-1}^{(i)}); y \in B^{(i)}\} \cap B^{(i)}$ .

Die Blöcke können also rotiert sein bezüglich der Standardbasis. Man nimmt sie offen damit diese Blöcke sich notwendigerweise überlappen müssen und sich keine Singularitäten bei der Verknüpfung verstecken können. Aus der zweiten Bedingung folgt außerdem, dass das Gebiet  $\Omega$  mit  $\partial\Omega \in C^0$  lokal immer an einer Seite des Randes liegt. Ein typisches Bild findet man in Abbildung 1.3.

**Beispiel 1.10** Für einen (Hyper)Kubus  $\Omega = (0, 1)^n$  in  $\mathbb{R}^n$  mit  $n \geq 2$  gilt  $\partial\Omega \in C^{0,1}$ .

**Beispiel 1.11** Für eine (Hyper)Kugel  $\Omega = B_1(0)$  in  $\mathbb{R}^n$  mit  $n \geq 2$  gilt  $\partial\Omega \in C^\infty$ . Man braucht mindestens  $n + 1$  Blöcke  $B^{(i)}$ .

**Beispiel 1.12** Nicht jedes Gebiet hat ein  $C^0$ -Rand. Siehe Abbildung 1.4.

Noch etwas müßte man noch festlegen. Wenn man eine Funktion hat, die nur auf dem Rand definiert ist, wann kann man eine solche Funktion differenzierbar nennen?

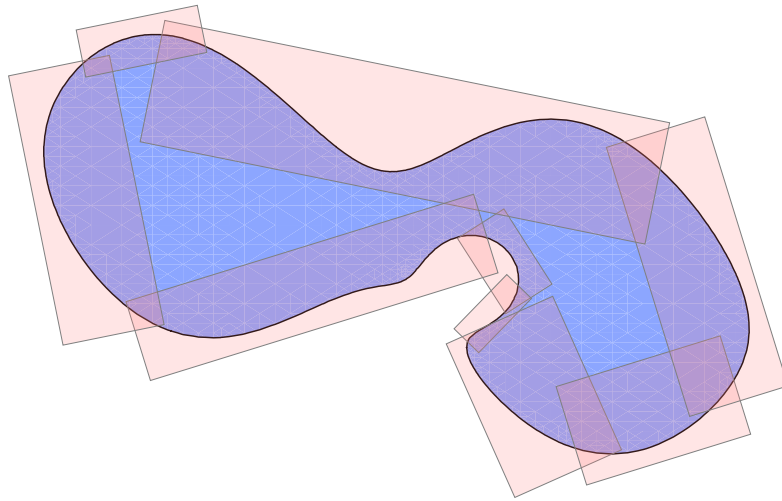


Abbildung 1.3: Mit Hilfe von lokalen Koordinaten auf Blöcke  $B^{(i)}$  und Funktionen  $\psi^{(i)}$  wird die Regularität von  $\partial\Omega$  definiert.

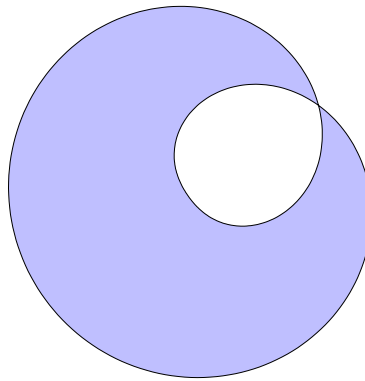


Abbildung 1.4: Ein Gebiet, das nicht unsere  $C^0$ -Bedingung erfüllt. Beim „Doppelspitze“ liegt  $\Omega$  nicht an einer Seite vom Rand.

**Definition 1.13** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^k$  und sei  $m \leq k$ . Sei  $\{\psi^{(i)}\}$  eine Menge endlich vieler Funktionen wie in Definition 1.9. Dann nennt man  $u \in C^m(\partial\Omega)$ , wenn

$$\left(y_1^{(i)}, \dots, y_{n-1}^{(i)}\right) \mapsto u\left(y_1^{(i)}, \dots, y_{n-1}^{(i)}, \psi^{(i)}\left(y_1^{(i)}, \dots, y_{n-1}^{(i)}\right)\right) \in C^m,$$

für jedes dieser  $\psi^{(i)}$ .

**Bemerkung 1.13.1** Man kann zeigen, dass diese Definition nicht abhängt von der gewählten Menge  $\{\psi^{(i)}\}$ , wenn diese den Rand wie in Definition 1.9 beschreiben.

**Bemerkung 1.13.2** Die Definition wird angepasst wenn es einen Teil des Randes betrifft.

## 1.4 Linear und nicht-linear

Wir nehmen an, dass die Differentialgleichungen in den folgenden Definitionen alle von Ordnung  $m$  sind.

**Definition 1.14** *Partielle Differentialgleichungen der Form*

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha(x) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u(x) = f(x) \quad (1.3)$$

mit  $a_\alpha$  und  $f$  gegeben und  $u$  gesucht, nennt man linear.

Diese Differentialgleichung heißt linear, weil der Differentialoperator

$$L = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha(x) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha$$

linear ist: Wenn  $Lu_1 = f_1$  und  $Lu_2 = f_2$ , dann gilt für beliebige  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , dass

$$L(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1f_1 + c_2f_2.$$

Die einfachste Änderung, die uns eine nicht-lineare Differentialgleichung liefert, ist die folgende:

**Definition 1.15** *Partielle Differentialgleichungen der Form*

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha(x) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u(x) = f(x, u) \quad (1.4)$$

mit  $a_\alpha$  und  $f$  gegeben und  $u$  gesucht, nennt man semilinear.

Es ist das Recht des Buchhalters wenn er sagt, dass linear ja auch semilinear sei. Eine folgende Erweiterung ist:

**Definition 1.16** *Partielle Differentialgleichungen der Form*

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|=m}} a_\alpha(x, u, \nabla u, \dots, \nabla^{m-1}u) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u(x) = f(x, u, \nabla u, \dots, \nabla^{m-1}u) \quad (1.5)$$

mit  $a_\alpha$  und  $f$  gegeben und  $u$  gesucht, nennt man quasilinear.

Die restlichen partiellen Differentialgleichungen nennt man *völlig nichtlinear*.

## 1.5 Schwache Ableitungen

Für punktweise definierte Funktion ist die Definition einer partiellen Ableitung eindeutig. Gelegentlich wird man aber eine Definition brauchen für die Ableitung einer Funktion, die nur als Äquivalenzklasse festgelegt ist. Wir erinnern an die  $L^p(\Omega)$ -Räume.

**Definition 1.17** *Sei  $p \in [1, \infty]$ . Dann ist  $L^p(\Omega)$  der Raum der Lebesgue-messbaren Funktionen  $f$ , für die gilt:  $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$  mit*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left( \int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p} & \text{für } p \in [1, \infty), \\ \text{ess sup } \{|f(x)|; x \in \Omega\} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

**Definition 1.18** Sei  $f$  eine Lebesgue-messbare Funktion. Man sagt  $\partial_{x_i} f$  existiert als schwache Ableitung in  $L^1_{\text{lokal}}(\Omega)$  wenn es  $g \in L^1_{\text{lokal}}(\Omega)$  gibt mit

$$\int_{\Omega} (f(x) \partial_{x_i} \varphi(x) + g(x) \varphi(x)) dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Wenn  $f$  auf  $\Omega$  eine klassische Ableitung nach  $x_i$  hat, dann folgt aus einer partiellen Integration, dass

$$\int_{\Omega} (f(x) \partial_{x_i} \varphi(x) + \partial_{x_i} f(x) \varphi(x)) dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

**Definition 1.19** Sei  $k \in \mathbb{N}$  und  $p \in [1, \infty]$ . Man definiert den Sobolev<sup>6</sup>-Raum  $W^{k,p}(\Omega)$  als die Menge (der Äquivalenzklassen) der Funktionen  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  derart, dass  $u$  und deren schwache Ableitungen der Ordnung  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq k$  in  $L^p(\Omega)$  liegen.

**Bemerkung 1.19.1**  $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)})$  mit Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} \left| \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u(x) \right|^p dx \right)^{1/p}$$

ist ein vollständiger Banach-Raum.

## 1.6 Schwache und distributionelle Lösungen

Wie man bei gewöhnlichen Differentialgleichungen schon gesehen hat, kommt man mit klassischen Lösungen nicht immer aus. Man erinnere sich an das Reibungsproblem bei zum Beispiel einem bremsenden Fahrzeug. Man konnte da nur eine Lösung definieren, wenn man an einzelnen Stellen zuließ, dass da die Differentialgleichung nicht erfüllt ist.

**Beispiel 1.20** Die Reibungskraft für zwei sich übereinander bewegende feste Körper ist annäherungsweise nur abhängig vom Vorzeichen der relativen Geschwindigkeit:

$$F(v) = \begin{cases} -c & \text{für } v > 0, \\ 0 & \text{für } v = 0, \\ c & \text{für } v < 0. \end{cases}$$

Sei  $v$  die Geschwindigkeit des Fahrzeugs und  $m$  die Masse, so gilt für die Beschleunigung  $v'$ :

$$mv' = F(v).$$

Es gibt keine klassische Lösung. Wenn man jedoch die Integralform der Gleichung betrachtet:

$$m(v(t) - v(0)) = \int_0^t F(v(s)) ds$$

dann findet man die folgende Lösung wenn  $v(0) > 0$ :

$$v(t) = \begin{cases} v(0) - \frac{c}{m}t & \text{für } t \in [0, t_1], \\ 0 & \text{für } t > t_1 := c^{-1}mv(0). \end{cases}$$

Für  $t = t_1$  ist  $v$  nicht differenzierbar und deswegen ist  $v$  keine klassische Lösung.

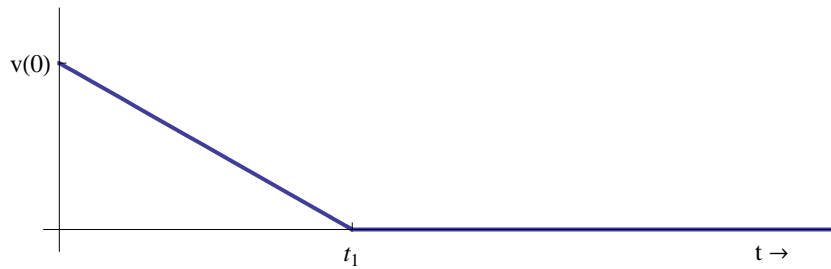


Abbildung 1.5: Skizze zu einer Geschwindigkeit  $t \mapsto v(t)$  aus Beispiel 1.20.

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen hat man also gelegentlich den Lösungsbegriff erweitern müssen und das hat man gemacht indem man die Differentialgleichung ersetzte durch eine Integralgleichung. Bei partiellen Differentialgleichungen ist die Sache etwas schwieriger, denn in welche Richtung soll man integrieren? Wie soll man von einer partiellen Differentialgleichung höherer Ordnung zu einem System erster Ordnung kommen?

Auch hier gibt es kein Lösungsmittel, das alle Flecken rausbringt und wir müssen uns einschränken und brauchen dafür eine zweite Klassifizierung der Differentialgleichungen.

Für (semi)lineare partielle Differentialgleichungen kann man, wenn die Koeffizienten  $a_\alpha$  genügend glatt sind, den Lösungsbegriff relativ leicht erweitern.

**Definition 1.21** Man nennt  $u \in C(\Omega)$  eine distributionelle Lösung der Gleichung (1.4) wenn

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m} u(x) \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(a_\alpha(x) \varphi(x)\right) - f(x, u) \varphi(x) \right) dx = 0 \quad (1.6)$$

für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Bemerke, dass diese Definition nur Sinn macht wenn  $a_\alpha$  genügend glatt ist,  $a_\alpha \in C^m(\Omega)$ . Wenn dies gilt, dann ist  $\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha (a_\alpha(x) \varphi(x))$  und das Integral wohldefiniert. Es ist übrigens nicht notwendig, dass  $u \in C(\Omega)$ . Es reicht wenn für diese Funktion ein Integral definiert ist.

Es gibt auch den Begriff schwache Lösung. Dabei werden nicht alle partielle Ableitungen zur Testfunktion  $\varphi$  gebracht sondern nur die Hälfte.

**Definition 1.22** Man nennt  $u \in C^{\tilde{m}}(\Omega)$  eine schwache Lösung der Gleichung

$$\sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, |\alpha|, |\beta| \leq \tilde{m}} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha a_{\alpha, \beta}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta u(x) = f(x, u)$$

wenn

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, |\alpha|, |\beta| \leq \tilde{m}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta u(x)\right) a_{\alpha, \beta}(x) \left(\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \varphi(x)\right) - f(x, u) \varphi(x) \right) dx = 0 \quad (1.7)$$

für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

**Bemerkung 1.22.1** Die Spaltung zwischen den Ableitungen  $\alpha$  und  $\beta$  ist nicht eindeutig. Für einzelne Probleme soll man genau definieren was mit einer schwachen Lösung gemeint ist.

<sup>6</sup>Sergei Lwowitsch Sobolew, 1908-1989, war ein Russischer Mathematiker der arbeitete auf Partiellen Differentialgleichungen, Funktionalanalysis, Numerischer Mathematik und ... Uranisotopenanreicherung.



Um zu zeigen, dass klassische Lösungen auch schwache oder distributionelle Lösungen sind, brauchen wir eine Version des *Hauptlemmas der Variationsrechnung*:

**Lemma 1.23** Sei  $u \in C(\Omega)$ . Wenn

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

dann gilt  $u = 0$ .

**Beweis.** Wenn  $u \neq 0$ , dann gibt es  $x_0 \in \Omega$  mit  $u(x_0) \neq 0$ . Nehmen wir an, dass  $u(x_0) > 0$ , dann folgt aus der Stetigkeit von  $u$ , dass es eine Umgebung  $B_\varepsilon(x_0)$  gibt derart, dass  $u(x) \geq c := \frac{1}{2}u(x_0) > 0$  für  $x \in B_\varepsilon(x_0)$ . Nehmen wir  $\varphi \in C_0^\infty(B_\varepsilon(x_0))$  mit  $\varphi \geq 0$  in  $B_\varepsilon(x_0)$  und  $\varphi \geq c_1 > 0$  in  $B_{\varepsilon/2}(x_0)$ , so folgt

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx > 0,$$

ein Widerspruch. ■

Dass es eine solche Funktionen  $\varphi$  in dem letzten Beweis gibt, möge das Beispiel

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2 - \varepsilon^2}} & \text{für } \|x\| < \varepsilon, \\ 0 & \text{für } \|x\| \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (1.8)$$

deutlich machen. Man kann zeigen, dass auf dem Kreisrand  $\|x\| = \varepsilon$  diese Funktion nicht nur stetig ist sondern, dass da auch alle Ableitungen existieren. Man verwende dazu, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)e^{-t} = 0 \text{ für jedes Polynom } p.$$

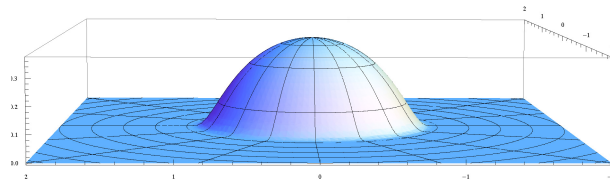


Abbildung 1.6: Skizze zu der Testfunktion  $\varphi_\varepsilon$  aus (1.8) mit  $\varepsilon = 1$ .

Das folgende Ergebnis zeigt die Verbindung zwischen klassischen und schwachen Lösungen.

**Proposition 1.24** Für semilineare Gleichungen gilt:

- Klassische Lösungen sind distributionelle Lösungen.
- Wenn  $u \in C^m(\Omega)$  eine distributionelle Lösung der Gleichung (1.4) ist, so ist  $u$  eine klassische Lösung.

**Bemerkung 1.24.1** Schwache Lösungen liegen zwischen distributionell und klassisch und ein ähnliches Ergebnis gilt.

**Beweis.** Durch partielle Integration findet man, wenn der auswärtige Normalenvektor  $\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  auf  $\partial\Omega$  wohldefiniert ist und wenn die Ableitungen von  $f$  und  $g$  bezüglich  $x_i$  stetig sind, dass

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial}{\partial x_i} g(x) dx = \int_{\partial\Omega} f(x) g(x) n_i d\sigma_x - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \right) g(x) dx.$$

Wenn  $g(x) = 0$  oder  $f(x) = 0$  für  $x \in \partial\Omega$ , dann entfällt der mittlere Term und es folgt

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial}{\partial x_i} g(x) dx = \int_{\Omega} \left( -\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \right) g(x) dx. \quad (1.9)$$

So kann man (1.6), wenn  $u \in C^m(\Omega)$  und  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  angenommen worden ist, auch schreiben als

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u(x) - f(x, u) \right) \varphi(x) dx = 0. \quad (1.10)$$

Zum Beweis soll man bemerken, dass  $\varphi$  einen kompakten Träger  $K \subset \Omega$  hat. Man kann zeigen dass es  $\Omega^*$  gibt mit

$$K \subset \Omega^*, \overline{\Omega^*} \subset \Omega \text{ und } \partial\Omega^* \in C^\infty.$$

Im Integral (1.10) kann man  $\Omega$  durch  $\Omega^*$  ersetzen und öfters (1.9) anwenden.

Das bedeutet klassische Lösungen sind distributionelle Lösungen und, mit Hilfe des obigen Lemmas, distributionelle Lösungen in  $C^m(\Omega)$  sind klassisch. ■

## 1.7 Kriterien von Hadamard

Eine gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung braucht  $n$  unabhängige Bedingungen um höchstens eine Lösung zu haben. War es bei einem Anfangswertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung noch relativ einfach Bedingungen anzugeben wo es genau eine Lösung gibt, nämlich die Bedingungen aus dem Satz von Picard-Lindelöf, war es bei Randwertproblemen schon schwieriger. Und bei Randwertproblemen war die Existenz bei linearen wiederum einfacher als bei nicht-linearen.

Für partielle Differentialgleichungen wird es sehr vom Type abhängen, welcher Art von Anfangs- oder Randwerte genau eine Lösung geben werden. Aber auch hier wird das Ziel sein, Bedingungen zu suchen derart, dass die Differentialgleichung mit festgelegten Anfangs- oder Randwerten die *Kriterien von Hadamard*<sup>7</sup> erfüllt:

- *Eindeutigkeit*: Das Problem hat höchstens eine Lösung.
- *Existenz*: Das Problem hat mindestens eine Lösung.
- *Robustheit*: Wenn man das Problem ein wenig ändert, ändert sich die Lösung auch nur wenig.

Die dritte Eigenschaft wird auch als *Stabilität* oder *stetige Abhängigkeit der Eingangsdaten* benannt.

Wenn ein Problem diese drei Eigenschaften hat, nennt man es *wohlgestellt*. Manchmal sagt man auch *wohldefiniert*.

<sup>7</sup>Jacques Salomon Hadamard, 1865 – 1963, Französischer Mathematiker, hat seine Spuren hinterlassen in vielen Teilgebieten der Mathematik.

# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 2



## Modelle

Dieses Kapitel versucht eine Verbindung herzustellen zwischen physikalischen Voraussetzungen und mathematisch formulierten Problemstellungen. Solche Modellierungsvorgänge sind eine Kunst an sich und bewegen sich außerhalb der üblichen Mathematik bei der man versucht aus einigen Axiomen eine zweifelsfreie Theorie aufzubauen. Modellierung fängt an mit Beobachtungen, Experimenten und Vermutungen, wie der Zusammenhang zwischen Ursache und Ergebnis erklärt werden kann. Die Mathematik an sich kann nicht erklären wieso ein solches Modell korrekt wäre. Wenn aber die mathematischen Schlußfolgerungen zu unerwarteten Ergebnissen oder sogar zu einem Widerspruch führen würden, müßte man sich ernsthaft Sorgen machen über die Richtigkeit des Modells. Neben der Vorstellung einiger Modelle, werden auch ein paar einfache mathematische Ergebnisse gebracht.

### 2.1 Transportgleichung

Man stelle sich vor, dass sich eine Flüssigkeit oder ein Gas unter dem Einfluß einer Strömung bewegt. Diese Strömung ist gegeben durch ein Vektorfeld, das die lokale Geschwindigkeit  $\vec{v}(x, t)$  der Teilchen beschreibt. Die Variable  $x \in \mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  beschreibt die Stelle und  $t$  die Zeit. Man möchte wissen, wie die Dichte  $\rho = \rho(x, y, t)$  ist. Sei  $\Omega(t)$  eine beschränkte Menge dieser Flüssigkeit. Wenn man  $\Delta t$  weiter in der Zeit ist, hat diese Menge sich etwas deformiert zu  $\Omega(t + \Delta t)$  unter Einfluß des Vektorfeldes. Siehe Figur 2.1.

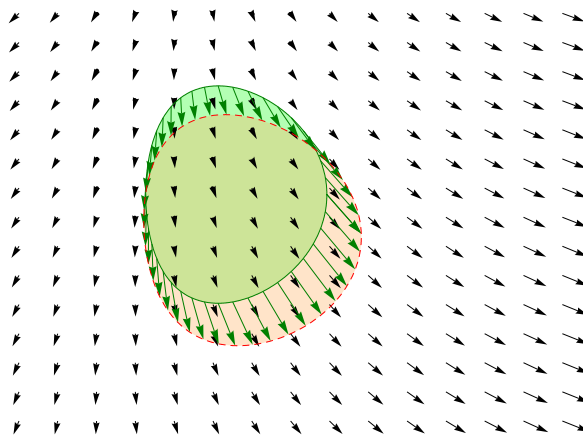


Abbildung 2.1: Von  $t$  zu  $t + \Delta t$  hat  $\Omega(t)$  sich bewegt nach  $\Omega(t + \Delta t)$ .

Weil die Masse erhalten bleibt, gilt

$$\int_{\Omega(t+\Delta t)} \rho(x, t + \Delta t) dx = \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) dx.$$

Diese Identität benutzt man wie folgt für die Ableitung der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{\Omega(t+\Delta t)} \rho(x, t + \Delta t) dx - \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) dx \right) = \\ &= \int_{\Omega(t)} \frac{\rho(x, t + \Delta t) - \rho(x, t)}{\Delta t} dx + \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{\Omega(t+\Delta t) \setminus \Omega(t)} - \int_{\Omega(t) \setminus \Omega(t+\Delta t)} \right) \rho(x, t + \Delta t) dx. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \int_{\Omega(t)} \frac{\rho(x, t + \Delta t) - \rho(x, t)}{\Delta t} dx = \int_{\Omega(t)} \partial_t \rho(x, t) dx \quad (2.1)$$

und für das Ein- und Ausströmen:

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{\Omega(t+\Delta t) \setminus \Omega(t)} - \int_{\Omega(t) \setminus \Omega(t+\Delta t)} \right) \rho(x, t + \Delta t) dx = \int_{\partial \Omega(t)} \rho(x, t) \vec{v}(x, t) \cdot \vec{\nu} d\sigma_x.$$

Hier ist  $\partial \Omega(t)$  der Rand von  $\Omega(t)$  und  $\vec{\nu}$  der auswärtige Normalenvektor. Weil

$$\int_{\partial \Omega(t)} \rho(x, t) \vec{v}(x, t) \cdot \vec{\nu} d\sigma_x = \int_{\Omega(t)} \nabla \cdot (\rho(x, t) \vec{v}(x, t)) dx \quad (2.2)$$

folgt

$$\int_{\Omega(t)} \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \nabla \cdot (\rho(x, t) \vec{v}(x, t)) \right) dx = 0. \quad (2.3)$$

Weil diese letzte Gleichung für jedes Teilgebiet  $\Omega(t)$  gilt, hat man

$$\partial_t \rho(x, t) + \nabla \cdot (\rho(x, t) \vec{v}(x, t)) = 0. \quad (2.4)$$

Physikalisch beschreibt diese Gleichung *die Erhaltung der Masse*.

Wenn  $\vec{v}$  gegeben ist, ist (2.4) eine Differentialgleichung erster Ordnung für die unbekannte Dichte  $\rho$ . Man nennt eine solche Differentialgleichung eine *Transportgleichung*.

In der Ableitung dieser Differentialgleichung haben wir einen Integralsatz benutzt. Zur Erinnerung:

**Lemma 2.1** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und derart, dass der auswärtige Normalenvektor  $\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  auf  $\partial \Omega$  wohldefiniert ist. Dann gilt für  $u \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$ ,  $\vec{v} \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$  und  $w \in C^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$  folgendes:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) dx &= \int_{\partial \Omega} u(x) \nu_i d\sigma_x, \\ \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{v}(x) dx &= \int_{\partial \Omega} \vec{v}(x) \cdot \vec{\nu} d\sigma_x, \\ \int_{\Omega} \Delta w(x) dx &= \int_{\partial \Omega} \nabla w(x) \cdot \vec{\nu} d\sigma_x = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial}{\partial \nu} w(x) d\sigma_x. \end{aligned}$$

## 2.2 Wärmeleitungsgleichung

In vielen Fällen wird  $\vec{v}$  in (2.4) bestimmt durch die Dichte  $\rho$ . Wenn es sich um eine Flüssigkeit in einem porösen Medium handelt, gilt das *Gesetz von Darcy*:

$$\rho(x, t) \vec{v}(x, t) = -c \nabla P(x, t)$$

wobei  $P$  der Druck ist. Wenn Druck und Dichte proportional sind,  $P = c_1 \rho$ , findet man mit (2.4) und  $c_2 = c_1 c$ , dass

$$\partial_t \rho(x, t) = -\nabla \cdot (\rho(x, t) \vec{v}(x, t)) = -c \nabla \cdot \nabla P(x, t) = -c_2 \Delta \rho(x, t).$$

Ähnliches gilt für die Wärmeleitung. Das *Wärmeleitungsgesetz* (das *Gesetz von Fourier*) besagt

$$T(x, t) \vec{v}(x, t) = -c \nabla T(x, t).$$

Nennt man  $c$  die Wärmekapazität, so gilt für die Energiedichte  $\rho = c_1 T$ . Auch hier folgt mit (2.4):

$$\partial_t T(x, t) = -\nabla \cdot (T(x, t) \vec{v}(x, t)) = c \nabla \cdot \nabla T(x, t)$$

und die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\partial_t T(x, t) - c \Delta T(x, t) = 0.$$

Sorgt zusätzlich eine Wärmequelle  $f(x, t)$  im Innern für eine extra Zufuhr, dann bekommt man die *inhomogene Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) - k \Delta T(x, t) = f(x, t). \quad (2.5)$$

Wenn wir die Wärmeverteilung in einem isolierten Körper  $\Omega$  betrachten, dann soll keine Wärme herein oder hinaus strömen. Das bedeutet, dass am Rande gilt

$$\nabla T(x, t) \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega \text{ und } t > 0.$$

Diese *Randwertbedingung* ist nach *Neumann* benannt worden. Man kann sie auch schreiben als

$$\frac{\partial}{\partial \nu} T(x, t) = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega \text{ und } t > 0.$$

Wenn man die Temperatur am Rande vorschreibt, heißt das eine *Dirichlet Randwertbedingung*.

Das Rand-Anfangswertproblem für die Temperaturverteilung eines isolierten Körpers ist das folgende Problem:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) - k \Delta T(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} T(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ T(x, 0) = T_0(x) & \text{für } x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.6)$$

### 2.2.1 Einfache Ergebnisse für die Wärmeleitungsgleichung auf beschränkte Gebiete

**Lemma 2.2** Sei  $T \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+)$  eine Lösung von (2.6), so gilt

$$\int_{\Omega} T(x, t) dx = \int_{\Omega} T(x, 0) dx.$$

**Bemerkung 2.2.1** Dies ist ein Erhaltungssatz.  $\frac{\partial}{\partial \nu} T(x, t) = 0$  bedeutet, dass keine Wärme herausfließt und die gesamte gespeicherte Wärme erhalten bleibt.

**Beweis.** Betrachtet man

$$I(t) = \int_{\Omega} T(x, t) dx,$$

so folgt

$$\begin{aligned} I'(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} T(x, t) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) dx = k \int_{\Omega} \Delta T(x, t) dx \\ &= k \int_{\partial \Omega} \nabla T(x, t) \cdot \nu d\sigma_x = k \int_{\partial \Omega} \frac{\partial}{\partial \nu} T(x, t) d\sigma_x = 0 \end{aligned}$$

und  $I(t)$  ist konstant. ■

Statt zu isolieren, kann man auch das Problem betrachten, bei dem die Temperatur am Rand festgehalten wird, sagen wir auf 0:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) - k \Delta T(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ T(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \partial \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ T(x, 0) = T_0(x) & \text{für } x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.7)$$

**Lemma 2.3** Sei  $T \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+)$  eine Lösung von (2.6) oder (2.7), so gilt

$$\int_{\Omega} T^2(x, t) dx \leq \int_{\Omega} T^2(x, 0) dx.$$

**Beweis.** Betrachtet man

$$E(t) = \int_{\Omega} T^2(x, t) dx,$$

so folgt

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} T^2(x, t) dx = 2 \int_{\Omega} T(x, t) \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) dx = 2k \int_{\Omega} T(x, t) \Delta T(x, t) dx \\ &= 2k \int_{\partial \Omega} T(x, t) \nabla T(x, t) \cdot \nu d\sigma_x - 2k \int_{\Omega} \nabla T(x, t) \cdot \nabla T(x, t) dx \\ &= -2k \int_{\Omega} |\nabla T(x, t)|^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

Man bemerke, dass

$$\int_{\partial \Omega} T(x, t) \nabla T(x, t) \cdot \nu d\sigma_x = \int_{\partial \Omega} T(x, t) \frac{\partial}{\partial \nu} T(x, t) d\sigma_x = 0$$

gilt sowohl für (2.6), als auch für (2.7). ■

**Korollar 2.4** Es gibt höchstens eine Lösung  $T \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+)$  für das Anfangs/Randwertproblem (2.6). Dies trifft auch zu für Problem (2.7).

**Beweis.** Wenn (2.6) (oder auch (2.7)) zwei verschiedene Lösungen  $T_1$  und  $T_2$  haben, betrachte man  $T = T_1 - T_2$ . Die Funktion  $T$  erfüllt das Anfangs/Randwertproblem mit  $T = 0$  am Anfang und am Rand. Aus Lemma 2.3 folgt

$$0 \leq \int_{\Omega} T^2(x, t) dx \leq \int_{\Omega} T^2(x, 0) dx = 0$$

und dann auch  $T(x, t) = 0$  für  $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ . Das heißt  $T_1 = T_2$ . ■

Die Wärmeleitungsgleichung ist verwandt mit der Gleichung für die Strömung durch ein poröses Medium. Weil der Druck als Funktion der Dichte schneller als linear zunimmt, nämlich  $P = u^m$ , wird die dazugehörige Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - k \Delta (u(x, t))^m = 0. \quad (2.8)$$

Man nennt (2.8) die *Poröse-Medien-Gleichung*.

## 2.3 Die Laplace Gleichung

Die Differentialgleichung

$$-k \Delta u(x) = f(x)$$

nennt man die *stationäre Wärmeleitungsgleichung* oder *Poisson Gleichung*. Für einen Potentialfluss hat man die Gleichung

$$\Delta u = 0. \quad (2.9)$$

Hier ist  $u$  das Potential und  $\vec{v} = \nabla u$  die Geschwindigkeit. Diese Gleichung beschreibt eine Strömung, bei der die Dichte/Wärme nicht zeitabhängig ist.

Die Differentialgleichung in (2.9) heißt die *Laplace Gleichung*. Eine Funktion  $u \in C^2(\Omega)$  die (2.9) erfüllt, nennt man *harmonisch* auf  $\Omega$ .

### 2.3.1 Ein Ergebnis für harmonische Funktionen

Aus der Vorlesung Funktionentheorie soll man sich an einige schöne Ergebnisse für harmonische Funktionen in 2 Dimensionen erinnern. Eine solche Eigenschaft von harmonischen Funktionen lässt sich auch in höheren Dimensionen zeigen:

**Proposition 2.5 (Mittelwertsatz für harmonische Funktionen)** *Wenn  $u \in C^2(\Omega)$  und  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$ , dann gilt für jede Kugel  $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < r\}$  mit  $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ , dass*

$$\int_{\partial B_r(x_0)} (u(x) - u(x_0)) d\sigma_x = 0. \quad (2.10)$$

**Bemerkung 2.5.1** *Benennt man den Flächeninhalt der Kugel mit Radius 1 mit*

$$\omega_n = \int_{\partial B_1(0)} 1 d\sigma_x, \quad (2.11)$$

*dann kann man (2.10) wie folgt schreiben:*

$$\int_{\partial B_r(x_0)} u(x) d\sigma_x = r^{n-1} \omega_n u(x_0).$$

*Anders gesagt,  $u(x_0)$  nimmt den Durchschnittswert auf dem Kugelrand  $\partial B_r(x_0)$  an. Eine Kugel mit Radius  $r$  hat dann den Flächeninhalt  $r^{n-1} \omega_n$ .*

**Bemerkung 2.5.2** Die Gleichung in (2.10) kann man auch wie folgt formulieren:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma_y. \quad (2.12)$$

Wenn (2.12) gilt für alle  $r \leq R$ , so gilt auch

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y) dy \quad (2.13)$$

für alle  $r \leq R$  und umgekehrt. Von (2.12) zu (2.13) kommt man durch  $\int_0^{r_1} r^{n-1} u(x) dr$  mit  $u$  aus (2.12) zu integrieren. Die umgekehrte Richtung folgt aus  $\partial_r (r^n u(x))$  mit  $u$  aus (2.13).

**Beweis.** Wir werden den Satz beweisen für  $x_0 = 0$ . Für  $n \geq 3$  und  $x \neq 0$  gilt folgendes

$$\Delta |x|^{2-n} = \nabla \cdot \nabla |x|^{2-n} = (2-n) \nabla \cdot \frac{x}{|x|^n} = (2-n) \left( \frac{n}{|x|^n} - n \frac{x \cdot x}{|x|^{n+2}} \right) = 0.$$

So finden wir mit partieller Integration einerseits

$$\begin{aligned} & \int_{B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla (|x|^{2-n} - r^{2-n}) \cdot \nabla u(x) dx = \\ &= \int_{\partial(B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0))} \frac{\partial}{\partial \nu} (|x|^{2-n} - r^{2-n}) u(x) d\sigma_x - \int_{B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \Delta (|x|^{2-n} - r^{2-n}) u(x) dx \\ &= (2-n) \left( r^{1-n} \int_{\partial B_r(0)} u(x) d\sigma_x - \varepsilon^{1-n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x) d\sigma_x \right), \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} & \int_{B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla (|x|^{2-n} - r^{2-n}) \cdot \nabla u(x) dx = \\ &= \int_{\partial(B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0))} (|x|^{2-n} - r^{2-n}) \frac{\partial}{\partial \nu} u(x) d\sigma_x - \int_{B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0)} (|x|^{2-n} - r^{2-n}) \Delta u(x) dx \\ &= \int_{\partial B_r(0)} 0 \frac{\partial}{\partial \nu} u(x) d\sigma_x - \varepsilon^{2-n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \vec{\nu} \cdot \nabla u(x) d\sigma_x. \end{aligned}$$

Zusammen folgt

$$r^{1-n} \int_{\partial B_r(0)} u(x) d\sigma_x - \varepsilon^{1-n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x) d\sigma_x = \frac{\varepsilon^{2-n}}{2-n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(x) d\sigma_x. \quad (2.14)$$

Wir betrachten die einzelnen Terme aus (2.14).

Weil  $\frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(x)$  beschränkt ist, sagen wir der Betrag ist kleiner  $c_1$ , so findet man

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(x) d\sigma_x \right| \leq c_1 \omega_n \varepsilon^{n-1}.$$

Also gilt

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\varepsilon^{2-n}}{2-n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(x) d\sigma_x = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{O}(\varepsilon) = 0.$$



Auch gilt, weil  $u \in C^1(\overline{B_r(0)})$ , dass

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} (u(x) - u(0)) \, d\sigma_x \right| &\leq \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |u(x) - u(0)| \, d\sigma_x \\ &\leq c_2 \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |x| \, d\sigma_x \leq c_2 \varepsilon \varepsilon^{n-1} \omega_n, \end{aligned}$$

und es folgt, dass

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{1-n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x) \, d\sigma_x = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \varepsilon^{1-n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(0) \, d\sigma_x + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) = \omega_n u(0).$$

Mit (2.14) findet man nun für  $\varepsilon \downarrow 0$ , dass

$$r^{1-n} \int_{\partial B_r(0)} u(x) \, d\sigma_x = \omega_n u(0),$$

und somit das gewünschte Ergebnis für  $n \geq 2$ . Für  $n = 2$  ist das Ergebnis in der Vorlesung Funktionentheorie bewiesen. Man kann auch den obigen Beweis wiederholen mit  $|x|^{2-n}$  ersetzt durch  $\ln|x|$ . ■

Aus Proposition 2.5 folgt dass, wenn man auf dem Rand  $\partial B_r(x_0)$  eine harmonische Funktion  $u$  ändert, auch  $u(x_0)$  sich ändert. Man findet sogar das folgende starke Ergebnis.

**Korollar 2.6** *Wenn  $u \in C^2(\Omega)$  harmonisch ist auf  $\Omega$  und ein Extremum innerhalb von  $\Omega$  hat, so ist  $u$  eine Konstante.*

**Beweis.** Nehmen wir an,  $u$  hat ein Maximum in  $x_0 \in \Omega$ . Weil  $\Omega$  offen ist, gibt es  $r_0 > 0$  mit  $B_{r_0}(x_0) \subset \Omega$  und für jedes  $r \in (0, r_0)$  gilt

$$u(x_0) = \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) d\sigma_x \leq \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x_0) d\sigma_x = u(x_0).$$

Diese Ungleichung ist streng und gibt einen Widerspruch, wenn  $u$  nicht identisch  $u(x_0)$  ist auf  $\partial B_r(x_0)$ . Es folgt also, dass  $u$  konstant ist auf  $B_{r_0}(x_0)$ . Man wiederholt diese Argumente für jedes  $x_1 \in B_{r_0}(x_0)$ ,  $x_2 \in B_{r_1}(x_1)$  usw.. Die Annahme, dass  $\Omega$  offen und zusammenhängend ist, erlaubt es uns ganz  $\Omega$  mit Kugeln zu überdecken. Auf jede Kugel in  $\Omega$  ist  $u$  konstant, also ist  $u$  auch konstant auf  $\Omega$ . ■

## 2.4 Die schwingende Saite

Nehmen wir zur Modellierung an, dass diese Saite aus einer Reihe kleiner Massen besteht, die elastisch verbunden sind. Wir nehmen an, dass die Spannung in der Saite konstant ist. Sei  $u(x, t)$  die vertikale Auslenkung an der Stelle  $x$  zur Zeit  $t$ . Betrachten wir das Teil zwischen  $x_1 - \frac{1}{2}\Delta x$  und  $x_1 + \frac{1}{2}\Delta x$ , dann wirken durch die Spannung  $S$  die folgenden Kräfte auf dieses Teil:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{rechts}} &= \frac{S}{\sqrt{1 + u_x(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x, t)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ u_x(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x, t) \end{pmatrix}, \\ \vec{F}_{\text{links}} &= \frac{-S}{\sqrt{1 + u_x(x_1 - \frac{1}{2}\Delta x, t)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ u_x(x_1 - \frac{1}{2}\Delta x, t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Addiert man diese beiden Kräfte und entwickelt man nach  $\Delta x$ , so folgt:

$$\vec{F}_{\text{rechts}} + \vec{F}_{\text{links}} = S \begin{pmatrix} \frac{\partial_x \frac{1}{\sqrt{1+u_x(x_1,t)^2}}}{\frac{\partial_x u_x(x_1,t)}{\sqrt{1+u_x(x_1,t)^2}}} \end{pmatrix} \Delta x + \mathcal{O}((\Delta x)^2).$$

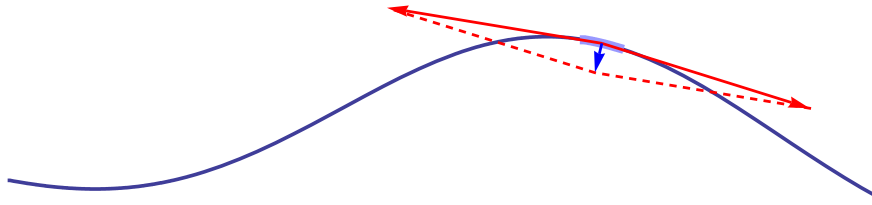


Abbildung 2.2: Kräfte wirkend in einer schwingenden Saite.

Wir vereinfachen die Herleitung durch die Annahme, dass diese Saite sich nur vertikal bewegt. Aus dem zweiten Gesetz von Newton<sup>1</sup>,  $F = \partial_t(mv)$ , folgt für das Teil der Saite zwischen  $x_1 - \frac{1}{2}\Delta x$  und  $x_1 + \frac{1}{2}\Delta x$  dass

$$\partial_x \left( \frac{S u_x(x_1, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2}} \right) \Delta x + \mathcal{O}((\Delta x)^2) = \partial_t \left( \int_{x_1 - \frac{1}{2}\Delta x}^{x_1 + \frac{1}{2}\Delta x} \sqrt{1 + u_x(x, t)^2} \rho \partial_t u(x, t) dx \right).$$

Dividiert man durch  $\Delta x$  und nimmt den Grenzwert für  $\Delta x \downarrow 0$ , dann folgt

$$\partial_x \left( \frac{S u_x(x_1, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2}} \right) = \partial_t \left( \sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2} \rho \partial_t u(x_1, t) \right).$$

Für  $u_x(x_1, t)^2 \ll 1$ , also für kleine Auslenkungen vernachlässigt man diesen Term und man findet mit  $c^2 = S/\rho$ , dass

$$u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = 0. \quad (2.15)$$

## 2.5 Die Wellengleichung

Wenn man eine kompressible Flüssigkeit oder Gas betrachtet, hat man erstens den Erhaltungssatz aus (2.4):

$$\partial_t \rho(x, t) + \nabla \cdot (\rho(x, t) \vec{v}(x, t)) = 0. \quad (2.16)$$

Wir betrachten nun den Fall, bei dem der Druck  $p$  proportional zur Dichte  $\rho$  ist:

$$p(x, t) = c \rho(x, t) \quad (2.17)$$

und verwenden wieder das zweite Gesetz von Newton:  $F = \frac{\partial}{\partial t}(mv)$  mit der Kraft  $F$  und dem Impuls  $mv$ . Die zugehörige Kräftegleichung, Impulsänderung von  $U = \text{Druck auf } \partial U$ , wird

$$\partial_t \int_U \rho(x, t) \vec{v}(x, t) dx = - \int_{\partial U} p(x, t) \vec{v} d\sigma_x, \quad (2.18)$$

<sup>1</sup>LEX II. MUTATIONEM MOTUS PROPORTIONALEM ESSE VI MOTRICI IMPRESSAE, ET FIERI SECUNDUM LINEAM RECTAM QUA VIS ILLA IMPRIMITUR.

Gesetz II. Die Änderung einer Bewegungsgröße ist der eingepprägten Bewegungskraft proportional und sie folgt der Geraden, entlang welcher diese Kraft eingepprägt wird.

für ein beliebiges Gebiet  $U \subset \Omega$ . Mit wohldefiniertem auswärtigem Normalenvektor folgt aus dieser letzten Gleichung:

$$\int_U \partial_t (\rho(x, t) \vec{v}(x, t)) dx = - \int_U \nabla p(x, t) dx.$$

Dann gilt auch

$$\partial_t (\rho(x, t) \vec{v}(x, t)) = -\nabla p(x, t). \quad (2.19)$$

Kombiniert man (2.19), (2.16) und (2.17), dann folgt

$$\Delta p = -\nabla \cdot \partial_t (\rho \vec{v}) = -\partial_t \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \partial_t \partial_t \rho = \frac{1}{c} \partial_t^2 p.$$

Die Differentialgleichung

$$\partial_t^2 p(t, x) - c \Delta p(t, x) = 0 \quad (2.20)$$

nennt man die *Wellengleichung*.

## 2.6 Die Membran

Ähnlich wie bei der Saite ist bei einer elastischen Membran die Kraft gleich der Spannung multipliziert mit der Krümmung. Nur ist nicht so ganz klar welche Krümmung wir nehmen müssen, denn Funktionen  $(x, y) \mapsto u(x, y)$  können sich in zwei Richtungen „krümmen“. Ein etwas einfacherer Ansatz ist folgender. Statt das Kräftegleichgewicht darzustellen, betrachten wir die Energie. Wir nehmen an, dass bei einer eingespannten Membran die Energie proportional zum Flächeninhalt ist.

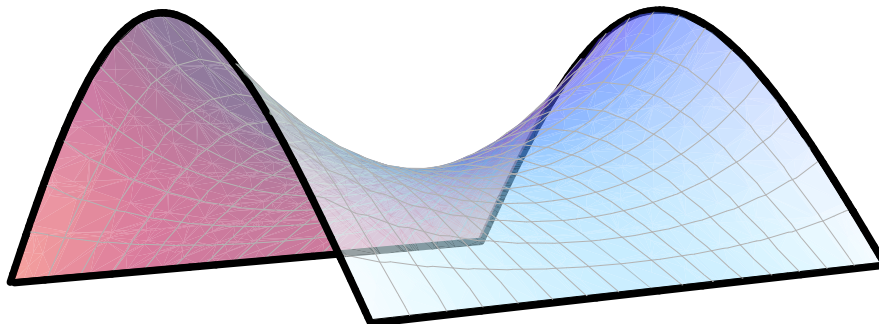


Abbildung 2.3: Ohne Kräfte von Aussen, hat eine eingespannte Membran oder Seifenblase die Form mit dem kleinsten Flächeninhalt.

Wenn wir die Membran parametrisieren durch

$$(x, y) \in \Omega \mapsto (x, y, u(x, y)) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

dann wird diese Energie als Funktional der Funktion  $u$  wie folgt:

$$E_{\text{elastisch}}(u) := \int_{\Omega} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} d(x, y). \quad (2.21)$$

Lässt man außerdem Kräfte zu, die mit Dichte  $f(x, y)$  an der Stelle  $(x, y)$  vertikal eine Kraft ausüben, hat man zusätzlich einen Potentialterm durch Kraft mal Weg:

$$E_{\text{potentiell}}(u) := \int_{\Omega} f u d(x, y).$$

Die totale Energie ist

$$E_{\text{total}}(u) := \int_{\Omega} \left( \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} - f u \right) d(x, y)$$

Das *Prinzip der kleinsten Wirkung*, auch *Hamiltonisches Prinzip*<sup>2</sup> genannt, wird angewendet. Dieses Prinzip sagt, dass die Funktion, die das passende physikalische Verhalten repräsentiert, dieses Funktional (Die Physiker würden sagen: diese Wirkung) minimiert. Mathematisch heißt das, dass das Funktional größer wird, wenn wir die Lösung  $u$  stören mit  $\varepsilon\phi$ :

$$E_{\text{total}}(u + \varepsilon\phi) \geq E_{\text{total}}(u) \text{ für alle } \varepsilon \in \mathbb{R} \text{ und } \phi \in C^1(\bar{\Omega}).$$

Wenn die Funktion  $\varepsilon \mapsto E_{\text{total}}(u + \varepsilon\phi)$  differenzierbar ist, dann gilt

$$\left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon} E_{\text{total}}(u + \varepsilon\phi) \right)_{|\varepsilon=0} = 0 \text{ für alle } \phi \in C^1(\bar{\Omega}). \quad (2.22)$$

Für  $u, \phi \in C^1(\bar{\Omega})$  ist (2.22) gleich

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\nabla u \cdot \nabla \phi}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} - f \phi \right) d(x, y) = 0.$$

Wenn außerdem gilt, dass  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ , dann können wir für  $\phi \in C_0^1(\bar{\Omega})$  partiell integrieren und es folgt

$$\int_{\Omega} \left( -\nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right) - f \right) \phi d(x, y) = 0.$$

Weil dieses Integral gleich 0 ist für alle solche  $\phi$ , findet man

$$-\nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right) = f. \quad (2.23)$$

Auch hier vereinfacht man für  $u_x^2 + u_y^2 \ll 1$  die Gleichung zu  $-\Delta u = f$ .

**Beispiel 2.7** Für konstante  $f \in [0, 2]$ ,  $\Omega = B_1(0)$  und  $h \geq 0$ , so dass  $f\sqrt{1+h^2} = 2$  gilt, kann man zeigen, dass

$$u(x, y) = \sqrt{1 + h^2 - x^2 - y^2} - h$$

die Differentialgleichung (2.23) löst. Für  $f > 2$  kann man zeigen, dass es keine Lösungen gibt! Es gibt auch Membrane, die sich nicht durch  $(x, y, u(x, y))$  parametrisieren lassen. Zum Beispiel kann man zeigen, dass

$$(\varphi, \theta) \mapsto \left( R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \theta + \sqrt{R^2 - 1} \right)$$

mit  $(\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, \arcsin(1/R)]$  eine Oberfläche parametrisiert, die man auch als Lösung zulassen sollte. Diese Lösung lässt sich nicht als Funktion von  $(x, y)$  schreiben.

Die Skizzen in Abbildung 2.5 lassen sich nicht durch  $(x, y, u(x, y))$  parametrisieren. Stattdessen kann man  $(r(\varphi, \theta) \cos \varphi \sin \theta, r(\varphi, \theta) \sin \varphi \sin \theta, r(\varphi, \theta) \cos \theta)$  versuchen. Man kann das Funktional nach  $r, \varphi$  und  $\theta$  umschreiben und kann sogar zeigen, dass die Bilder in 2.5 Lösungen einer Differentialgleichung wie in (2.23) erfüllen. Diese Lösungen sind jedoch keine Minima. Sie sind zwar stationäre Punkte für dieses Funktional, sind jedoch kein Minimum sondern ein Sattelpunkt.

Seifenblasen versuchen ihren Flächeninhalt zu minimieren und haben darum die in (2.21) genannte Energie. Sie haben aber nicht die oben genannte potentielle Energie. Sie minimieren (2.21) unter der Nebenbedingung, dass ihr Volumen konstant ist.

<sup>2</sup>Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865)

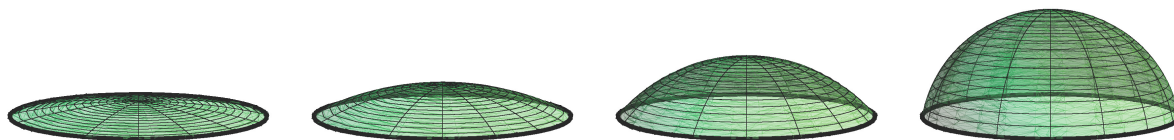


Abbildung 2.4: Einige Lösungen zu Beispiel 2.7 mit  $f$  gleich .4, .8, 1.2 und 1.4.



Abbildung 2.5: Einige Membrane, die sich nicht durch  $(x, y, u(x, y))$  parametrisieren lassen;  $f$  ist gleich 1.4, 1.2, .8 und .6. Wie man erwarten sollte: Kugeloberflächen.

## 2.7 Der schwingende Balken

Die Energie einer aufgespannten Saite zwischen  $(0, 0)$  und  $(\ell, 0)$  ist proportional zu der Zunahme der Länge durch die Auslenkung:

$$E_{\text{elastisch},S}(u) = s \int_0^\ell \left( \sqrt{1 + u_x^2} - 1 \right) dx \approx \int_0^\ell \frac{1}{2}s u_x^2 dx.$$

Wenn man statt einer Saite einen Balken betrachtet, der an beiden Enden in die vertikale Richtung zurückgehalten wird, wird die elastische Energie durch das Quadrat der Krümmung verursacht:

$$E_{\text{elastisch},B}(u) = \frac{1}{2}\sigma \int_0^\ell \frac{u_{xx}^2}{(1 + u_x^2)^3} dx \approx \int_0^\ell \frac{1}{2}\sigma u_{xx}^2 dx$$

für kleine Auslenkungen. Hat man zusätzlich eine Kraft, welche die Saite oder den Balken lokal seitwärts biegt, findet man

$$\begin{aligned} E_{\text{total},S}(u) &= \int_0^\ell \left( \frac{1}{2}s u_x^2 - f u \right) dx, \\ E_{\text{total},B}(u) &= \int_0^\ell \left( \frac{1}{2}\sigma u_{xx}^2 - f u \right) dx. \end{aligned}$$

Testen mit  $\varphi$  unter Anwendung des Hamiltonischen Prinzips und durch partielle Integration folgt

$$\begin{aligned} \text{für } S: & \quad -s u_{xx} = f, \\ \text{für } B: & \quad \sigma u_{xxxx} = f. \end{aligned}$$

Wenn wir das zeitabhängige Problem betrachten und die Kraftdichte durch die vertikale Beschleunigung verursacht wird, finden wir die linearisierte Gleichung eines schwingenden Balkens:

$$u_{tt}(x, t) - \sigma u_{xxxx}(x, t) = 0. \quad (2.24)$$



# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 3

### Erster Ordnung: Transportgleichungen



#### 3.1 Lineare und semilineare Transportgleichungen

##### 3.1.1 Mit konstanten Koeffizienten

Eine sehr einfache Differentialgleichung aus dieser Klasse ist

$$\vec{v} \cdot \nabla u(x) = f(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.1)$$

Hier sind  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  und  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben und  $u$  ist gesucht. Wir betrachten eine Kurve

$$x(t) = x_0 + t \vec{v}.$$

Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x(t)) = \vec{v} \cdot \nabla u(x(t))$$

und wenn wir uns auf eine solche Kurve beschränken, kann man (3.1) leicht lösen. Für  $U(t) := u(x(t))$  und  $F(t) := f(x(t))$  wird die Differentialgleichung

$$U'(t) = F(t).$$

Also hat man

$$U(t) = U(t_0) + \int_{t_0}^t F(s) ds.$$

Zurückgeführt auf (3.1) folgt

$$u(x_0 + t \vec{v}) = u(x_0) + \int_0^t f(x_0 + s \vec{v}) ds \quad (3.2)$$

und diese Funktion erfüllt die Differentialgleichung auf der Geraden durch  $x_0$  in der Richtung  $\vec{v}$ . Kennt man  $u(x)$  auf einer  $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$ , die mit jeder Geraden  $\{x_0 + t \vec{v}; t \in \mathbb{R}\}$  höchstens einen Punkt gemeinsam hat, dann hat man eine Lösung der Differentialgleichung auf  $\Omega = \{x_0 + t \vec{v}; x_0 \in M \text{ und } t \in \mathbb{R}\}$ .

Etwas haben wir nicht beachtet. Wenn  $x \in M \mapsto u(x)|_M$  nicht differenzierbar ist, kann man auch nicht erwarten, dass  $\nabla u$  für  $u$  in (3.2) definiert ist. Im schwachen Sinne ist es trotzdem eine Lösung.

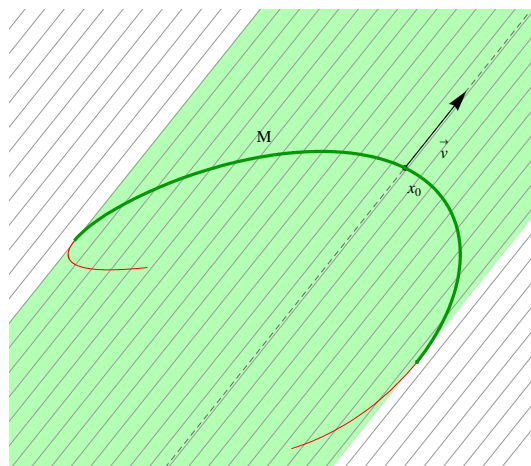


Abbildung 3.1: Die Werte, vorgeschrieben auf der grünen Kurve, geben eine Lösung auf dem hellgrünen Gebiet. Man kann  $u$  nicht beliebig vorschreiben auf der Fortsetzung (die rote Kurve).

**Beispiel 3.1** Wir suchen eine Lösung von

$$\begin{cases} u_x(x, y) + u_y(x, y) = 1, \\ u(x, 0) = x^2. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung kann man schreiben als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \nabla u(x, y) = 1.$$

Betrachtet man die Kurven

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und setzt man  $U(t) = u(x(t), y(t))$ , dann bekommt man die gewöhnliche Differentialgleichung

$$U'(t) = \partial_t(u(x(t), y(t))) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \nabla u(x(t), y(t)) = 1$$

mit der Anfangsbedingung  $U(0) = u(x(0), y(0)) = u(x_0, 0) = x_0^2$ . Man findet

$$U(t) = U(0) + t = x_0^2 + t.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} u(x(t), y(t)) &= U(t) = x_0^2 + t \\ x(t) &= x_0 + t \text{ und } y(t) = t. \end{aligned}$$

Es folgt  $u(x_0 + t, t) = x_0^2 + t$  und man findet eine Lösung auf ganz  $\mathbb{R}^2$ , nämlich

$$u(x, y) = (x - y)^2 + y.$$



### 3.1.2 Allgemeine (semi)lineare Transportgleichungen

Die Differentialgleichung, die gemeint ist, ist die folgende:

$$\vec{v}(x) \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.3)$$

Hier ist  $\vec{v}$  und  $f$  gegeben und wir nehmen an, dass  $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  und  $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ . Zusätzlich soll eine Randwertbedingung erfüllt sein:

$$u(x) = u_0(x) \text{ für } x \in M \quad (3.4)$$

mit  $M$  eine  $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Das Problem (3.3)-(3.4) löst man in zwei Schritten.

- Man löse erstens  $x'(t) = \vec{v}(x(t))$ . Wenn  $x \mapsto v(x)$  die Lipschitzbedingung erfüllt, gibt es für jedes  $x_0 \in M$  genau eine Lösung von dem Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = \vec{v}(x(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Dies folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf. Die Lösung  $t \mapsto x(t; x_0)$  ist stetig differenzierbar.

Die Lösungen von (3.5) nennt man die *charakteristischen Kurven* für (3.3). Aus der Eindeutigkeit und der Tatsache, dass  $x'(t) = \vec{v}(x(t))$  autonom ist, folgt:

**Lemma 3.2** Sei  $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ . Wenn zwei charakteristische Kurven  $t \mapsto x_a(t)$  und  $t \mapsto x_b(t)$  zu der (semi)linearen Transportgleichung (3.3) sich schneiden, sind sie „identisch“: es gibt  $T \in \mathbb{R}$  mit  $x_a(t) = x_b(t+T)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

- Sei  $t \mapsto x(t; x_0)$  eine Lösung von (3.5) und schreibe  $U(t) = u(x(t; x_0))$ . Definiere  $F(t, u) = f(x(t; x_0), u)$ . Wenn  $u$  (3.3) erfüllt, dann gilt

$$\begin{aligned} U'(t) &= x'(t; x_0) \cdot \nabla u(x(t; x_0)) = \vec{v}(x(t; x_0)) \cdot \nabla u(x(t; x_0)) = \\ &= f(x(t; x_0), u(x(t; x_0))) = F(t, U(t)). \end{aligned}$$

Wenn  $(x, u) \mapsto f(x, u)$  die Lipschitz-Bedingung erfüllt, erfüllt  $(t, u) \mapsto F(t, u)$  die Lipschitz-Bedingung. Auch hier kann man den Satz von Picard-Lindelöf anwenden um genau eine Lösung zu finden zu

$$\begin{cases} U'(t) = F(t, U(t)), \\ U(0) = u_0(x_0). \end{cases} \quad (3.6)$$

Schreibe für diese Lösung  $t \mapsto U(t; u_0(x_0))$ .

Für die Funktion  $u$ , die (3.3)-(3.4) lösen soll, findet man

$$u(x(t; x_0)) = U(t; u_0(x_0)).$$

Es ist noch nicht klar, ob  $u$  so tatsächlich wohldefiniert ist in einer Umgebung von  $M$ . Die Funktion könnte mehrfach oder sogar überhaupt nicht definiert sein. Wir brauchen dafür die folgende Bedingung.

**Bedingung 3.3** Sei  $M$  eine  $(n - 1)$ -dimensionale  $C^2$ -Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$  und sei  $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  ein Vektorfeld. Wir schreiben  $\vec{v}(x)$  für einen Normalenvektor an  $M$  in  $x \in M$ . Man sagt die Transversalitätsbedingung ist erfüllt, wenn

$$\vec{v}(x) \cdot \vec{v}(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in M. \quad (3.7)$$

**Proposition 3.4** Sei  $M$  eine  $(n - 1)$ -dimensionale  $C^2$ -Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$  und sei  $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^n)$  derart, dass die Transversalitätsbedingung (3.7) erfüllt ist. Sei außerdem  $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$  und  $u_0 \in C^1(M)$ . Dann gibt es lokal genau eine Lösung  $x \mapsto u(x)$  von

$$\begin{cases} \vec{v}(x) \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)), \\ u(x) = u_0(x) \text{ für } x \in M. \end{cases} \quad (3.8)$$

**Bemerkung 3.4.1** Die Lösungen lassen sich sogar definieren auf dem ganzen Gebiet, welches von diesen charakteristischen Kurven überdeckt wird. Bei diesen Kurven kann mehreres passieren: sie hauen ab nach  $\infty$ ; sie häufen sich in einem Punkt; sie kommen zurück zu der Mannigfaltigkeit und auch Kombinationen sind möglich. Genaueres erfahren Sie in einer Vorlesung Dynamische Systeme.

**Beweis.** Weil  $M$  eine  $(n - 1)$ -dimensionale  $C^2$ -Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$  ist, gibt es in der Nähe von  $x_M$  ein lokales Koordinatensystem für  $M$

$$\Psi : B_1(0) \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n.$$

Durch die Bedingung in (3.7) gibt

$$(y_1, \dots, y_{n-1}, t) \mapsto \Psi(y_1, \dots, y_{n-1}) + t v(\Psi(y_1, \dots, y_{n-1}))$$

ein lokales Koordinatensystem für  $\mathbb{R}^n$  in der Nähe von  $x_M$ . Nun betrachten wir

$$(y_1, \dots, y_{n-1}, t) \mapsto x(t; \Psi(y_1, \dots, y_{n-1})). \quad (3.9)$$

Weil

$$\begin{aligned} \nabla_y x(t; \Psi(y_1, \dots, y_{n-1}))|_{(0, \dots, 0, 0)} &= \nabla_y \Psi(y_1, \dots, y_{n-1})|_{(0, \dots, 0)}, \\ \frac{\partial}{\partial t} x(t; \Psi(y_1, \dots, y_{n-1}))|_{(0, \dots, 0, 0)} &= v(x_M), \end{aligned}$$

und diese Ableitungen stetig sind, ist auch (3.9) lokal ein wohldefiniertes Koordinatensystem. Anders gesagt, die Funktion  $u$  mit

$$u(x(t; \Psi(y))) := U(t; \Psi(y))$$

ist wohldefiniert. Wegen Lemma 3.2 und der Transversalitätsbedingung ist  $u$  sogar eindeutig definiert auf  $\Omega = \{x(t; \Psi(y)); t \in [0, T_{\Psi(y)}] \text{ und } y \in M\}$ . Hier ist  $T_{\Psi(y)} \in (0, \infty]$  entweder definiert durch das maximale Existenzintervall oder durch die Bedingung  $x(T_{\Psi(y)}; \Psi(y)) \in M$ .

Die Konstruktion zeigt uns, dass die Differentialgleichung erfüllt ist und weil jeder Punkt in einer kleinen Umgebung eindeutig über eine charakteristische Kurve zurück zu führen ist auf ein Anfangswertproblem für eine gewöhnliche Differentialgleichung, ist diese klassische Lösung lokal eindeutig. ■

**Beispiel 3.5** Finde die Lösung von

$$\begin{cases} u_x(x, y) + y u_y(x, y) = 2, \\ u(x, 1) = x + 1. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung kann man schreiben als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \cdot \nabla u(x, y) = 2.$$

Wir suchen erst die charakteristischen Kurven:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y(t) \end{pmatrix}$$

und finden

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t \\ y_0 e^t \end{pmatrix}.$$

Wählen wir die Konstanten derart, dass für  $t = 0$  genau  $(s, 1)$  erreicht wird, folgt

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

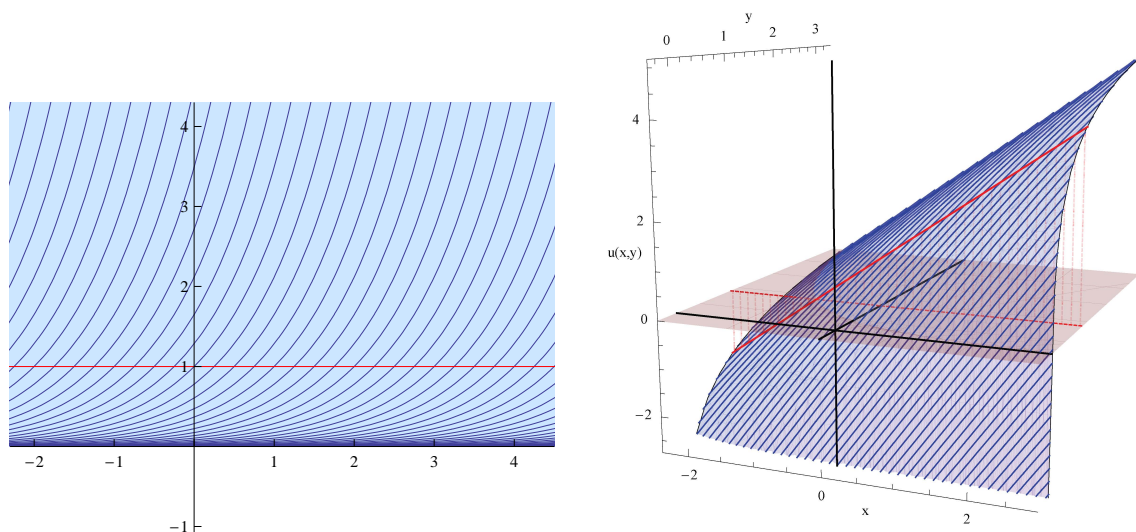


Abbildung 3.2: Skizzen zu Beispiel 3.5. Links die charakteristischen Kurven und rechts die Lösung. In rot ist die Bedingung  $u(x, 1) = x + 1$  dargestellt.

Nun setzen wir  $U(t) = u(x(t), y(t))$  und suchen die Lösungen von

$$\begin{cases} U'(t) = 2 \\ U(0) = s + 1 \end{cases}$$

nämlich  $U(t) = 2t + s + 1$ . Es folgt

$$u(s + t, e^t) = 2t + s + 1.$$

Gehen wir zurück zu den Standardkoordinaten folgt

$$u(x, y) = x + 1 + \ln y \text{ für } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

Für  $y \leq 0$  ist die Lösung nicht bestimmt.

## 3.2 Quasilineare Transportgleichungen

Gemeint sind Differentialgleichungen der Form

$$\vec{v}(x, u) \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)).$$

Wenn versucht wird, hier diese Methode mit den charakteristischen Kurven anzuwenden, bemerkt man, dass diese Kurven abhängig sind von der Lösung  $u$ . Das bedeutet, dass man das Finden dieser Kurven nicht mehr trennen kann von dem Lösen entlang dieser Kurven. Trotzdem gibt es die Möglichkeit beides gleichzeitig zu tun! Man betrachte das folgende System von  $n + 1$  Gleichungen

$$\begin{cases} x'(t) = \vec{v}(x(t), U(t)), \\ U'(t) = f(x(t), U(t)). \end{cases}$$

Hat man Anfangswertbedingungen  $u(x) = u_0(x)$  für  $x \in M$  eine  $(n - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, bekommt man für jedes  $x_0 \in M$  das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} x'(t) = \vec{v}(x(t), U(t)), \\ U'(t) = f(x(t), U(t)), \\ x(0) = x_0 \text{ und } U(0) = u_0(x_0). \end{cases}$$

Wenn  $\vec{v}$  und  $f$  differenzierbar sind, kann man den Satz von Picard-Lindelöf anwenden um eine eindeutige Lösung zu finden bei jedem  $x_0 \in M$ . Schreiben wir für die Lösung

$$t \mapsto \left( x(t; x_0, u_0), U(t; x_0, u_0) \right)$$

Wenn  $u(x)$  wohldefiniert ist durch

$$u(x(t; x_0, u_0)) := U(t; x_0, u_0),$$

das heißt, wenn es genau ein  $(t, x_0) \in \mathbb{R} \times M$  gibt mit  $x = x(t; x_0, u_0)$ , dann gilt

$$x'(t; x_0, u_0) \cdot \nabla u(x(t; x_0, u_0)) = U'(t; x_0, u_0) = f(x(t; x_0, u_0), U(t; x_0, u_0)),$$

und für solche  $x = x(t; x_0, u_0)$  folgt

$$v(x) \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)).$$

Auch hier gilt ein ähnliches Ergebnis wie in Proposition 3.4:

**Proposition 3.6** Sei  $M$  eine  $(n - 1)$ -dimensionale  $C^2$ -Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{R}^n)$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$  und  $u_0 \in C^1(M)$ . Wenn  $\vec{v}$  und  $u_0$  derart sind, dass

$$\vec{v}(x, u_0(x)) \cdot \vec{v}(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in M, \quad (3.10)$$

dann gibt es lokal genau eine Lösung  $x \mapsto u(x)$  von

$$\begin{cases} \vec{v}(x, u(x)) \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)), \\ u(x) = u_0(x) \text{ für } x \in M. \end{cases} \quad (3.11)$$

**Beweis.** Dieser ist ähnlich wie der für Proposition 3.4. ■

**Beispiel 3.7** Wir betrachten

$$\begin{cases} u(x, y) u_x(x, y) + u_y(x, y) = 0, \\ u(x, 0) = \frac{1}{2}\pi - \arctan x. \end{cases} \quad (3.12)$$

Um dieses System mit dem obigen Ansatz zu lösen, betrachtet man

$$\begin{cases} x'(t) = U(t) & \text{mit } x(0) = s, \\ y'(t) = 1 & \text{mit } y(0) = 0, \\ U'(t) = 0 & \text{mit } U(0) = \frac{1}{2}\pi - \arctan s. \end{cases}$$

Es folgt, wenn wir nach  $t$  integrieren und anschließend die Anfangswerte einsetzen, dass

$$\begin{aligned} U(t) &= U(0) = \frac{1}{2}\pi - \arctan s, \\ y(t) &= y(0) + t = t, \\ x(t) &= x(0) + \int_0^t U(\tau) d\tau = s + t \left( \frac{1}{2}\pi - \arctan s \right), \end{aligned}$$

und

$$U(t) = u(x(t), y(t)) = u\left(s + t \left( \frac{1}{2}\pi - \arctan s \right), t\right) = \frac{1}{2}\pi - \arctan s. \quad (3.13)$$

Wenn wir versuchen die Lösung in  $x$  und  $y$  darzustellen, dann folgt  $t = y$  und  $s$  sollen wir lösen aus

$$x = s + y \left( \frac{1}{2}\pi - \arctan s \right). \quad (3.14)$$

Das ist möglich wenn  $y \leq 1$ , denn dann ist die Funktion  $s \mapsto s - y \arctan s$  monoton. Für  $y > 1$  ist diese Funktion nicht monoton und ist (3.14) nicht eindeutig lösbar in  $s$ .

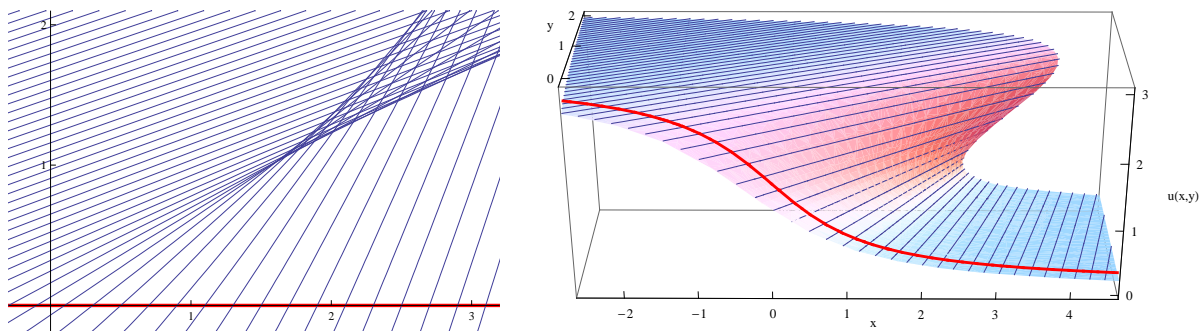


Abbildung 3.3: Skizzen zu Beispiel 3.7. Links die teilweise sich überschneidenden charakteristischen Kurven und rechts eine Skizze zu den Parametrisierungen  $(s, t) \mapsto (x(t; s), y(t; s), U(t; s))$ . In rot ist die Bedingung  $u(x, 0) = \frac{1}{2}\pi - \arctan x$  dargestellt. Die Mannigfaltigkeit  $(s, t) \mapsto (x(t; s), y(t; s), U(t; s))$  lässt sich nur bedingt als Graphen einer Funktion  $(x, y) \mapsto u(x, y)$  darstellen.

### 3.2.1 Stoßwellen

Bei quasilinearen Transportgleichungen gibt es also Probleme, weil charakteristische Kurven abhängen von der Lösung selber. Das bedeutet, dass die Differentialgleichung für die charakteristischen Kurven nicht autonom ist und die Lösungen zu den verschiedenen Anfangswerten sich schneiden können. Bei einer autonomen Differentialgleichung mit

Lipschitz-Bedingung ist solches nicht möglich. In diesem Abschnitt werden wir erklären, wie man bei einem solchen Fall vorgeht. Wir werden uns beschränken auf zwei Dimensionen und sogar auf Anfangswertprobleme der Gestalt:

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Kommen wir zurück auf Beispiel 3.7. Die Differentialgleichung  $u u_x + u_y = 0$  nennt man die *unviskose Burgersgleichung*<sup>1</sup>. Üblicherweise wird sie geschrieben als

$$u_t + \frac{1}{2} (u^2)_x = 0, \quad (3.16)$$

wobei  $t$  die Zeit- und  $x$  die Raumvariable ist. Sie wird als ein einfaches Modell für eine eindimensionale Strömung gesehen wie zum Beispiel für die Verkehrsdichte im Straßenverkehr. Im letzten Beispiel haben wir gesehen, dass sich dieses Modell an bestimmten Stellen nicht mehr eindeutig fortsetzen lässt. Man hat nun zwei Möglichkeiten: Entweder verwirft man dieses Modell als nicht tauglich oder man erweitert den Lösungsbegriff, das heißt, man lässt allgemeinere Lösungstypen zu.

Eine erste Möglichkeit, die man für (3.15) in Betracht zieht, ist wenn man statt (3.16) die *viskose Burgersgleichung* betrachtet:

$$u_t + \frac{1}{2} (u^2)_x = \varepsilon u_{xx}, \quad (3.17)$$

mit  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Diese Gleichung ist zweiter Ordnung und passt nicht in dieses Kapitel.

Eine zweite Möglichkeit wäre zum Beispiel distributionelle Lösungen zu betrachten. Wir passen die Definition von distributionelle Lösung an für beschränkte Funktionen und nehmen zusätzlich die Anfangswertbedingung mit herein:

**Definition 3.8** Wir nennen  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  eine *Integrallösung* von (3.15), wenn

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} (u \varphi_t + F(u) \varphi_x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty)). \quad (3.18)$$

Dieses Integral ist so gewählt, dass die Integralgleichung für klassische Lösungen erfüllt ist. Denn für  $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$  und  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$  gilt mit partieller Integration nach  $t$  beziehungsweise nach  $x$ , dass

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} u \varphi_t dx dt &= - \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx - \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} u_t \varphi dx dt, \\ \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} F(u) \varphi_x dx dt &= - \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} F(u)_x \varphi dx dt, \end{aligned}$$

und (3.15) liefert (3.18). Und umgekehrt, wenn  $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$  ist und (3.18) erfüllt, dann folgt sowohl die Differentialgleichung im klassischen Sinne als auch die Anfangswertbedingung.

Die Frage ist nun, ob diese Definition auch reicht, um eine Lösung auszuwählen die fast überall eindeutig definiert ist. Oder, anders gesagt, welche charakteristischen Kurven sollen wir in dem mehrfach belegten Gebiet folgen? Eine vernünftige Lösung scheint zu sein, dass wir annehmen, dass es eine trennende Kurve gibt. An dieser trennenden Kurve wird die Lösung einen Sprung haben.

<sup>1</sup>Johannes Martinus Burgers (1895–1981), Technische Hogeschool Delft, 1940.

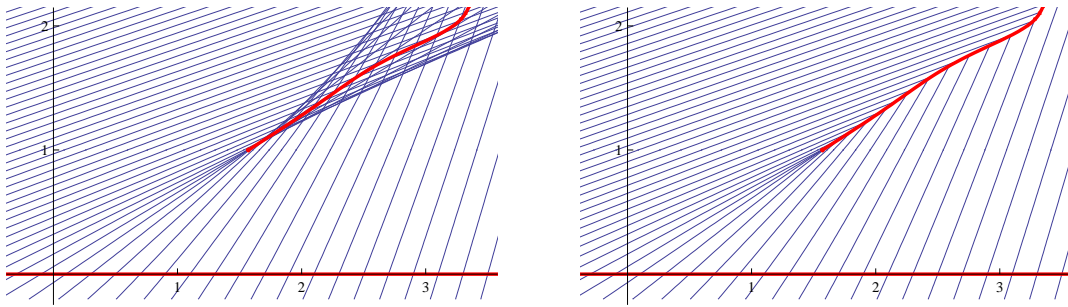


Abbildung 3.4: Welche Unstetigkeitskurve ist die richtige?

Nennen wir das Gebiet links von der Stoßwelle  $\Omega_\ell$  und rechts  $\Omega_r$ . Die Trennkurve nennen wir  $S$  und wir nehmen an, dass sie  $C^1$  ist. Links und rechts haben wir klassische Lösungen  $u_\ell$  und  $u_r$ . Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} (u \varphi_t + F(u) \varphi_x) dx dt = \\ &= \iint_{\Omega_\ell} (u_\ell \varphi_t + F(u_\ell) \varphi_x) dx dt + \iint_{\Omega_r} (u_r \varphi_t + F(u_r) \varphi_x) dx dt \\ &= \int_S \varphi \begin{pmatrix} F(u_\ell) \\ u_\ell \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu}_\ell d\sigma + \int_S \varphi \begin{pmatrix} F(u_r) \\ u_r \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu}_r d\sigma \\ &= \int_S \varphi \begin{pmatrix} F(u_\ell) - F(u_r) \\ u_\ell - u_r \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu}_\ell d\sigma. \end{aligned}$$

Weil dies für alle Testfunktionen  $\varphi$  gilt, folgt

$$\begin{pmatrix} F(u_\ell) - F(u_r) \\ u_\ell - u_r \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu}_\ell = 0.$$

Wir kennen so die Richtung von  $S$ . Eine Parametrisierung von  $S$  findet man durch

$$\vec{\gamma}'(\tau) = \begin{pmatrix} F(u_\ell(\vec{\gamma}(\tau))) - F(u_r(\vec{\gamma}(\tau))) \\ u_\ell(\vec{\gamma}(\tau)) - u_r(\vec{\gamma}(\tau)) \end{pmatrix} \quad \text{mit } \vec{\gamma}(0) = S_0, \quad (3.19)$$

wenn  $S_0$  der Anfang der Unstetigkeitskurve ist. Statt (3.19) kann man auch wie folgt parametrisieren

$$\begin{pmatrix} x'(\tau) \\ t'(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F(u_\ell(\vec{\gamma}(\tau))) - F(u_r(\vec{\gamma}(\tau)))}{u_\ell(\vec{\gamma}(\tau)) - u_r(\vec{\gamma}(\tau))} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \begin{pmatrix} x(0) \\ t(0) \end{pmatrix} = S_0 \quad (3.20)$$

und man findet die Kurve  $(x(t), t)$  durch

$$x'(t) = \frac{F(u_\ell(x(t), t)) - F(u_r(x(t), t))}{u_\ell(x(t), t) - u_r(x(t), t)}.$$

Die Geschwindigkeit der Unstetigkeit an der Stelle  $S = x(t)$  ist  $v_S = x'(t)$ . Anders gesagt, es gilt:

**Bedingung 3.9 (Die Rankine-Hugoniot-Bedingung)** <sup>2 3</sup>

$$(u_\ell - u_r) v_S = (F(u_\ell) - F(u_r)). \quad (3.21)$$

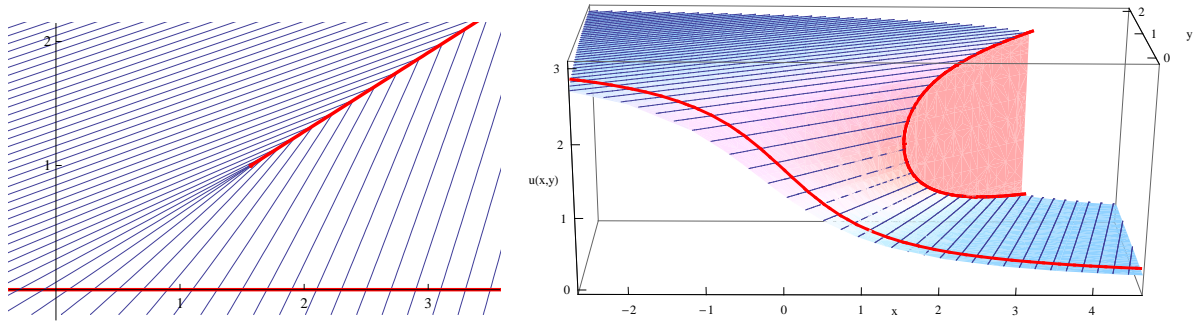


Abbildung 3.5: Die Unstetigkeitskurve, die die Rankine-Hugoniot-Bedingung erfüllt. Vergleichen Sie mit Abbildung 3.3

Diese Bedingung soll wie folgt gelesen werden. Das Teilgebiet, in dem die Unstetigkeitskurve liegen sollte, also das Gebiet in dem mehrere charakteristische Kurven aufeinander treffen, wird sowohl durch charakteristische Kurven von rechts als auch durch charakteristische Kurven von links beschrieben (und sogar auch noch durch charakteristische Kurven dazwischen). Man definiert in diesem Teilgebiet  $u_\ell$  durch die charakteristischen Kurven von links und  $u_r$  durch die charakteristischen Kurven von rechts. Auf dem Teilgebiet ist nun sowohl  $u_\ell$  als  $u_r$  definiert und so auch die Bedingung in (3.21).

**Beispiel 3.10** Wir kommen zurück auf Beispiel 3.7. Welche Unstetigkeitskurve erfüllt die Rankine-Hugoniot-Bedingung? Für das Randwertproblem (3.12) gilt  $F(u) = \frac{1}{2}u^2$  und folgt

$$v_S = \frac{\frac{1}{2}u_\ell^2 - \frac{1}{2}u_r^2}{u_\ell - u_r} = \frac{u_\ell + u_r}{2}.$$

Wir können zeigen, dass die Unstetigkeitskurve durch  $(x(t), t)$  mit  $x(t) = \frac{1}{2}\pi t$  parametrisiert wird. Denn an der Stelle  $(\frac{1}{2}\pi t, t)$  mit  $t > 1$  treffen sich die linke und die rechte charakteristische Kurve für

$$s_r = -s_\ell = \mu(t),$$

wobei  $\mu(t)$  die positive Lösung von  $\mu = t \arctan \mu$  sei. Es gilt, dass

$$x'(t) = \frac{u_\ell + u_r}{2} = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\arctan s_\ell + \arctan s_r) = \frac{1}{2}\pi.$$

Die passenden Bilder stehen in Abbildung 3.5. Die Kurve  $\{(x(t), t); t \geq 1\}$  ist eine Stoßwelle.

<sup>2</sup>Pierre-Henri Hugoniot (1851–1887), Französischer Mathematiker und Artillerieoffizier.

<sup>3</sup>William John Macquorn Rankine (1820–1872), Schottischer Physiker, Bauingenieur und Dichter:

The Three Foot Rule

When I was bound apprentice and learnt to use my hands  
Folk never talked of measures that came from foreign lands  
Now I'm a British Workman, too old to go to school  
So whether the chisel or file I hold, I'll stick to my three-foot rule.

Some talk of millimetres and some of kilograms  
And some of decilitres to measure beer and drams  
But I'm a British Workman, too old to go to school  
So by pounds I'll eat, and by quarts I'll drink, and I'll work by my three-foot rule.

A party of astronomers went measuring the Earth  
And 40 million metres they took to be its girth  
Five hundred million inches though, go through from pole to pole  
So let's stick to inches, feet and yards and the good old three-foot rule.

The great Egyptian pyramid's a thousand yards about  
And when the masons finished it they raised a joyful shout  
The chap that planned that building, I'm bound he was no fool  
And now 'tis proved beyond a doubt he used a three-foot rule.

Here's health to every learned man that goes by common sense  
And would not plague the workman by any vain pretence  
But as for those philanthropists who'd send us back to school  
Oh! bless their eyes, if ever they tries to put down the three-foot rule.

J. M. RANKINE



### 3.2.2 Verdünnungswellen

Lösungen, wie sie in Definition 3.8 definiert sind, erlauben es, Anfangswerte  $u_0$  in  $L^\infty(\mathbb{R})$  zu nehmen. Betrachten wir das Problem

$$\begin{cases} u(x, t) u_x(x, t) + u_t(x, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (3.22)$$

mit

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x \geq 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Die Lösung mit Hilfe der charakteristischen Kurven findet man durch

$$\begin{cases} x'(t) = U(t) & \text{mit } x(0) = s, \\ T'(t) = 1 & \text{mit } T(0) = 0, \\ U'(t) = 0 & \text{mit } U(0) = u_0(s), \end{cases}$$

nämlich

$$\begin{aligned} U(t) &= u_0(s), \\ x(t) &= s + t u_0(s), \\ T(t) &= t. \end{aligned}$$

Für  $s < 0$  finden wir  $x(t) = s$  und so folgt  $u(x, t) = 0$  für  $x < 0$  und  $t \geq 0$ . Für  $s \geq 0$  gilt  $x(t) = s + t$ , und es folgt  $u(x, t) = 1$  für  $x \geq t \geq 0$ . Also

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \text{ und } t \geq 0 \\ 1 & \text{für } x \geq t \text{ und } t \geq 0 \end{cases}$$

Diese Methode gibt uns aber keine Lösung auf der Menge

$$\{(x, t); t > 0 \text{ und } x \in [0, t)\}.$$

Mathematisch gibt es viele Möglichkeiten, dieses Dreieck zu füllen. Wir geben mal drei an:

$$1) \quad u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < t \text{ und } t \geq 0, \\ 1 & \text{für } x \geq t \text{ und } t \geq 0, \end{cases} \quad (3.24)$$

$$2) \quad u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \frac{1}{2}t \text{ und } t \geq 0, \\ 1 & \text{für } x \geq \frac{1}{2}t \text{ und } t \geq 0, \end{cases} \quad (3.25)$$

$$3) \quad u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \text{ und } t \geq 0, \\ x/t & \text{für } x \in (0, t) \text{ und } t \geq 0 \\ 1 & \text{für } x \geq t \text{ und } t \geq 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

Keine dieser drei Funktionen ist eine klassische Lösung. Die erste hat ein Problem auf der Geraden  $x = t$ ; die zweite auf  $x = \frac{1}{2}t$ ; die dritte sowohl auf  $x = 0$  als auch auf  $x = t$ . Die Funktionen in 2) und 3) sind beide Integrallösungen. Welche würde physikalisch passen?

In der Physik gibt es die sogenannte Entropie-Bedingung. Grob kann man diese Bedingung wie folgt beschreiben: Man meide Unstetigkeitskurven, wenn sie nicht notwendig sind. Wenn die Geschwindigkeit  $x'(t)$  einer charakteristischen Kurve  $(x(t), t)$  rechts von einer Unstetigkeit größer wäre als die Geschwindigkeit einer charakteristischen Kurve links von dieser Unstetigkeit bräuchte man keine Unstetigkeit, sondern hätte es durch eine Funktion, wie in (3.26), lösen können. Wenn für

$$u_t + F(u)_x = 0$$

die Funktion  $F(u)_x$  eine Unstetigkeit in  $S$  hat, sagt man:

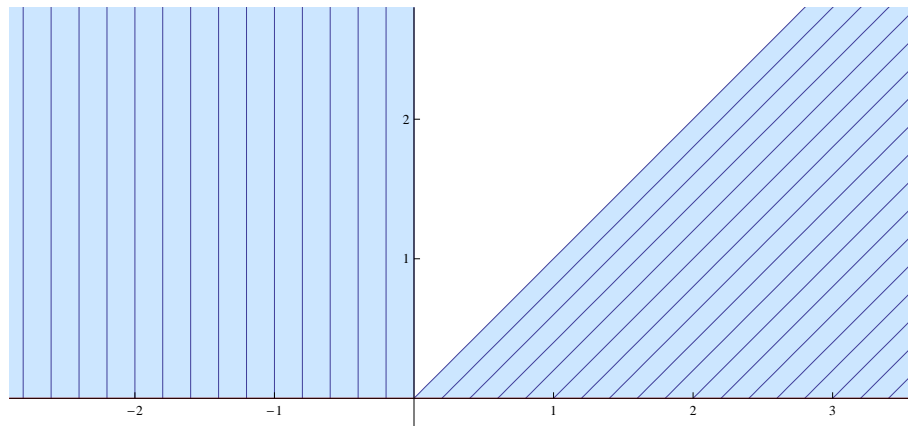


Abbildung 3.6: Wie füllt man das leere Dreieck?

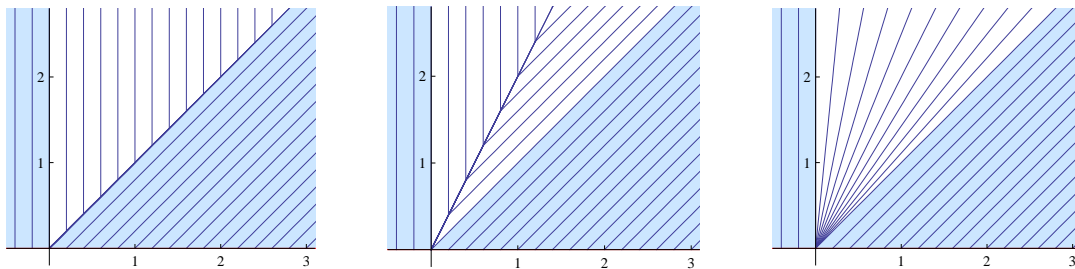


Abbildung 3.7: Einige Möglichkeiten: die in der Mitte und rechts wären mathematisch vertretbar; physikalisch sinnvoll ist wegen der Entropie-Bedingung nur die rechte Lösung.

**Bedingung 3.11** Die Entropie-Bedingung ist erfüllt für eine Lösung von (3.15), wenn an einer Unstetigkeitsstelle  $S$  gilt

$$F'(u_\ell) > F'(u_r). \quad (3.27)$$

Wenn  $S = \{(\sigma(t), t) ; t \in (t_1, t_2)\}$ , dann ist mit (3.27) gemeint, dass

$$F'(\lim_{x \uparrow \sigma(t)} u(x, t)) > F'(\lim_{x \downarrow \sigma(t)} u(x, t)) \text{ für alle } t \in (t_1, t_2).$$

Die Geschwindigkeit der charakteristischen Kurve an der Stelle  $(x, t)$  ist übrigens  $F'(u(x, t))$ , denn wenn  $(x(\tau), t(\tau))$  eine charakteristische Kurve ist, gilt

$$\begin{pmatrix} x'(\tau) \\ t'(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F'(u(x(\tau), t(\tau))) \\ 1 \end{pmatrix}$$

und es folgt  $t = \tau$  und  $x'(\tau) = F'(u(x(\tau), \tau))$ .

Für eine streng konvexe Funktion  $F$  ist  $F'$  eine streng wachsende Funktion und bedeutet (3.27)  $u_\ell > u_r$ . Man sieht nun auch sofort, dass diese Entropie-Bedingung für einen Unterschied sorgt bezüglich der „Zeit“-Richtung. Bei charakteristischen Kurven war es nicht wesentlich in welche Richtung man entlang geht; die Rankine-Hugoniot und die Entropie-Bedingung sind richtungsabhängig.

**Definition 3.12**  $u$  ist eine physikalische relevante Lösung von (3.15),

- wenn  $u$  konstant ist entlang charakteristischen Kurven mit Ausnahme von Unstetigkeitskurve(n)  $S$ , und

- wenn es eine Unstetigkeitskurve  $S$  gibt, ist da die Rankine-Hugoniot Bedingung und die Entropie-Bedingung erfüllt.

**Bemerkung 3.12.1** Diese Bedingungen liefern das folgende:

- Wenn die anfänglichen charakteristischen Kurven, ein Teilgebiet eindeutig beschreiben, ist die Lösung konstant entlang jeder dieser Kurven.
- Wenn ein Teilgebiet mehrfach durch charakteristischen Kurven beschrieben wird, ist dieses Teilgebiet derart aufgeteilt, dass bei der Grenzkurve die Rankine-Hugoniot-Bedingung und die Entropie-Bedingung erfüllt sind. Das heißt, die Grenzkurve wird bestimmt von (3.21) und man darf bei dieser Kurve nur eine Unstetigkeit in der von (3.27) festgelegter Richtung haben. Unstetigkeitskurven, die diese Bedingungen erfüllen, nennt man Stoßwellen<sup>4</sup>
- Wenn ein Teilgebiet nicht durch die anfänglichen charakteristischen Kurven beschrieben wird, sind da neue charakteristischen Kurven zu definieren. Die Entropie-Bedingung erlaubt nur Unstetigkeiten in eine Richtung und verhindert so das Entstehen von Unstetigkeitskurven am unteren Rand dieses Teilgebiets. Das bedeutet, dass man an der Stelle, wo dieses Gebiet sich auftut, nur eine stetige Verdünnungswelle<sup>5</sup> als Lösung zulassen kann.

**Bemerkung 3.12.2** Man kann zeigen, dass die Rankine-Hugoniot-Bedingung und die Entropie-Bedingung derartig sind, dass die die Lösungen von (3.15) in der Abhängigkeit vom Anfangswert robust sind. Die genaue Beschreibung in welchem Sinne geben wir hier nicht.

Die physikalische relevante Lösung zu (3.22)-(3.23) hat eine Verdünnungswelle. Diese Lösung ist die dritte Möglichkeit (3.26). Eine Skizze findet man in Abbildung 3.8.

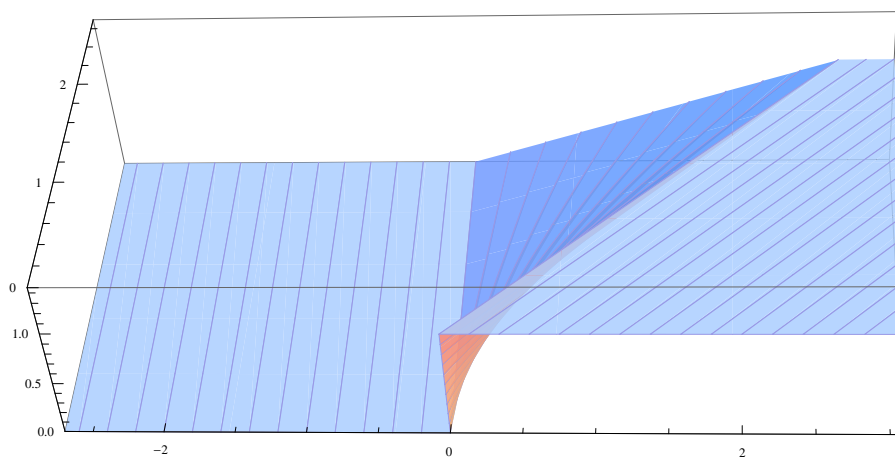


Abbildung 3.8: Eine physikalisch relevante Lösung zu (3.22)-(3.23).

<sup>4</sup>Shock wave.

<sup>5</sup>Als Übersetzung von rarefaction wave.



# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 4



## Klassifizierung zweiter Ordnung

### 4.1 Die einfachsten Fälle als Begründung

Wir betrachten in diesem Abschnitt partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei Dimensionen und mit konstanten Koeffizienten. Das heißt, diese Differentialgleichungen sind wie folgt:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = \varphi, \quad (4.1)$$

mit  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ . Eine solche Differentialgleichung ist rein zweiter Ordnung, wenn  $d = e = f = 0$ :

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = \varphi \quad (4.2)$$

Wenn wir  $\partial_x$  durch  $\xi$  und  $\partial_y$  durch  $\eta$  in den zugehörigen Differentialoperator ersetzen, finden wir das *Symbol der Differentialgleichung*.

Für (4.1) beziehungsweise (4.2) wird dieses Symbol

$$\begin{aligned} L(\xi, \eta) &= a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 + d\xi + e\eta + f, \\ L_0(\xi, \eta) &= a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (4.1,4.2) kann man schreiben als

$$\begin{aligned} L(\partial_x, \partial_y) u &= \varphi, \\ L_0(\partial_x, \partial_y) u &= \varphi. \end{aligned}$$

Wenn  $a \neq 0$  gilt, kann man ohne Verlust der Allgemeinheit  $a = 1$  setzen in (4.1). Auf den Fall, dass  $a = 0$ , kommen wir noch zurück.

Für  $a = 1$  versuchen wir das Symbol in Lineartermen zu zerlegen:

$$\begin{aligned} L(\xi, \eta) &= (\xi - \tau_1\eta + \sigma_1)(\xi - \tau_2\eta + \sigma_2), \\ L_0(\xi, \eta) &= (\xi - \tau_1\eta)(\xi - \tau_2\eta). \end{aligned}$$

Die Idee, die dahinter steckt, ist, dass man dann vielleicht die Differentialgleichung als zwei Gleichungen erster Ordnung lösen kann:

$$L_0(\partial_x, \partial_y) u = (\partial_x - \tau_1\partial_y)(\partial_x - \tau_2\partial_y) u.$$

Wenn es eine solche Zerlegung gibt, dann sind  $\tau_1, \tau_2$  die Lösungen der algebraischen Gleichung<sup>1</sup>

$$\tau^2 + 2b\tau + c = 0. \quad (4.3)$$

Es gibt grundsätzlich drei Möglichkeiten:

- I. wenn  $b^2 > c$  folgt  $\tau_1 \neq \tau_2 \in \mathbb{R}$ .
- II. wenn  $b^2 = c$  folgt  $\tau_1 = \tau_2 \in \mathbb{R}$ .
- III. wenn  $b^2 < c$  folgt  $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  und  $\tau_1 = \overline{\tau_2}$ .

Dies sieht man sofort, indem man (4.3) löst:

$$\tau_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - c} \text{ oder } \tau_{1,2} = -b \pm i\sqrt{c - b^2}.$$

Wir werden nun diese drei Fälle detaillierter anschauen.

**zu I.** Wenn  $\tau_1 \neq \tau_2 \in \mathbb{R}$  folgt

$$(\xi - \tau_1\eta)(\xi - \tau_2\eta) = \xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2.$$

Man kann (4.2) (mit  $a = 1$ ) umschreiben als

$$\begin{cases} (\partial_x - \tau_2\partial_y)v = \varphi, \\ (\partial_x - \tau_1\partial_y)u = v, \end{cases} \quad (4.4)$$

ein System erster Ordnung. Dieses System kann man in zwei Schritten als zwei Transportgleichungen lösen.

Wenn  $\tau_1 \neq \tau_2$  kann man für (4.1)  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$  finden derart, dass

$$(\xi - \tau_1\eta + \sigma_1)(\xi - \tau_2\eta + \sigma_2) = \xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 + d\xi + e\eta + \sigma_1\sigma_2.$$

Dann kann man (4.1) (mit  $a = 1$ ) umschreiben als

$$\begin{pmatrix} \partial_x - \tau_1\partial_y & 0 \\ 0 & \partial_x - \tau_2\partial_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ f - \sigma_1\sigma_2 & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Dieses System lässt sich nicht mehr lösen als zwei aufeinanderfolgende Transportgleichungen aber man kann es trotzdem mit ähnlichen Methoden angehen.

Wir kommen nun zurück auf  $a = 0$ . Für  $a = 0$  (und  $b \neq 0$ ) gilt ähnliches wie soeben beschrieben, denn es gilt

$$0\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 = (2b\xi + c\eta)\eta.$$

Man kommt wie vorher beschrieben weiter, wenn man nun die Rollen von  $x$  und  $y$  vertauscht. Wenn  $a = b = 0$  und  $c \neq 0$  ist man in der nächsten Kategorie.

<sup>1</sup>Man kann  $L_0(\xi, \eta)$  in ein Produkt von Lineartermen  $(\xi - \tau_1\eta)(\xi - \tau_2\eta)$  zerlegen, wenn  $L_0(\xi, \eta) = 0$  für  $\xi = \tau_i\eta$ . Also findet man diese  $\tau_i$  als Nullstellen von  $\tau \mapsto L_0(\tau\eta, \eta) = (\tau^2 + 2b\tau + c)\eta^2$ .

**zu II.** Wenn  $\tau_1 = \tau_2$  funktioniert diese Aufspaltung nicht unbedingt. Für (4.2) findet man  $(\partial_x - \tau_1 \partial_y)^2 u = \varphi$  und dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung. Für (4.1) findet man

$$(\partial_x - \tau_1 \partial_y + \sigma_1)^2 u + (\lambda \partial_x - \mu \partial_y + \rho) u = \varphi.$$

Wenn  $\mu \neq \lambda \tau_1$  gilt, kann man diese letzte Differentialgleichung nicht als System erster Ordnung schreiben. Ein typisches Beispiel einer solchen Differentialgleichung ist

$$u_{xx} - u_y = \varphi.$$

**zu III.** Wenn die Wurzeln von (4.3) nicht reell sind, scheint es zuerst hoffnungslos diese Differentialgleichung zu spalten, denn wie soll man mit komplexen Termen umgehen? Ein typisches Beispiel ist

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (4.6)$$

Das zugehörige Symbol ist  $L(\xi, \eta) = \xi^2 + \eta^2 = (\xi - i\eta)(\xi + i\eta)$ . Lässt man komplexe Zahlen zu, dann kann man (4.6) mit  $\varphi = 0$  auch schreiben als

$$(\partial_x - i\partial_y)(\partial_x + i\partial_y)u = 0$$

und man findet die folgenden Lösungen

$$u(x, y) = u_1(x + iy) + u_2(x - iy), \quad (4.7)$$

wobei  $u_1$  und  $u_2$  beliebige differenzierbare Funktionen sind. Für komplexe Funktionen macht dies Sinn<sup>2</sup>.

## 4.2 Standardbeispiele zu diesen Fällen

Wir werden einige typische Gleichungen zu diesen unterschiedlichen Fällen betrachten.

### 4.2.1 Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 - \partial_y^2$

Betrachten wir  $u_{xx} - u_{yy} = f$ . Diese Gleichung kann man auch schreiben als

$$(\partial_x + \partial_y)(\partial_x - \partial_y)u = f \quad (4.8)$$

und man könnte sie lösen, indem man nacheinander den charakteristischen Kurven in Richtung  $(1, -1)$  und in Richtung  $(1, 1)$  folgt. In dem neuen Koordinatensystem

$$x = s + t \text{ und } y = s - t$$

---

<sup>2</sup>Eine Funktion, die (4.6) erfüllt, nennt man harmonisch. In einer Vorlesung Funktionentheorie lernt man, dass der Realteil einer analytischen Funktion harmonisch ist. Das gleiche gilt für den Realteil einer anti-analytischen Funktion. Eine Funktion  $f$  ist analytisch auf  $\Omega_{\mathbb{C}} = \{x + iy \in \mathbb{C}; (x, y) \in \Omega\}$ , wenn  $f$  komplex differenzierbar ist auf  $\Omega_{\mathbb{C}}$ . Eine Funktion  $f$  ist anti-analytisch, wenn  $\bar{f}$  komplex differenzierbar ist. Man findet auch so Lösungen wie in (4.7), nämlich durch

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy)) + \operatorname{Re}(g(x - iy)),$$

wobei  $f$  und  $g$  (komplex) differenzierbare Funktionen sind.

wird dies etwas leichter. Setzen wir  $U(s, t) = u(s + t, s - t)$  und  $F(s, t) = f(s + t, s - t)$ , so ändert sich die Differentialgleichung (4.8) über

$$(\partial_x^2 - \partial_y^2) U \left( \frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \right) = \left( \frac{1}{4}U_{ss} + \frac{1}{2}U_{st} + \frac{1}{4}U_{tt} \right) - \left( \frac{1}{4}U_{ss} - \frac{1}{2}U_{st} + \frac{1}{4}U_{tt} \right)$$

in

$$\partial_s \partial_t U = F. \quad (4.9)$$

Welche Art von Randwertbedingungen würde eindeutig eine Lösung bestimmen?

Betrachten wir den Fall  $\Omega = B_1(0)$ . Für (4.9) finden wir

$$\partial_t U(s, t) = \partial_t U(\psi(t), t) + \int_{\psi(t)}^s F(\sigma, t) d\sigma \quad (4.10)$$

und als nächstes

$$U(s, t) = U(s, \varphi(s)) + \int_{\varphi(s)}^t \partial_t U(\psi(\tau), \tau) d\tau + \int_{\varphi(s)}^t \int_{\psi(\tau)}^s F(\sigma, \tau) d\sigma d\tau. \quad (4.11)$$

Hier beschreibt  $t = \varphi(s)$  einen Randteil für  $t$  als Funktion von  $s$  und  $s = \psi(t)$  beschreibt einen Randteil für  $s$  als Funktion von  $t$ . Um die Integrale in (4.11) durch eine Bedingung am Rande festzulegen, hat man die Möglichkeit „rechts unten“ und „links oben“; ähnlich für (4.10) wird es „links unten“ oder „rechts oben“. Betrachten wir den Fall „unten“, dann hat man  $\varphi(s) = -\sqrt{\frac{1}{2} - s^2}$  und  $\psi(t) = -\sqrt{\frac{1}{2} - t^2}$ . Für ein Paar  $(x, y)$  werden die Integralkurven in Abbildung 4.1 skizziert. Schreiben wir  $\Gamma_{[\alpha, \beta]} = \{(\cos \varphi, \sin \varphi) ; \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$ .

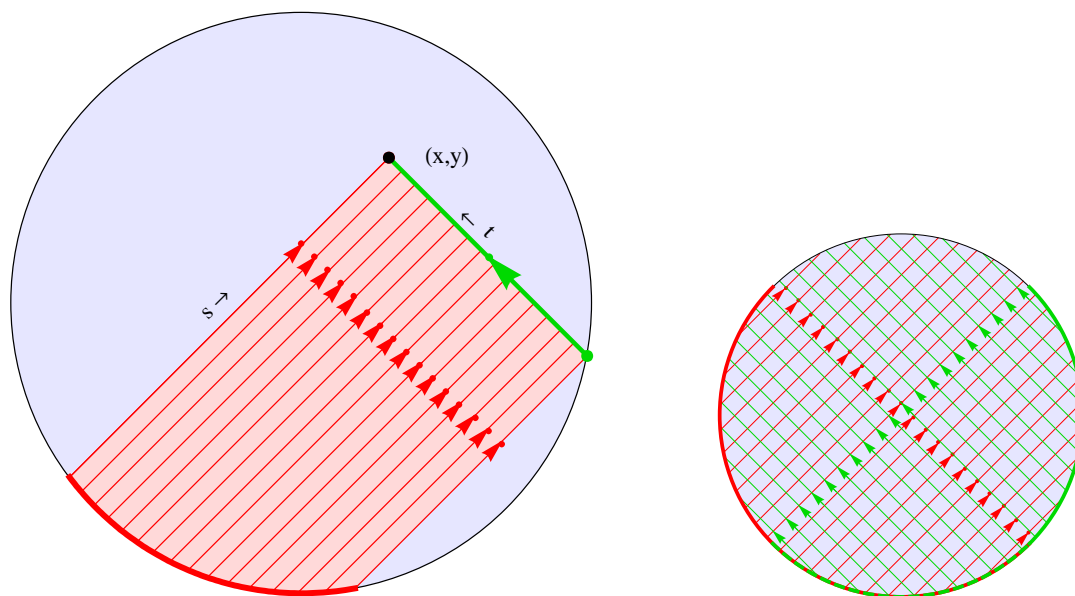


Abbildung 4.1: Links: Für  $(x, y)$  braucht man  $u_t$  auf dem roten Randteil und  $u$  im grünen Randpunkt. Rechts: Um  $u$  auf der ganzen Kreisscheibe festzulegen, braucht man  $u_t$  auf dem roten Randteil und  $u$  auf dem grünen Randteil.

Wenn man  $u$  auf der ganzen Kreisscheibe festlegen will, braucht man

$$\partial_t U \text{ auf } \Gamma_{\left[\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right]} \text{ und } U \text{ auf } \Gamma_{\left[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi\right]}.$$



Aus Symmetriegründen, man vertausche  $s$  und  $t$ , passt auch

$$U \text{ auf } \Gamma_{[\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi]} \text{ und } \partial_s U \text{ auf } \Gamma_{[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]}.$$

Auf einem Rand, auf dem  $U$  und  $\partial_\nu U$  bekannt sind und wobei  $\nu$  eine nicht-tangentiale Richtung hat, und wenn  $U \in C^1$  gilt, kennt man alle Richtungsableitungen. So kann man sich sogar überzeugen, dass auch folgendes passt:

$$U \text{ auf } \Gamma_{[\frac{3}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi]} \text{ und } \partial_\nu U \text{ auf } \Gamma_{[\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi]}.$$

Wenn man sich dieses Beispiel genau anschaut, kann man folgendes Ergebnis bekommen.

**Proposition 4.1** Sei  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^2$  mit  $\partial\Omega \in C^1$ . Man setzt

$$\Gamma_R = \{x \in \partial\Omega; \text{ es gibt zwei aufwärts gerichtete charakteristische Kurven in } x\},$$

$$\Gamma_G = \{x \in \partial\Omega; \text{ es gibt nur eine aufwärts gerichtete charakteristische Kurve in } x\}.$$

Wenn die Randwerte es erlauben (stetig sind und mögliche Kompatibilitätsbedingungen erfüllen) kann man mit Hilfe der charakteristische Kurven, eine (distributionelle) Lösung in  $C(\bar{\Omega})$  von

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f & \text{in } \Omega, \\ u = u_0 & \text{auf } \Gamma_R \cup \Gamma_G, \\ \partial_\nu u = v_0 & \text{auf } \Gamma_R, \end{cases}$$

konstruieren. Wenn die Randwerte zweimal differenzierbar sind und mögliche zusätzliche Kompatibilitätsbedingungen erfüllen, ist diese Funktion  $u$  sogar in  $C^2(\bar{\Omega})$ .

**Bemerkung 4.1.1** Kompatibilitätsbedingungen müssen erfüllt sein, wenn  $\Gamma_R$  oder  $\Gamma_G$  nicht zusammenhängend sind oder tangential an charakteristischen Kurven verlaufen.

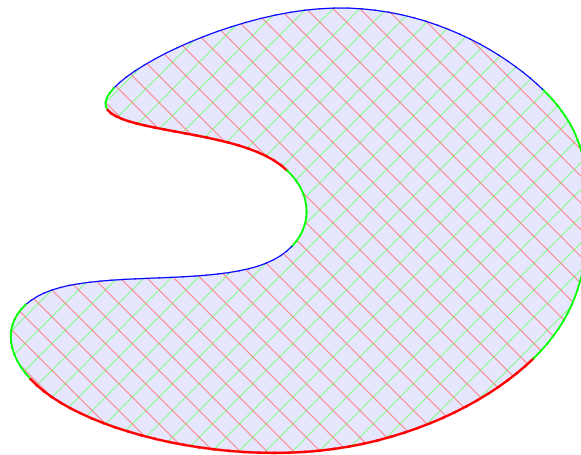


Abbildung 4.2: Auf dem roten Rand  $\Gamma_R$  gibt man  $u$  und  $\partial_\nu u$  an, auf dem grünen  $\Gamma_G$  nur  $u$  und auf dem blauen nichts, und man hat höchstens eine Lösung.

**Beweis.** Die Konstruktion einer Lösung entlang charakteristischen Kurven liefert die Existenz einer schwachen Lösung. Ist diese Lösung eindeutig? Ja, ein direkter Beweis ist sehr geometrisch. Er geht zurück auf  $U_{st} = F$ . Man sucht eine Zick-Zack-Kurve, entlang welcher  $s$  konstant oder  $t$  konstant ist und die auf dem roten Rand anfängt.

Und wieso liegt die Lösung in  $C^2(\bar{\Omega})$ , wenn die Randwerte es erlauben? Erstens soll  $u_0$  und  $v_0$  genügend glatt sein. Zweitens, wie man in Abbildung 4.2 sehen kann, ist  $\Gamma_R$  und auch  $\Gamma_G$  nicht unbedingt zusammenhängend. Um eine  $C^2(\bar{\Omega})$ -Lösung zu finden, soll jeder „Sprung“ von einer Komponente  $\Gamma_R \cup \Gamma_G$  zu  $\partial\Gamma_R$  und  $\partial\Gamma_G$  kompatibel sein. ■

### 4.2.2 Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 + \partial_y^2$

Statt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  werden wir wechseln zu  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Betrachten wir also die partielle Differentialgleichung  $u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = f$ . Wie nehmen auch ein spezielles Gebiet, nämlich die Einheitskugel  $B_1(0)$ . Das heißt, wir betrachten

$$\Delta u = f \text{ auf } B_1(0).$$

Wir betrachten eine besondere Funktion auf  $\overline{B_1(0)} \times \overline{B_1(0)}$ :

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left( \log \left( \left\| x \|y\| - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \right) - \log (\|x - y\|^2) \right). \quad (4.12)$$

Weil

$$\begin{aligned} \left\| x \|y\| - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 &= \langle x \|y\|, x \|y\| \rangle - 2 \left\langle x \|y\|, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle + \left\langle \frac{y}{\|y\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = \\ &= \|y\|^2 \|x\|^2 - 2 \langle x, y \rangle + 1 \end{aligned}$$

sieht man, dass  $G(x, y) = G(y, x)$ . Außerdem findet man, dass  $G$  unendlich oft differenzierbar ist sowohl in  $x$  als auch in  $y$ , wenn  $x \notin \{y, y/\|y\|^2\}$ . Auf  $\overline{B_1(0)} \times \overline{B_1(0)}$  trifft dies zu, wenn  $x \neq y$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \Delta_x \log (\|x - y\|^2) &= \nabla_x \cdot \nabla_x \log (\|x - y\|^2) = \\ &= \nabla_x \cdot \frac{2(x - y)}{\|x - y\|^2} = 2 \frac{2}{\|x - y\|^2} - \frac{4(x - y) \cdot (x - y)}{\|x - y\|^4} = 0. \end{aligned}$$

Weil

$$\log \left( \left\| x \|y\| - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \right) = \log (\|x - z\|^2) + \log (\|y\|^2)$$

mit  $z = y/\|y\|^2$  ist auch diese Funktion harmonisch. Es folgt, dass  $x \mapsto G(x, y)$  harmonisch ist außerhalb von  $y$ . Weiter gilt

$$G(x, y) = 0 \text{ für } \|y\| = 1.$$

Sei  $u$  eine Lösung von  $\Delta u = f \in C(\overline{B_1(0)})$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{B_1(0)} G(x, y) \Delta u(y) dy &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{B_1(0) \setminus B_\varepsilon(x)} G(x, y) \Delta u(y) dy \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \int_{\partial(B_1(0) \setminus B_\varepsilon(x))} (G(x, y) \partial_\nu u(y) - \partial_{\nu_y} G(x, y) u(y)) d\sigma_y + \right. \\ &\quad \left. + \int_{B_1(0) \setminus B_\varepsilon(x)} \Delta G(x, y) u(y) dy \right) \\ &= \int_{\partial B_1(0)} -\partial_{\nu_y} G(x, y) u(y) d\sigma_y - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} (G(x, y) \partial_\nu u(y) - \partial_{\nu_y} G(x, y) u(y)) d\sigma_y. \end{aligned}$$

Für  $y \in \partial B_\varepsilon(x)$  gilt

$$G(x, y) = \mathcal{O}(\log \varepsilon)$$

und

$$\partial_{\nu_y} G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{(x - y)}{\|x - y\|^2} \cdot \nu_y + \mathcal{O}(1) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} + \mathcal{O}(1).$$

Es folgt für  $\varepsilon \downarrow 0$ , dass

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} G(x, y) \partial_\nu u(y) d\sigma_y &= 2\pi\varepsilon \mathcal{O}(\log \varepsilon) \rightarrow 0, \\ \int_{\partial B_\varepsilon(x)} -\partial_\nu G(x, y) u(y) d\sigma_y &= 2\pi\varepsilon \left( \frac{-1}{2\pi\varepsilon} + \mathcal{O}(1) \right) (u(x) + \mathcal{O}(\varepsilon)) \rightarrow -u(x). \end{aligned}$$

Zusammen wird es:

$$u(x) = - \int_{\partial B_1(0)} \partial_{\nu_y} G(x, y) u(y) d\sigma_y - \int_{B_1(0)} G(x, y) \Delta u(y) dy. \quad (4.13)$$

Diese Formel liefert uns eine Eigenschaft einer Lösung zu

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } B_1(0), \\ u = u_0 & \text{auf } \partial B_1(0). \end{cases} \quad (4.14)$$

Wir fassen dieses Ergebnis zusammen in:

**Proposition 4.2** Sei  $f \in C(\overline{B_1(0)})$  und  $u_0 \in C(\partial B_1(0))$ . Wenn  $u \in C^2(\overline{B_1(0)})$  eine Lösung ist von (4.14) und  $G$  die Funktion ist in (4.12), dann gilt (4.13).

Die interessante Frage wäre, ob man, wenn  $u_0$  und  $f$  gegeben sind, eine Lösung  $u$  von (4.14) mit Hilfe von

$$u(x) = - \int_{\partial B_1(0)} \partial_{\nu_y} G(x, y) u_0(y) d\sigma_y - \int_{B_1(0)} G(x, y) f(y) dy. \quad (4.15)$$

finden würde. Das ist tatsächlich so, aber braucht noch einen Beweis.

Eine zweite interessante Frage ist, ob es die einzige Lösung zu (4.14) ist. Diese Frage lässt sich sofort beantworten:

**Proposition 4.3** Es gibt höchstens eine Lösung  $u \in C^2(\overline{B_1(0)})$  zu (4.14).

**Beweis.** Wenn es zwei Lösungen geben würde, nennen wir sie  $u_1$  und  $u_2$ , dann ist  $w = u_1 - u_2$  eine harmonische Funktion und es gilt  $w = 0$  auf  $\partial B_1(0)$ . Wegen Korollar 2.6 hat  $w$  kein Extremum innerhalb von  $\overline{B_1(0)}$ . Es folgt, dass  $w \leq 0$  auf  $\overline{B_1(0)}$ . Ähnliches gilt für  $-w$ . Dann gilt also  $w = 0$  auf  $\overline{B_1(0)}$  und  $u_1$  und  $u_2$  wären identisch. ■

**Bemerkung 4.3.1** Diesen letzten Beweis kann man verwenden für beliebige Gebiete.

### 4.2.3 Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 - \partial_y$

Diese Gleichung erscheint bei der Wärmeleitung. Weil  $y$  die Zeit darstellt, werden wir  $t$  statt  $y$  benutzen. Ein einfaches, physikalisches Problem wäre die Temperaturverteilung in einem Stab. Wir nehmen an, dieser Stab ist isoliert, außer an den beiden Enden. Die Anfangstemperatur nehmen wir 20 und die Enden halten wir auf 0. Das Problem wird:

$$\begin{cases} (\partial_t - \partial_x^2) u = 0 & \text{in } (0, \ell) \times (0, T), \\ u(x, 0) = 20 & \text{auf } (0, \ell), \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 & \text{auf } (0, T). \end{cases}$$

Wenn man  $u(x, 0) = \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)$  statt 20 hätte, findet man als Lösung

$$u(x, t) = e^{-\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right).$$

Man kontrolliert direkt, dass sowohl die Differentialgleichung als auch die Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt sind. Hat man  $u(x, 0) = \sum_{k=1}^{138} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)$  folgt, weil die Differentialgleichung linear ist, als Lösung

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{138} c_k e^{-\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right).$$

Als nächstes wenden wir an, dass

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell}x\right) \quad \text{für } 0 < x < \ell$$

und versuchen für die Lösung

$$u(x, t) = 20 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell}x\right). \quad (4.16)$$

Konvergiert diese Reihe? Erfüllt sie die Differentialgleichung? Erfüllt sie die Rand- und Anfangsbedingungen? Die Antworten lauten: ja, ja und fast überall.

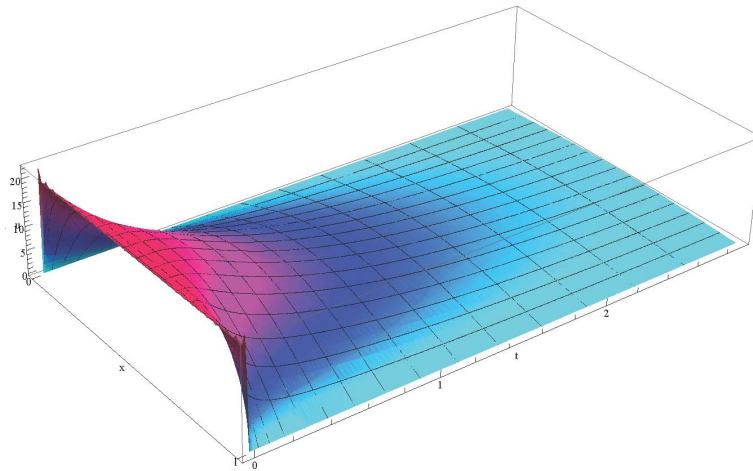


Abbildung 4.3: Eine Skizze der Funktion in (4.16)

Das Bild in Abbildung 4.3 gibt uns Hoffnung, dass man tatsächlich mit einer konvergenter Reihe zu tun hat. Schauen wir uns auch noch die Approximationen für ein kleines  $t$  mit endlich vielen Termen an in Abbildung 4.4.

Schreibt man

$$u(x, t) = 20 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \left(e^{-\ell^{-2}\pi^2 t}\right)^{(2k+1)^2} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell}x\right), \quad (4.17)$$

dann folgt  $e^{-\ell^{-2}\pi^2 t} < 1$  für  $t > 0$  und man zeigt, dass die Reihe in (4.17) absolut konvergent ist. Innerhalb des Konvergenzradius ist das Ableiten nach  $z := e^{-\ell^{-2}\pi^2 t}$  wohldefiniert und mit Hilfe der Kettenregel existiert auch die Ableitung nach  $t$ . Ähnliches gilt für höhere

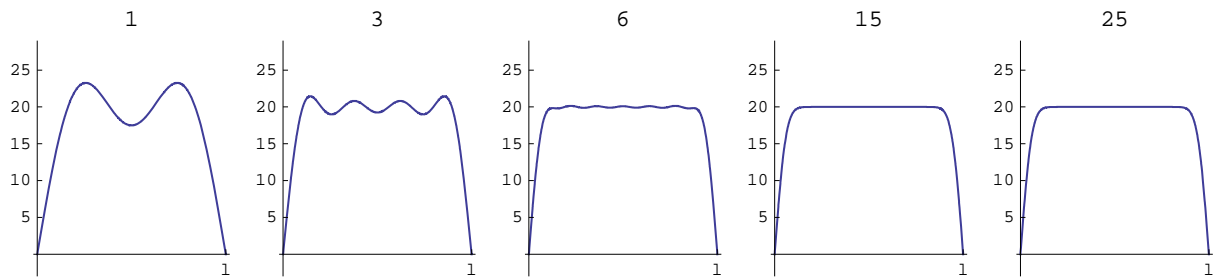


Abbildung 4.4: Skizzen der Funktionen  $x \mapsto 20 \sum_{k=0}^n \frac{4}{(2k+1)\pi} e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell} x\right)$  für  $t = 0,01$  und  $n \in \{1, 3, 6, 15, 25\}$ .

Ableitungen und Ableitungen nach  $x$ . Weil man so den Limes in den Ableitungen und den Limes in der Summe vertauschen kann für  $t > 0$ , folgt aus

$$(\partial_t - \partial_x^2) e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell} x\right) = 0,$$

dass die Differentialgleichung erfüllt ist für  $t > 0$ . Diese absolute Konvergenz liefert auch

$$u(0, t) = 0 = u(\ell, t) \text{ für } t > 0.$$

Die Stetigkeit von  $u$  bei  $t = 0$  ist nur erfüllt für  $x \in (0, \ell)$ . Um dies zu zeigen verwendet man eine Version vom Konvergenztest von Abel:

**Lemma 4.4 (Abel)** Sei  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ . Wenn  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert, dann konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$  für  $r \in [0, 1]$  und es gilt

$$\lim_{r \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

**Beweis.** Wenn  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert, hat  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  einen Konvergenzradius  $R \geq 1$  und konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$  für  $r < 1$ . Wenn  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert, gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  einen  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  derart, dass  $|\sum_{n=N}^{\infty} a_n| < \varepsilon$  für alle  $N > N_\varepsilon$ . Dann folgt für  $m > N > N_\varepsilon$ , dass

$$\left| \sum_{n=N}^m a_n \right| \leq \left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n - \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \right| < 2\varepsilon. \quad (4.18)$$

Außerdem gilt für  $m > N$ , dass  $a_n r^n = a_n r^m + a_n \sum_{k=n}^{m-1} (r^{k+1} - r^k)$  und

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^m a_n r^n &= \sum_{n=N}^m a_n r^m + \sum_{n=N}^m a_n \sum_{k=n}^{m-1} (r^{k+1} - r^k) \\ &= \sum_{n=N}^m a_n r^m + \sum_{k=N}^{m-1} \sum_{n=N}^k a_n (r^{k+1} - r^k). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^m a_n r^n \right| &\leq \left| \sum_{n=N}^m a_n r^m \right| + \left| \sum_{k=N}^{m-1} \sum_{n=N}^k a_n (r^{k+1} - r^k) \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=N}^m a_n \right| r^m + \sum_{k=N}^{m-1} \left| \sum_{n=N}^k a_n \right| |r^{k+1} - r^k| \\ &\leq 2\varepsilon r^m + \sum_{k=N}^{m-1} 2\varepsilon |r^{k+1} - r^k| = 2\varepsilon r^N \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

und ähnlich wie in (4.18) hat man

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n r^n \right| \leq 4\varepsilon. \quad (4.19)$$

Die Konvergenz von  $\sum_{n=N}^{\infty} a_n r^n$  ist also gleichmäßig bezüglich  $r \in [0, 1]$ .

Betrachte das Polynom  $p(r) = \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} a_n r^n$ . Nehme  $\delta > 0$  derartig, dass  $|r - 1| < \delta$  impliziert

$$|p(1) - p(r)| < \varepsilon, \quad (4.20)$$

so folgt aus (4.18), (4.19) und (4.20), dass

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \right| < 7\varepsilon.$$

Das Lemma ist bewiesen. ■

#### 4.2.4 Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 + \partial_y$

Wenn wir versuchen auf ähnliche Art das folgende Problem zu lösen

$$\begin{cases} (\partial_t + \partial_x^2) u = 0 & \text{in } (0, \ell) \times (0, T), \\ u(x, 0) = 20 & \text{auf } (0, \ell), \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 & \text{auf } (0, T), \end{cases}$$

erhält man die Formel

$$u(x, t) = 20 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} e^{(\frac{(2k+1)\pi}{\ell})^2 t} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell} x\right). \quad (4.21)$$

Auch hier müssen wir uns fragen, ob diese Reihe konvergiert?

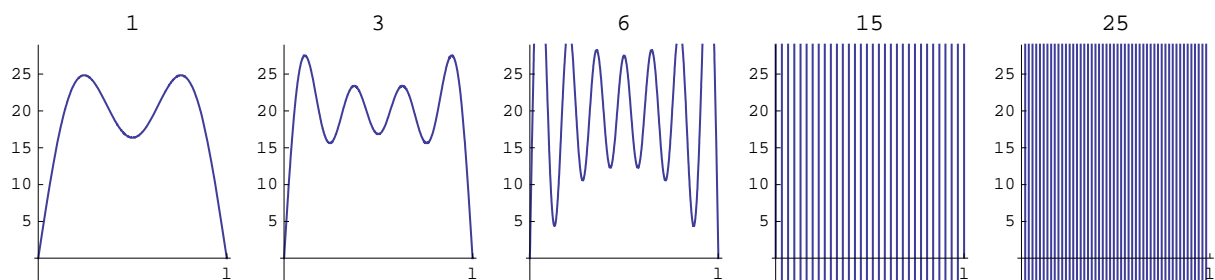


Abbildung 4.5: Hier stehen Bilder zu den Approximationen für  $t = 0,01$  und  $n \in \{1, 3, 6, 15, 25\}$  aus (4.22). Man vergleiche mit den Bildern in Fig. 4.4.

In Abbildung 4.4 stehen Skizzen zu den ersten Termen aus (4.16) und in Abbildung 4.5 ähnliche aus (4.21):

$$u_n(x, t) = 20 \sum_{k=0}^n \frac{4}{(2k+1)\pi} e^{(\frac{(2k+1)\pi}{\ell})^2 t} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell} x\right) \quad (4.22)$$

Es hat den Anschein, dass die Formel aus (4.22) nicht konvergiert für  $t = .01$ . Kann man sich mit analytischen Mitteln überzeugen?

### 4.2.5 Welche Randbedingungen passen?

Wir haben keineswegs jetzt schon den kompletten Beweis gegeben, welche Randbedingungen zu einem wohl-definierten Randwertproblem im Sinne von Hadamard führen werden. Die Vermutungen kann man jedoch schon mal bildlich darstellen.

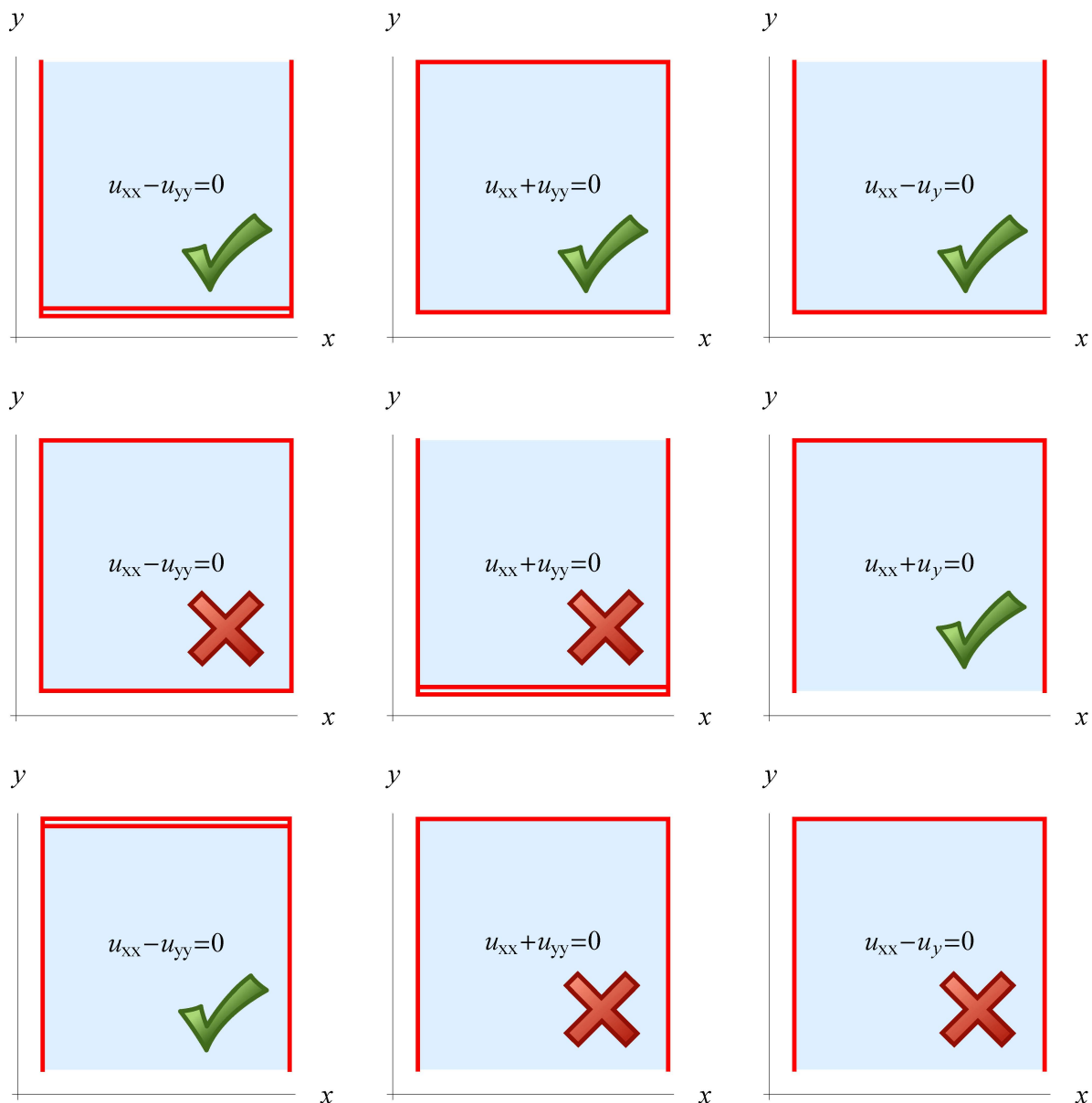


Abbildung 4.6: Ein roter Strich bedeutet, dass man einen Randwert vorschreibt. Bei zwei Strichen braucht es einen zweiten unabhängigen Randwert. Es gibt wohl-definierte und nicht-wohl-definierte Probleme im Sinne von Hadamard.

## 4.3 Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung

### 4.3.1 In zwei Dimensionen

Die allgemeine Form einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung sahen wir schon in (4.1):

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = \varphi, \quad (4.23)$$

mit  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ . Das Symbol ist

$$L(\xi, \eta) = a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 + d\xi + e\eta + f. \quad (4.24)$$

**Definition 4.5** Sei das Symbol wie in (4.24). Dann heißt (4.23)

- *elliptisch*, wenn es  $\lambda \in \mathbb{R}$  gibt derart, dass  $L(\xi, \eta) = \lambda$  die Gleichung einer Ellipse darstellt;
- *hyperbolisch*, wenn es  $\lambda \in \mathbb{R}$  gibt derart, dass  $L(\xi, \eta) = \lambda$  die Gleichung einer Hyperbel darstellt;
- *parabolisch*, wenn es  $\lambda \in \mathbb{R}$  gibt derart, dass  $L(\xi, \eta) = \lambda$  die Gleichung einer Parabel darstellt.

**Bemerkung 4.5.1** Wenn  $a, \dots, e$  von  $x$  und  $y$  abhängt, dann kann es sein, dass der Typ verschieden ist an verschiedenen Stellen. Hyperbolisch und elliptisch wird bestimmt durch  $a, b, c$ .

**Lemma 4.6** Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- i. Wenn  $L(\xi, \eta) = \lambda$  eine Ellipse darstellt, dann gilt  $b^2 < ac$ .
- ii. Wenn  $b^2 < ac$  gilt, dann beschreibt  $L(\xi, \eta) = \lambda$  mit  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$  entweder eine Ellipse oder einen Punkt oder die leere Menge.
- i. Wenn  $L(\xi, \eta) = \lambda$  eine Hyperbel darstellt, dann gilt  $b^2 > ac$ .
- ii. Wenn  $b^2 > ac$  gilt, dann beschreibt  $L(\xi, \eta) = \lambda$  mit  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$  entweder eine (doppelte) Hyperbel oder zwei sich schneidenden Geraden.
- i. Wenn  $L(\xi, \eta) = \lambda$  eine Parabel darstellt, dann gilt  $b^2 = ac$  und<sup>3</sup>

$$\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \notin \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \right\}. \quad (4.25)$$

- ii. Wenn  $b^2 = ac$  und (4.25) gilt, beschreibt  $L(\xi, \eta) = \lambda$  eine Parabel.

Für konstante Koeffizienten kann man (4.23) auch schreiben als

$$\left( \nabla \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \nabla + \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \cdot \nabla + f \right) u = \varphi.$$

**Lemma 4.7** Seien  $\mu_1, \mu_2$  die Eigenwerte von  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ .

- $\mu_1\mu_2 > 0 \Leftrightarrow (4.23)$  ist elliptisch.
- $\mu_1\mu_2 < 0 \Leftrightarrow (4.23)$  ist hyperbolisch.
- $\mu_1\mu_2 = 0$  und (4.25) gilt  $\Leftrightarrow (4.23)$  ist parabolisch.

**Beispiel 4.8** Die Tricomi-Gleichung  $u_{xx} + xu_{yy} = 0$  ist elliptisch für  $x > 0$  und hyperbolisch für  $x < 0$ .

**Beispiel 4.9** Die Differentialgleichung  $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = \varphi$  gehört nicht zu einem dieser drei Typen, denn (4.25) ist nicht erfüllt. Mit der Koordinatentransformation  $s = x + y$  und  $t = x - y$  wird die Differentialgleichung  $4u_{ss} + 2u_s = \varphi$  und die ist eine gewöhnliche Differentialgleichung.

<sup>3</sup> $\text{Span}\{\vec{\varphi}, \vec{\psi}\} = \{c_1\vec{\varphi} + c_2\vec{\psi}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ .



### 4.3.2 In höheren Dimensionen

Eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in  $n$  Dimensionen kann man wie folgt schreiben:

$$(\nabla \cdot M \nabla + \vec{v} \cdot \nabla + c) u = f, \quad (4.26)$$

mit  $M$  eine symmetrische und reelle  $n \times n$  Matrix,  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  und  $c \in \mathbb{R}$  und  $f$  eine vorgeschriebene Funktion.

**Definition 4.10** Man nennt die partielle Differentialgleichung in (4.26)

- *elliptisch*, wenn alle Eigenwerte von  $M$  entweder alle positiv oder alle negativ sind;
- *hyperbolisch*, wenn  $n - 1$  unabhängige Eigenvektoren von  $M$  Eigenwerte mit dem gleichen Vorzeichen haben und der letzte Eigenvektor einen Eigenwert mit dem entgegengesetzten Vorzeichen hat;
- *parabolisch*, wenn  $n - 1$  unabhängige Eigenvektoren von  $M$  Eigenwerte mit dem gleichen Vorzeichen haben, der letzte Eigenwert 0 ist und  $\vec{v} \notin \text{Spaltenraum}(M)$ .

**Bemerkung 4.10.1** Man erinnere sich aus der Vorlesung Lineare Algebra, dass eine symmetrische und reelle  $n \times n$  Matrix  $M$  eine Basis aus Eigenvektoren besitzt. Man sollte sich auch erinnern, dass für eine  $n \times n$  Matrix die Determinante dem Produkt der Eigenwerte (mit algebraischer Multiplizität) gleicht:

$$\det(M) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(M).$$

Es gilt übrigens auch, dass  $\sum_{i=1}^n M_{ii} =: \text{spur}(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(M)$ .

**Bemerkung 4.10.2** Lemma 4.7 zeigt, dass diese Klassifizierung auch gilt für Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei Dimensionen.

**Bemerkung 4.10.3** Diese Aufteilung umfasst nicht alle Möglichkeiten. Die wichtigsten partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung aus physikalischen Modellen sind aber erfasst.

Wenn die Differentialgleichung Koeffizienten hat, die nicht konstant sind, kann die Klassifizierung ortsabhängig sein. Dann wird klassifiziert, indem man den Parameter einfriert. Das heißt, man nennt eine semilineare Differentialgleichung

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_{x_j} u(x) = f(x, u) \quad (4.27)$$

elliptisch (beziehungsweise parabolisch, hyperbolisch) an der Stelle  $x_0$ , wenn

$$L := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x_0) \partial_{x_j}$$

elliptisch (beziehungsweise parabolisch, hyperbolisch) ist. Bei einer quasilinearen Differentialgleichung

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u(x), \nabla u(x)) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(x) = f(x, u(x), \nabla u(x)) \quad (4.28)$$

wird dieses Einfrieren sogar von der Lösung selber abhängen. Man nennt (4.28) elliptisch (beziehungsweise hyperbolisch) an der Stelle  $x_0$ , wenn

$$L := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0, u(x_0), \nabla u(x_0)) \partial_{x_i} \partial_{x_j}$$

es ist.

**Beispiel 4.11** *Eine einfache Differentialgleichung für eine stationäre Potentialströmung von einem Gas in zwei Dimensionen ist*

$$(c^2 - u_x^2) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (c^2 - u_y^2) u_{yy} = 0. \quad (4.29)$$

Hier ist  $u$  das Potential und  $\nabla u$  die Geschwindigkeit. Weil

$$\det \begin{pmatrix} c^2 - u_x^2 & -u_x u_y \\ -u_x u_y & c^2 - u_y^2 \end{pmatrix} = (c^2 - u_x^2)(c^2 - u_y^2) - (u_x u_y)^2 = c^2 (c^2 - |\nabla u|^2)$$

ist (4.29) elliptisch für  $|\nabla u|^2 < c^2$  und hyperbolisch für  $|\nabla u|^2 > c^2$ . Bei einer solchen Potentialströmung ist  $c$  die Schallgeschwindigkeit in diesem Gas. Diese Gleichung trifft auch zu, wenn das Gas zum Beispiel Luft ist und ein Flugzeug sich durch dieses Gas bewegt. Wenn sich das Flugzeug schneller als die Schallgeschwindigkeit bewegt, gibt es Stellen an dem  $|\nabla u| > c$  gilt. Das bedeutet, dass man dann für die Gleichung (4.29) sowohl „elliptische“ Gebiete als auch „hyperbolische“ Gebiete hat. Die Modellierung für Überschall- und Unterschallflug sind dann auch wesentlich verschieden.

# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 5



## Die Wellengleichung und Distributionen

Eine typische hyperbolische partielle Differentialgleichung ist die Wellengleichung:

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0. \quad (5.1)$$

Die Variable  $t$  repräsentiert meistens die Zeit; der Differentialoperator  $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$  ist die Summe der zweiten Ableitungen bezüglich der Raumvariablen. In Raumdimension 1 beschreibt diese Gleichung zum Beispiel die Schwingungen einer Saite, in Dimension 2 die Wellen in einem Teich und in Dimension 3 beschreibt sie, wie die Stimme eines Sängers sein Publikum erreicht.

### 5.1 Die Wellengleichung in Raumdimension 1

Die Wellengleichung in einer Dimension haben wir schon betrachtet in Paragraph 4.2.1. Die folgende partielle Differentialgleichung ist gemeint:

$$u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t).$$

Diese Differentialgleichung ist hyperbolisch. Man kann durch Skalierung  $c = 1$  erhalten, so wie es in Paragraph 4.2.1 gemacht wird. Weil  $c$  genau die Geschwindigkeit ist, mit der die Wellen sich seitwärts bewegen, lässt man der Anschaulichkeit halber  $c$  oft auch stehen.

Die Funktion  $f$  ist gegeben und man versucht, bei geschickt gewählten Anfangs- und Randwerten, die Existenz einer eindeutigen Lösung zu zeigen. Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t) & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (5.2)$$

ist ein solches Problem.

**Proposition 5.1 (Die Formel von d'Alembert)** Sei  $f = 0$ ,  $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$  und  $v_0 \in C^1(\mathbb{R})$ . Dann hat (5.2) genau eine Lösung in  $C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ , nämlich

$$u(x, t) = \frac{1}{2}u_0(x - ct) + \frac{1}{2}u_0(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y) dy. \quad (5.3)$$

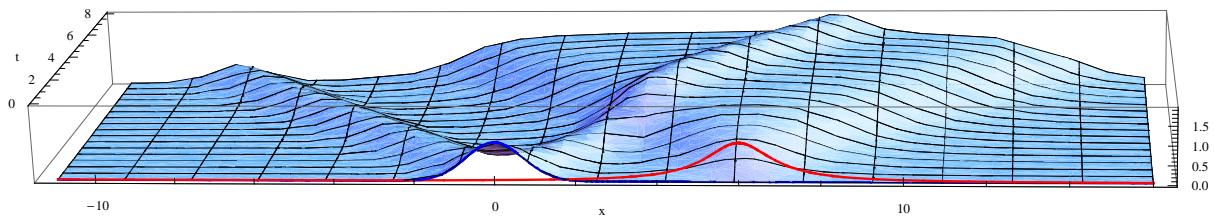


Abbildung 5.1: Skizze der Lösung nach d'Alembert von (5.2) mit  $u_0(x) = e^{-x^2}$  (in blau) und  $v_0(x) = \frac{1}{1+(x-6)^2}$  (in rot).

**Bemerkung 5.1.1** Wenn  $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$  und  $v_0 \in C(\mathbb{R})$ , dann liefert (5.3) immer noch eine schwache Lösung  $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ .

**Beweis.** Wenn  $f$ ,  $u_0$  und  $v_0$  diesen obengenannten Funktionenräumen angehören, ist  $u$  zweimal stetig differenzierbar. Die erste Anfangsbedingung folgt direkt:

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Man findet

$$u_t(x, t) = -\frac{1}{2}cu'_0(x - ct) + \frac{1}{2}cu'_0(x + ct) + \frac{1}{2}v_0(x + ct) + \frac{1}{2}v_0(x - ct),$$

und es folgt

$$u_t(x, 0) = v_0(x).$$

Nochmals nach  $t$  ableiten ergibt

$$u_{tt}(x, t) = \frac{1}{2}c^2u''_0(x - ct) + \frac{1}{2}c^2u''_0(x + ct) + \frac{1}{2}cv'_0(x + ct) - \frac{1}{2}cv'_0(x - ct).$$

Die Ableitungen nach  $x$  sind

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= \frac{1}{2}u'_0(x - ct) + \frac{1}{2}u'_0(x + ct) + \frac{1}{2c}v_0(x + ct) - \frac{1}{2c}v_0(x - ct), \\ u_{xx}(x, t) &= \frac{1}{2}u''_0(x - ct) + \frac{1}{2}u''_0(x + ct) + \frac{1}{2c}v'_0(x + ct) - \frac{1}{2c}v'_0(x - ct). \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung ist erfüllt und  $u$  in (5.3) ist eine Lösung.

Dass diese Lösung die einzige ist, findet man durch Verfolgung der charakteristischen Kurven. ■

**Proposition 5.2 (Prinzip von Duhamel)** Sei  $f \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ ,  $u_0 = v_0 = 0$ . Dann hat (5.2) genau eine Lösung in  $C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ , nämlich

$$u(x, t) = \int_0^t U(x, t; s) ds \quad (5.4)$$

wobei  $U(\cdot, \cdot; s)$  für  $s > 0$  die Lösung ist von

$$\begin{cases} U_{tt}(x, t; s) - c^2U_{xx}(x, t; s) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > s, \\ U(x, t; s) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t = s, \\ U_t(x, t; s) = f(x, s) & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t = s. \end{cases} \quad (5.5)$$



Abbildung 5.2: Links: Jean Le Rond d'Alembert, 1717 - 1783. Rechts: Jean Marie Constant Duhamel, 1797 - 1872.

**Bemerkung 5.2.1** Die Funktionen  $(x, t) \mapsto U(x, t; s)$  sind wohldefiniert für  $t \geq s$ . Dies bedeutet auch, dass  $u$  in (5.4) wohldefiniert ist.

**Bemerkung 5.2.2** Die Differentialgleichung ist linear. Das bedeutet, dass die Summe von (5.3) und (5.4) eine Lösung liefert für (5.2) mit  $u_0$ ,  $v_0$  und  $f$  ungleich 0.

**Beweis.** Aus Proposition 5.1 folgt

$$U(x, t; s) = \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy.$$

Wenn  $f \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ , dann ist auch  $(x, t, s) \mapsto U(x, t; s)$  zweimal stetig differenzierbar. Man findet<sup>1</sup>

$$u_t(x, t) = U(x, t; t) + \int_0^t U_t(x, t; s) ds = \int_0^t U_t(x, t; s) ds$$

und

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= U_t(x, t; s)_{s=t} + \int_0^t U_{tt}(x, t; s) ds = \\ &= f(x, t) + \int_0^t c^2 U_{xx}(x, t; s) ds = \\ &= f(x, t) + c^2 u_{xx}(x, t). \end{aligned}$$

Weil

$$u(x, 0) = \int_0^0 U(x, 0; s) ds = 0 \text{ und } u_t(x, 0) = \int_0^0 U_t(x, 0; s) ds = 0,$$

<sup>1</sup>Für  $g(t) = \int_0^t f(t, s) ds$  mit stetig differenzierbarem  $f$  gilt

$$\begin{aligned} g'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_0^{t+h} f(t+h, s) ds - \int_0^t f(t, s) ds \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(t+h, s) ds + \int_0^t \frac{f(t+h, s) - f(t, s)}{h} ds \right) = \\ &= f(t, t) + \int_0^t f_t(t, s) ds. \end{aligned}$$

sind auch die Anfangsbedingungen erfüllt. ■

Noch eine Bemerkung zu (5.3) und (5.4): In (5.3) steht, wie sich der Einfluß der Anfangswerte  $u_0$  und  $v_0$  auswirkt. In (5.4) sieht man, wo  $f$  an der Stelle  $(x, t)$  seinen Einfluss hat. Umgekehrt kann man sehen, wie der Wert von  $u(x, t)$  abhängt von  $u_0$ ,  $v_0$  und  $f$ . Man nennt diese Teilgebiete Einflußbereich und Abhängigkeitsbereich. Für  $u_0$  sind es Kegelflächen. Für  $v_0$  und  $f$  sind es *Einflußkegel*<sup>2</sup> und *Abhängigkeitskegel*<sup>3</sup>. Siehe Abbildung 5.3.

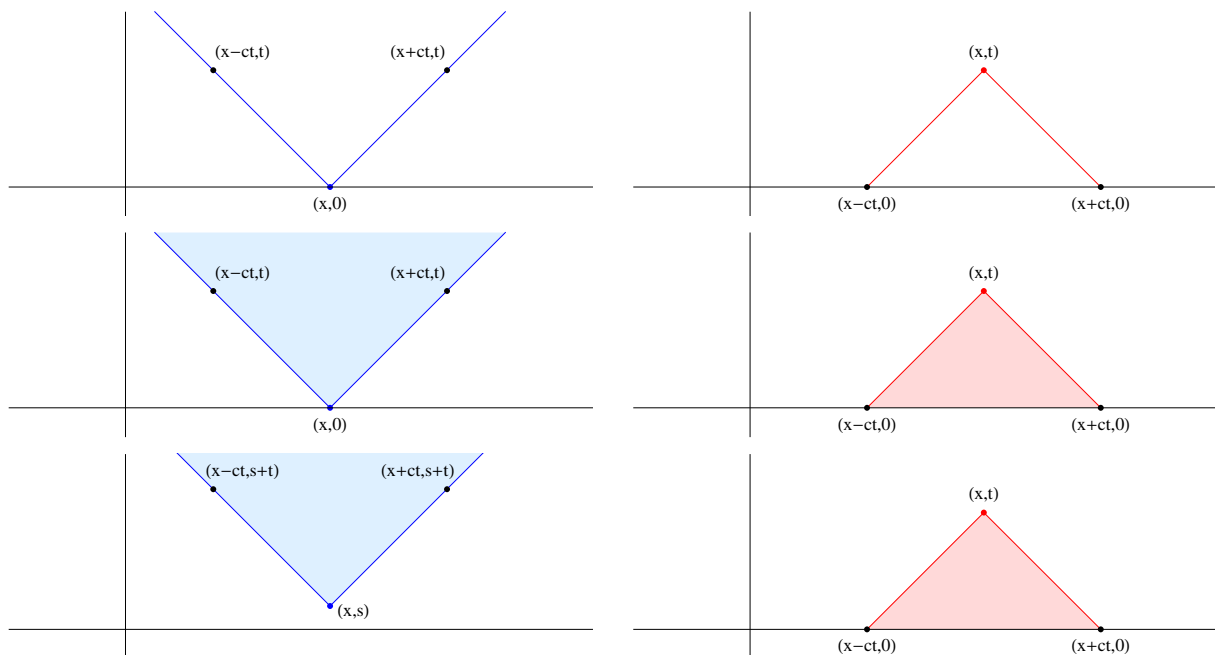


Abbildung 5.3: *Oben: Das Einflußgebiet und das Abhängigkeitsgebiet zu  $u_0$ . Mitte: Der Einflußkegel und der Abhängigkeitskegel zu  $v_0$ . Unten: Der Einflußkegel und der Abhängigkeitskegel zu  $f$ .*

## 5.2 Die 1d-Wellengleichung auf einem Intervall

Wie man in Paragraph 4.2.1 schon gesehen hat, kann man für beschränkte Gebiete eine Lösung finden, wenn man die Funktionen  $u_0$ ,  $v_0$  und  $f$  geschickt fortsetzt. Wir betrachten dies in den nächsten Beispielen.

**Beispiel 5.3** *Betrachte das Anfangs-Randwertproblem*

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t) & \text{für } x > 0 \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x > 0, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x > 0, \\ u(0, t) = 0 & \text{für } t > 0. \end{array} \right. \quad (5.6)$$

<sup>2</sup>Cone of influence

<sup>3</sup>Cone of dependance

Man definiere

$$\begin{aligned}\bar{f}(x, t) &= \begin{cases} f(x, t) & \text{für } x \geq 0, \\ -f(-x, t) & \text{für } x < 0, \end{cases} \\ \bar{u}_0(x) &= \begin{cases} u_0(x) & \text{für } x \geq 0, \\ -u_0(-x) & \text{für } x < 0, \end{cases} \\ \bar{v}_0(x) &= \begin{cases} v_0(x) & \text{für } x \geq 0, \\ -v_0(-x) & \text{für } x < 0, \end{cases}\end{aligned}$$

und betrachte (5.2) mit diesen erweiterten rechten Seiten. Wenn  $f(0, t)$ ,  $u_0(0)$  und  $v_0(0)$  nicht identisch 0 sind, sind diese erweiterten Funktionen nicht länger stetig. Und sogar wenn diese Kompatibilitätsbedingung erfüllt ist, reicht es noch nicht für die Differenzierbarkeit. Sei  $\bar{u}(x, t)$  nun definiert durch (5.3) und (5.4). Dann folgt aus der antisymmetrischen Fortsetzung von  $f$ ,  $u_0$  und  $v_0$ , dass auch  $x \mapsto \bar{u}(x, t)$  antisymmetrisch ist, das heißt

$$\bar{u}(x, t) = -\bar{u}(-x, t).$$

Ist also die Kompatibilitätsbedingung erfüllt, findet man durch

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t)|_{x \geq 0}$$

eine distributionelle Lösung  $u \in C([0, \infty) \times [0, \infty))$ .

**Beispiel 5.4** Für das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t) & \text{für } x > 0 \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x > 0, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x > 0, \\ u_x(0, t) = 0 & \text{für } t > 0, \end{cases} \quad (5.7)$$

findet man eine Lösung durch symmetrische Fortsetzung.

**Beispiel 5.5** Für das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t) & \text{für } x \in (0, \ell) \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in (0, \ell), \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in (0, \ell), \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 & \text{für } t > 0, \end{cases} \quad (5.8)$$

findet man eine Lösung durch periodische Fortsetzung. Man definiert

$$\begin{aligned}\tilde{u}_0(x) &= \begin{cases} u_0(x) & \text{für } x \in [0, \ell), \\ -u_0(2\ell - x) & \text{für } x \in [\ell, 2\ell), \end{cases} \\ \bar{u}_0(x) &= \tilde{u}_0\left(x - \left[\frac{x}{2\ell}\right] 2\ell\right).\end{aligned}$$

Hier ist  $[s] = \max\{k \in \mathbb{N}; k \leq s\}$ . Auf ähnliche Weise werden  $f(\cdot, t)$  und  $v_0$  fortgesetzt. Eine solche Fortsetzung findet man in Abbildung 5.4.

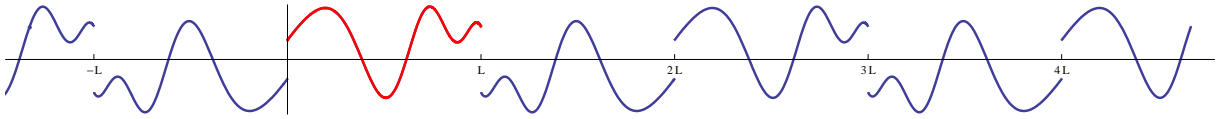


Abbildung 5.4: Periodische Fortsetzung einer auf  $[0, L]$  definierten Funktion, die außerdem antisymmetrisch ist bezüglich  $0$  und  $L$ .

### 5.3 Intermezzo zu Distributionen

Die Physik hat der Mathematik die *Dirac- $\delta$ -Funktion*<sup>4</sup> gebracht. Diese  $\delta$ -Funktion soll folgende Eigenschaften haben:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \text{ f\u00fcr jedes } \varphi \in C_0(\mathbb{R}^n).$$

Wenn  $\delta$  eine integrierbare Funktion w\u00e4re, folgt aus dem Satz von Lusin, dass  $\delta$  stetig ist auf jedem beschr\u00e4nkten Gebiet mit Ausnahme einer beliebig kleinen Menge. Wenn  $\delta$  stetig ist in  $x \neq 0$ , folgt mit dem Hauptlemma der Variationsrechnung (Lemma 1.23), dass  $\delta(x) = 0$ . Es gilt also  $\delta = 0$  fast \u00fcberall. Dann folgt aber, dass  $\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) \varphi(x) dx = 0$ , und das ist ein Widerspruch.

Das bedeutet nicht, dass es diese Dirac- $\delta$ -Funktion nicht gibt, sondern, dass wir etwas mehr Sorgfalt walten lassen m\u00fcssen, wenn wir dieses  $\delta$  definieren. Dazu brauchen wir Objekte, die den Begriff der Funktion erweitern. Diese Erweiterung hat den Namen Distribution bekommen. Ganz allgemein kann man eine Distribution auffassen als ein Element eines Dualraums:

**Definition 5.6** Der Dualraum  $B'$  zum topologischen Raum  $B$  ist der Vektorraum der stetigen linearen Abbildungen von  $B$  nach  $\mathbb{R}$ .

**Bemerkung 5.6.1** Wenn  $B$  ein normierter Raum ist, werden stetige Abbildungen wie \u00fcblich definiert.  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, wenn es f\u00fcr jedes  $b \in B$  und f\u00fcr alle  $\varepsilon > 0$  einen  $\delta > 0$  gibt derart, dass  $\|a - b\|_B < \delta$  impliziert  $|f(a) - f(b)| < \varepsilon$ . Wenn  $f$  auch noch linear ist, ist diese Bedingung gleichwertig zu: es gibt  $M > 0$  derart, dass f\u00fcr jedes  $b \in B$  gilt  $|f(b)| \leq M \|b\|_B$ . Stetigkeit kann man auch noch definieren, wenn  $B$  kein normierten, sondern nur ein topologischer Raum ist. F\u00fcr einen topologischen Raum sind die offenen Mengen definiert und die Klasse  $\mathcal{T}$  der offenen Mengen erf\u00fcllt die folgende Bedingungen:

1)  $B, \emptyset \in \mathcal{T}$ , 2)  $T_1, \dots, T_k \in \mathcal{T} \implies \bigcap_{1 \leq i \leq k} T_i \in \mathcal{T}$  und 3)  $T_i \in \mathcal{T}$  f\u00fcr  $i \in I \implies \bigcup_{i \in I} T_i \in \mathcal{T}$ .

Dann wird Stetigkeit einer Abbildung  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch: f\u00fcr jede offene Menge  $A \subset \mathbb{R}$  gilt  $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$ .

Es ist \u00fcblich, den Namen Distribution zu reservieren f\u00fcr stetige lineare Abbildungen auf speziellen Funktionenr\u00e4umen.

**Beispiel 5.7** Sei  $y \in \Omega$  mit  $\Omega$  ein beschr\u00e4nktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$ . Definiere  $\delta_y : C(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\delta_y(\varphi) = \varphi(y) \text{ f\u00fcr alle } \varphi \in C(\overline{\Omega}). \quad (5.9)$$

Mit  $C(\overline{\Omega})$  ist der normierte Raum  $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C(\overline{\Omega})})$  mit

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|$$

<sup>4</sup>Paul Adrien Maurice Dirac, 1902 Bristol (GB) – 1984 Tallahassee (USA), Nobel Preis in Physik 1933



gemeint.

Diese Abbildung ist linear:

$$\delta_y (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) (y) = c_1\varphi_1(y) + c_2\varphi_2(y) = c_1\delta_y (\varphi_1) + c_2\delta_y (\varphi_2)$$

und stetig:

$$|\delta_y (\varphi)| = |\varphi(y)| \leq \|\varphi\|_{C(\bar{\Omega})}.$$

Das heißt  $\delta_y \in C(\bar{\Omega})'$ . Man nennt  $\delta_y$  die Dirac- $\delta$ -Funktion in  $y$  obwohl sie keine Funktion ist.

**Beispiel 5.8** Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$ . Jede Lebesgue-integrierbare Funktion  $f$  auf  $\Omega$  mit  $\|f\|_{L^1(\Omega)} < \infty$  liefert eine Abbildung  $F_f$  auf  $C(\bar{\Omega})$ , definiert durch

$$F_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx. \quad (5.10)$$

Die Linearität folgt sofort. Für Stetigkeit betrachte man:

$$|F_f(\varphi)| \leq \int_{\Omega} |f(x)| |\varphi(x)| dx \leq \|\varphi\|_{C(\bar{\Omega})} \int_{\Omega} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1(\Omega)} \|\varphi\|_{C(\bar{\Omega})}.$$

**Lemma 5.9** Wenn  $F$  eine stetige lineare Abbildung auf  $C[a, b]$  ist, dann ist  $F'$ , definiert durch

$$F'(\varphi) := -F(\varphi'),$$

eine stetige lineare Abbildung auf  $C^1[a, b]$ .

**Bemerkung 5.9.1** Ähnliches gilt in höheren Dimensionen mit partiellen Ableitungen.

**Beweis.** Die Linearität von  $F'$  folgt aus der Linearität von  $F$ , die Stetigkeit von  $F'$  aus der von  $F$ :  $|F'(\varphi)| = |F(\varphi')| \leq \|\varphi'\|_{C[a,b]} \leq \|\varphi\|_{C^1[a,b]}$  für alle  $\varphi \in C^1[a, b]$ . ■

**Beispiel 5.10** Betrachtet man  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $f(x) = \frac{1}{2}\text{sign}(x)$ , dann ist die zugehörige Abbildung  $F$  auf  $C_0[-1, 1]$  definiert als

$$F(\varphi) = \int_{-1}^1 f(x)\varphi(x)dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 \varphi(x)dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi(x)dx.$$

Es gilt für  $F'$  auf  $C^1[-1, 1] \cap C_0[-1, 1]$ , dass

$$\begin{aligned} F'(\varphi) &= -F(\varphi') = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \varphi'(x)dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi'(x)dx = \\ &= \frac{1}{2}\varphi(0) - \frac{1}{2}\varphi(-1) - \frac{1}{2}\varphi(1) + \frac{1}{2}\varphi(0) = \varphi(0) = \delta(\varphi). \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit  $C_B^m(\mathbb{R}^n)$  den Vektorraum der  $m$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen mit beschränkten Ableitungen bis und inklusive Ordnung  $m$ , dann ist  $\|\cdot\|_{C^m(\mathbb{R}^n)}$  eine Norm auf  $C_B^m(\mathbb{R}^n)$ .

Für die zwei wichtigsten Klassen von Distributionen will man Funktionale zulassen, die auf beliebige Ableitungen von Funktionen wohldefiniert sind. Anders gesagt, man möchte unendlich differentierbare Funktionen betrachten. Dafür gibt es jedoch keine passende Norm und das heißt wiederum, dass die Stetigkeit umständlicher definiert ist.

**Definition 5.11 (Schwartz-Distributionen)** Sei  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  der Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger.

1. Eine Menge  $T \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  heißt offen, wenn es für jedes  $u \in T$  ein  $m \in \mathbb{N}$  und  $\varepsilon > 0$  gibt, mit

$$\left\{ v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n); \|u - v\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon \right\} \subset T.$$

Die Klasse  $\mathcal{T}_S$  der offenen Mengen ist eine Topologie. Man schreibt:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) := (C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \mathcal{T}_S).$$

2. Eine lineare Abbildung  $F : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, wenn es  $m, M \in \mathbb{N}$  gibt mit

$$|F(u)| \leq M \|u\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \text{ für alle } u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

3. Eine solche stetige lineare Abbildung heißt Schwartz-Distribution.

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  ist der Vektorraum der Schwartz-Distributionen.

**Definition 5.12 (Temperierte Distributionen)** Sei

$$C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha D^\beta u(x) = 0 \text{ für alle Multiindizes } \alpha, \beta \right\}$$

der Vektorraum der sogenannten schnell fallenden, beliebig oft differenzierbaren Funktionen.

1. Definiere die Normen

$$\|u\|_{m,k}^* := \sum_{\substack{|a| \leq k \\ |\beta| \leq m}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta u(x)|. \quad (5.11)$$

2. Eine Menge  $T \subset C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n)$  heißt offen, wenn es für jedes  $u \in T$  ein  $m \in \mathbb{N}$  und  $\varepsilon > 0$  gibt, mit

$$\left\{ v \in C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n); \|v - u\|_{m,k}^* < \varepsilon \right\} \subset T.$$

Die Klasse  $\mathcal{T}_T$  der offenen Mengen ist eine Topologie. Man schreibt:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := (C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n), \mathcal{T}_T).$$

3. Eine lineare Abbildung  $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, wenn es  $m, k, M \in \mathbb{N}$  gibt mit

$$|F(u)| \leq M \|u\|_{m,k}^* \text{ für alle } u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

4. Eine solche stetige lineare Abbildung  $F$  heißt temperierte Distribution.

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  ist der Vektorraum der temperierten Distributionen.

**Bemerkung 5.12.1** Es gibt keine vernünftige Norm auf  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  oder  $C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , die diese Vektorräume vollständig sein lässt.

**Bemerkung 5.12.2** Es gilt  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

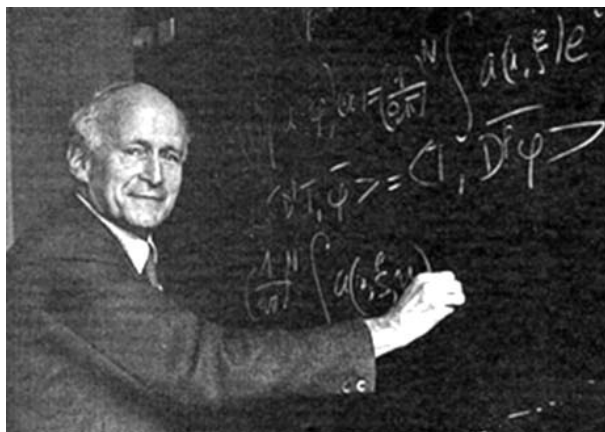


Abbildung 5.5: Laurent Schwartz, 1915 - 2002, Französischer Mathematiker.

Abbildung 5.6: Darstellung einer Funktion aus  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Eine solche Funktion ist unendlich oft differenzierbar und hat einen kompakten Träger.

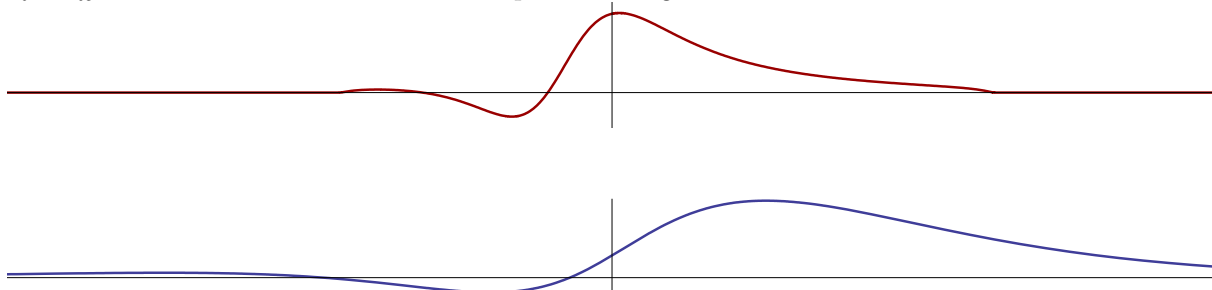


Abbildung 5.7: Darstellung einer Funktion aus  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Eine solche Funktion ist unendlich oft differenzierbar und schnell fallend.

**Bemerkung 5.12.3** Die Dirac- $\delta$ -Funktion liegt sowohl in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  als in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)'$ , denn für  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \cup C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n)$  gilt

$$|\delta_0(\varphi)| = |\varphi(0)| \leq \|\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi\|_{0,0}^*.$$

Reguläre Distributionen sind Distributionen aus  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  oder  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , welche sich wie in (5.10) mit Hilfe einer Funktion definieren lassen.

**Lemma 5.13** Sei  $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  und definiere für  $\varphi$  in  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  oder  $C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R})$

$$F_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx. \quad (5.12)$$

Dann ist  $F_f$  eine (reguläre) Distribution in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  und  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

Wenn  $f \in C^1(\mathbb{R})$  und  $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$ , gilt außerdem, dass

$$(F_f)' = F_{f'}.$$

**Beweis.** Es folgt

$$|F_f(\varphi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx \right| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\varphi\|_\infty$$

und dass  $F_f$  eine (reguläre) Distribution in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  und  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  ist. Die zweite Behauptung beweist man wie folgt. Wenn  $\varphi$  einen kompakten Träger hat, sagen wir  $\varphi(x) = 0$  für

$|x| > M$ , folgt

$$\begin{aligned} F_{f'}(\varphi) - (F_f)'(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} (f'(x)\varphi(x) + f(x)\varphi'(x)) dx = \\ &= \int_{-M}^M (f'(x)\varphi(x) + f(x)\varphi'(x)) dx = [f(x)\varphi(x)]_{x=-M}^M = 0. \end{aligned}$$

Weil  $\varphi$  schnell fallend ist, verwenden wir, dass

$$|f(x)| = \left| \int_{-\infty}^x f'(s) ds \right| \leq \|f'\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

und folgt aus  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)\varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)\varphi(x) = 0$ , dass

$$F_{f'}(\varphi) - (F_f)'(\varphi) = \lim_{M \rightarrow \infty} [f(x)\varphi(x)]_{x=-M}^M = 0.$$

■

Wir betrachten nochmals  $\varphi_\varepsilon$  aus (1.8):

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2 - \varepsilon^2}} & \text{für } \|x\| < \varepsilon, \\ 0 & \text{für } \|x\| \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (5.13)$$

und setzen

$$\psi_\varepsilon(x) = \frac{\varphi_\varepsilon(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x) dx}. \quad (5.14)$$

Ein Bild zu diesen Funktionen findet man in Abbildung 1.6. Setze

$$\Psi_\varepsilon(u)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(y-x) u(x) dx \text{ für } u \in C_B(\mathbb{R}^n). \quad (5.15)$$

Für  $\varepsilon > 0$  ist die Abbildung  $\Psi_\varepsilon : C_B(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_B(\mathbb{R}^n)$  wohldefiniert, und es gilt

$$u \in C_B(\mathbb{R}^n) \implies \Psi_\varepsilon(u) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C_B(\mathbb{R}^n).$$

**Definition 5.14** Der Operator  $\Psi_\varepsilon : C_B(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_B(\mathbb{R}^n)$  aus (5.15) nennt man den Friedrichs'schen<sup>5</sup> Glätter oder Mollifier.

**Lemma 5.15** Sei  $u \in C_B(\mathbb{R}^n)$ . Es gilt

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Psi_\varepsilon(u)(y) = u(y). \quad (5.16)$$

Für  $u \in C_B^1(\mathbb{R}^n)$  gilt sogar

$$|\Psi_\varepsilon(u)(y) - \delta_y u| \leq \|u\|_{C_B^1(\mathbb{R}^n)} \varepsilon. \quad (5.17)$$

**Bemerkung 5.15.1** Man kann dieses Ergebnis wie folgt lesen:  $\{\Psi_\varepsilon(\cdot)(y)\}_{\varepsilon > 0}$  sind reguläre Distributionen, die die Dirac- $\delta$ -Funktion an der Stelle  $y$  approximieren, wenn  $\varepsilon \downarrow 0$ .

**Bemerkung 5.15.2** Weil (5.16) gilt, sind  $\Psi_\varepsilon(u)$  für  $\varepsilon > 0$  unendlich oft differenzierbare Funktionen, die  $u \in C_B(\mathbb{R}^n)$  punktweise approximieren. Wenn  $u \in C_B^1(\mathbb{R}^n)$  ist diese Approximation wegen (5.17) sogar gleichmäßig.

<sup>5</sup>Kurt Otto Friedrichs, (1901 Kiel – 1982 New Rochelle, New York) war ein deutsch-amerikanischer Mathematiker

**Beweis.** Da  $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(x) dx = 1$  und  $u$  stetig ist, gilt

$$\begin{aligned} |\Psi_\varepsilon(u)(y) - u(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(y-x) (u(x) - u(y)) dx \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(y-x) \sup_{z \in B_\varepsilon(y)} |u(z) - u(y)| dx = \sup_{z \in B_\varepsilon(y)} |u(z) - u(y)| \rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \downarrow 0. \end{aligned}$$

Wenn  $u \in C_B^1(\mathbb{R}^n)$ , hat man  $|u(z) - u(y)| \leq \|u\|_{C_B^1(\mathbb{R}^n)} |z - y|$ , und es folgt die letzte Ungleichung. ■

**Beispiel 5.16** Man könnte versuchen Distributionen als Anfangswerte zu zulassen. Wir betrachten

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t) & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (5.18)$$

und nehmen hier statt die Funktion  $u_0$  die  $\delta$ -Distribution  $\delta_y$  und setzen  $v_0 = f = 0$ . Man bekomme formell eine distributionelle Lösung  $u(\cdot, t) = \frac{1}{2} \delta_{y-ct} + \frac{1}{2} \delta_{y+ct} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  ( $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ). Hätte man  $u_0 = \sum_i \delta_{y_i}$ , würde man durch die Linearität  $u(\cdot, t) = \frac{1}{2} \sum_i (\delta_{y_i-ct} + \delta_{y_i+ct})$  als Lösung haben. Für eine allgemeine Anfangsbedingung  $u_0(\cdot)$  kann man formell schreiben (wir tun mal so, als ob  $\delta_y$  eine Funktion wäre):

$$u_0(x) = \int_{y \in \mathbb{R}} \delta_y(x) u_0(y) dy.$$

Die Lösung wäre

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{y \in \mathbb{R}} \left( \frac{1}{2} \delta_{y-ct}(x) + \frac{1}{2} \delta_{y+ct}(x) \right) u_0(y) dy \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}} \left( \frac{1}{2} \delta_y(x+ct) + \frac{1}{2} \delta_y(x-ct) \right) u_0(y) dy = \frac{1}{2} u_0(x+ct) + \frac{1}{2} u_0(x-ct). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Wenn auch dies alles mathematisch erst noch mal zwielfichtig ist, kann man leicht kontrollieren, dass das Endergebnis vernünftig ist. Für  $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$  ist (5.19) tatsächlich die klassische Lösung, die wir schon vorher sahen.

**Beispiel 5.17** Man betrachte  $f(x) = \frac{1}{2} |x|$ . Dann ist  $f'$  und  $f''$  nicht überall definiert. Definiert man  $F_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  oder  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  durch

$$F_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx,$$

dann folgt

$$\begin{aligned} F_f'(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \text{sign}(x) \varphi(x) dx, \\ F_f''(\varphi) &= \varphi(0). \end{aligned}$$

Man bemerke, dass

$$f'(x) = \frac{1}{2} \text{sign}(x) \text{ für } x \neq 0.$$

Man zeigt diese Behauptungen durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} F'_f(\varphi) &= -F_f(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}|x|\varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2}x\varphi'(x) dx - \int_0^{\infty} \frac{1}{2}x\varphi'(x) dx = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \left[ \frac{1}{2}x\varphi(x) \right]_{-m}^0 - \int_{-m}^0 \frac{1}{2}\varphi(x) dx \right) - \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \left[ \frac{1}{2}x\varphi(x) \right]_0^m - \int_0^m \frac{1}{2}\varphi(x) dx \right) = \\ &= -\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2}\varphi(x) dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{2}\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\text{sign}(x)\varphi(x) dx, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F''_f(\varphi) &= -F'_f(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\text{sign}(x)\varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2}\varphi'(x) dx - \int_0^{\infty} \frac{1}{2}\varphi'(x) dx = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2}\varphi(x) \right]_{-m}^0 - \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2}\varphi(x) \right]_0^m = \varphi(0) = \delta(\varphi). \end{aligned}$$

Im Sinne von Distributionen gilt also:

$$\left(\frac{1}{2}|\cdot|\right)' = \frac{1}{2}\text{sign}(\cdot) \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{2}\text{sign}(\cdot)\right)' = \delta(\cdot).$$

**Beispiel 5.18** Sei  $f \in L^1_{\text{lokal}}(\mathbb{R}^n)$  definiert durch

$$f(x) = |x|^{2-n}.$$

Dann ist

$$F_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n}\varphi(x) dx$$

wohldefiniert für  $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  oder  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Es folgt

$$\begin{aligned} (\Delta F_f)(\varphi) &= F_f(\Delta\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n}\Delta\varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} |x|^{2-n}\Delta\varphi(x) dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \int_{|x|=\varepsilon} (|x|^{2-n}\nabla\varphi(x) - \nabla|x|^{2-n}\varphi(x)) \cdot \nu d\sigma_x + \int_{|x|>\varepsilon} \Delta|x|^{2-n}\varphi(x) dx \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \varepsilon^{2-n}\mathcal{O}(\varepsilon^{n-1}) - \int_{|x|=\varepsilon} (2-n)|x|^{-n}x\varphi(x) \cdot \frac{-x}{|x|} d\sigma_x + 0 \right) = \\ &= -\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x|=\varepsilon} (2-n)|x|^{-n}x\varphi(x) \cdot \frac{-x}{|x|} d\sigma_x = (2-n)\omega_n\varphi(0). \end{aligned}$$

Wir nehmen  $\omega_n = \int_{\partial B_1(0)} 1 d\sigma$  wie auf Seite 17. Dann gilt im Sinne von Distributionen:

$$-\Delta \left( \frac{1}{(n-2)\omega_n} |\cdot|^{2-n} \right) = \delta(\cdot).$$

Hier ist  $\delta$  das  $n$ -dimensionale Dirac-Funktional in 0:

$$\delta(\varphi) = \varphi(0) \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \text{oder } \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 6



## Die Wellengleichung in mehr Dimensionen

### 6.1 Kirchhoff für Raumdimension 3

Das Anfangswertproblem auf dem ganzen Raum ist

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^3, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (6.1)$$

Wir versuchen anzugeben, wie man zu einer Lösungsformel kommt und betrachten dazu erst den radialsymmetrischen Fall:  $u(x_1, x_2, x_3, t) = U(|x|, t)$ . Weil in 3 Dimensionen  $\Delta u(|x|) = r^{-2} \partial_r r^2 \partial_r u(r)|_{r=|x|}$  gilt, wird die Differentialgleichung wie folgt

$$\left( \partial_t^2 - c^2 \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r \right) U(r, t) = 0.$$

Setzen wir  $V(r, t) = rU(r, t)$  so folgt mit Hilfe von

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r \frac{1}{r} V(r, t) &= \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \left( \frac{1}{r} V_r(r, t) - \frac{1}{r^2} V(r, t) \right) = \\ &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r V_r(r, t) - V(r, t)) = \frac{1}{r} V_{rr}(r, t), \end{aligned}$$

dass

$$(\partial_t^2 - c^2 \partial_r^2) V(r, t) = 0.$$

Die Lösungen dieser letzten Gleichung haben die Form

$$V(r, t) = \Phi(r - ct) + \Psi(r + ct),$$

und man findet

$$U(r, t) = \frac{1}{r} \Phi(r - ct) + \frac{1}{r} \Psi(r + ct).$$

Es bedeutet, dass wir formell Lösungen von (5.1) finden, die wie folgt sind:

$$u(x, t) = \frac{1}{|x|} \Phi(|x| - ct) + \frac{1}{|x|} \Psi(|x| + ct).$$

Diese Funktionen erinnern uns an die mit Hilfe von charakteristischen Kurven definierten Lösungen in einer Raumdimension. Eine Funktion  $u(x, t) = \frac{1}{|x|} \Phi(|x| - ct)$  wäre eine radialsymmetrische Welle, die sich mit Geschwindigkeit  $c$  nach außen bewegt. Analog einer Raumdimension könnte man eine Distribution als generalisierte Lösung ansetzen:

$$u(x, t) = \frac{1}{|x|} \delta(|x| - ct) = \frac{1}{ct} \delta(|x| - ct).$$

Als Distribution wäre das:

$$\begin{aligned} F_{u(\cdot, t)}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{ct} \delta(|x| - ct) \varphi(x) dx = \\ &= \frac{1}{ct} \int_{|x|=ct} \varphi(x) d\sigma_x = ct \int_{|z|=1} \varphi(ctz) d\sigma_z =: ct \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} \varphi(ct\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Für  $\omega \in \mathbb{S}^2$  schreiben wir weiter  $|\omega| = 1$ . Es gilt  $\lim_{t \downarrow 0} F_{u(\cdot, t)}(\varphi) = 0$  und

$$\lim_{t \downarrow 0} \partial_t F_{u(\cdot, t)}(\varphi) = \lim_{t \downarrow 0} \int_{|\omega|=1} (c \varphi(ct\omega) + c^2 t \omega \cdot \nabla \varphi(ct\omega)) d\omega = 4\pi c \varphi(0).$$

Ähnlich wäre  $u(x, t) = \frac{1}{|x|} \delta(|x - y| - ct)$  eine Welle, die in  $y$  startet. Wie in einer Dimension kann man vermuten, dass

$$u(x, t) = \text{“} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi c^2 t} \delta(|x - y| - ct) v_0(y) dy \text{”} = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y$$

eine Lösung wäre für  $f = u_0 = 0$  von (6.1).

Die folgende Proposition sagt sogar, dass man auch für  $u_0$  eine verwandte Formel findet.

**Theorem 6.1 (Die Formel von Kirchhoff<sup>1</sup>)** Sei  $f = 0$ ,  $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$  und  $v_0 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ . Dann hat (6.1) eine Lösung in  $C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ , nämlich

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y + \partial_t \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) \quad (6.2)$$

**Bemerkung 6.1.1** Betrachtet man wiederum das Einflussgebiet und das Abhängigkeitsgebiet wie auch in einer Dimension, dann bekommt man zwei Kegelränder, die schematisch (die Bodenplatte soll  $\mathbb{R}^3$  darstellen) in Abbildung 6.1 dargestellt sind.

**Bemerkung 6.1.2** Die Formel in (6.2) kann man auch wie folgt schreiben:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|=ct} (tv_0(y) + u_0(y) + \nabla u_0(y) \cdot (y - x)) d\sigma_y$$

**Beweis.** Wir zeigen erst, dass die Anfangsbedingungen erfüllt sind. Weil  $v_0$  stetig differenzierbar und  $u_0$  zweimal stetig differenzierbar ist, folgt

<sup>1</sup>Gustav Robert Kirchhoff, Königsberg 1824 – Berlin 1887.



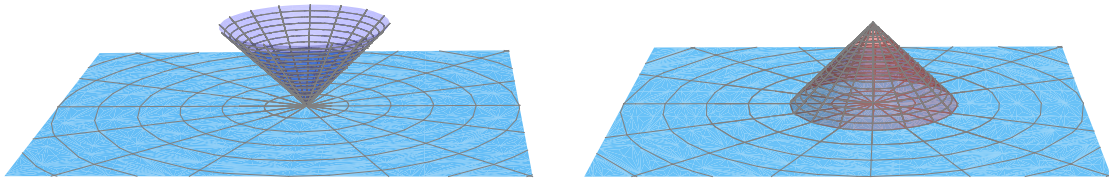


Abbildung 6.1: Einfluss- und Abhängigkeitsgebiet in 3 Dimensionen. Nach oben die Zeit; in blau das dreidimensionale(!)  $\mathbb{R}^3$  für  $t = 0$ . Nur der Rand des Kegels zählt.

- für die erste Randwertbedingung:

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y = \lim_{t \downarrow 0} \frac{t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} v_0(x + ct\omega) d\omega = 0,$$

$$\begin{aligned} & \lim_{t \downarrow 0} \partial_t \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) = \\ & = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} (u_0(x + ct\omega) + ct\omega \cdot \nabla u_0(x + ct\omega)) d\omega = u_0(x); \end{aligned}$$

- für die zweite Randwertbedingung:

$$\lim_{t \downarrow 0} \partial_t \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y \right) = v_0(x)$$

und

$$\begin{aligned} & \lim_{t \downarrow 0} \partial_t^2 \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) = \\ & = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \left( 2c\omega \cdot \nabla u_0(x + ct\omega) + ct \sum_{i,j=1}^3 \omega_i \omega_j \partial_{x_i} \partial_{x_j} u_0(x + ct\omega) \right) d\omega = \\ & = \lim_{t \downarrow 0} \frac{2c}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \omega \cdot \nabla u_0(x + ct\omega) d\omega = 0. \end{aligned}$$

Beim letzten Schritt haben wir benutzt, dass

$$\left| \int_{|\omega|=1} \omega_i \partial_{x_i} u_0(x + ct\omega) d\omega \right| \leq \partial_{x_i} u_0(x) \int_{|\omega|=1} \omega_i d\omega + \int_{|\omega|=1} ct \|u\|_{C^2(\overline{B_{ct}(x)})} d\omega = \mathcal{O}(t).$$

Bevor wir zeigen können, dass die Differentialgleichung erfüllt ist, brauchen wir das folgende Lemma. ■

**Lemma 6.2** Sei  $u \in C^2(\overline{B_R(0)})$  mit  $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$  und  $n > 2$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{|y|<R} \frac{-\Delta u(y)}{\omega_n |y|^{n-2}} dy = \\ & = u(0) - \frac{1}{(n-2)\omega_n R^{n-2}} \int_{|y|=R} \nabla u(y) \cdot \nu d\sigma_y - \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{|y|=R} u(y) d\sigma_y. \end{aligned}$$

**Bemerkung 6.2.1** Für  $n = 3$  folgt

$$\int_{|y|<R} \frac{-\Delta u(y)}{4\pi|y|} dy = u(0) - \frac{1}{4\pi R} \int_{|y|=R} \nabla u(y) \cdot \nu d\sigma_y - \frac{1}{4\pi R^2} \int_{|y|=R} u(y) d\sigma_y.$$

**Beweis.** Man braucht Gauß,

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} (v \nabla u - \nabla v u) d\sigma_x + \int_{\Omega} (\Delta v) u dx,$$

die Tatsache, dass  $y \mapsto |y|^{2-n}$  harmonisch außerhalb 0 ist,

$$\Delta |y|^{2-n} = \nabla \cdot \nabla |y|^{2-n} = \nabla \cdot ((2-n)|y|^{-n} y) = (2-n)(-n|y|^{-n-2} y \cdot y + n|y|^{-n}) = 0$$

und, dass  $y \mapsto |y|^{2-n}$  integrierbar ist bei 0:

$$\begin{aligned} \int_{|y|<R} \frac{-\Delta u(y)}{|y|^{n-2}} dy &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon < |y| < R} \frac{-\Delta u(y)}{|y|^{n-2}} dy = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \left( \int_{|y|=R} - \int_{|y|=\varepsilon} \right) (-|y|^{2-n} \nabla u(y) + u(y) \nabla |y|^{2-n}) \cdot \nu d\sigma_y + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\varepsilon < |y| < R} -\Delta |y|^{2-n} u(y) dy \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \left( \int_{|y|=R} - \int_{|y|=\varepsilon} \right) \left( -|y|^{2-n} \nabla u(y) \cdot \nu + u(y) (2-n) |y|^{-n} y \cdot \frac{y}{|y|} \right) d\sigma_y \right) = \\ &= \int_{|y|=R} (-R^{2-n} \nabla u(y) \cdot \nu + u(y) (2-n) R^{1-n}) d\sigma_y + \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y|=\varepsilon} (\varepsilon^{2-n} \nabla u(y) \cdot \nu + u(y) (n-2) \varepsilon^{1-n}) d\sigma_y = \\ &= \frac{-1}{R^{n-2}} \int_{|y|=R} \nabla u(y) \cdot \nu d\sigma_y - \frac{n-2}{R^{n-1}} \int_{|y|=R} u(y) d\sigma_y + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{O}(\varepsilon) + (n-2) \omega_n u(0). \end{aligned}$$

Beim letzten Schritt ist verwendet worden, dass der Flächeninhalt von  $\partial B_{\varepsilon}(0)$  gleich  $\omega_n \varepsilon^{n-1}$  ist. ■

**Fortsetzung des Beweises von Theorem 6.1.**

Wir zeigen nun, dass die Differentialgleichung erfüllt ist und fangen an mit dem Teil, der zu  $v_0$  gehört:

$$\begin{aligned} c^2 \Delta_x \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y &= \Delta_x \frac{c^2 t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} v_0(x + ct\omega) d\omega = \\ &= \frac{c^2 t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \Delta_x v_0(x + ct\omega) d\omega = \frac{c^2 t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} (\Delta v_0)(x + ct\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{4\pi t} \int_{|z|=ct} \Delta v_0(x + z) d\sigma_z = \int_{|z|=ct} \frac{c}{4\pi |z|} \Delta v_0(x + z) d\sigma_z = \\ &= \partial_t \int_{r=0}^{ct} \int_{|z|=r} \frac{1}{4\pi |z|} \Delta v_0(x + z) dr d\sigma_z = \partial_t \int_{|z|<ct} \frac{1}{4\pi |z|} \Delta v_0(x + z) dz = \\ &= \partial_t \left( -v_0(x) + \frac{1}{4\pi ct} \int_{|z|=ct} \nabla v_0(x + z) \cdot \nu d\sigma_z + \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|z|=ct} v_0(x + z) d\sigma_z \right) = (*). \end{aligned}$$

Beim letzten Schritt ist das Lemma verwendet worden. Es folgt weiter, dass

$$\begin{aligned}
 (*) &= \frac{1}{4\pi} \partial_t \left( \int_{|z|=ct} \frac{1}{|z|} \nabla v_0(x+z) \cdot \nu \, d\sigma_z + \int_{|z|=ct} \frac{1}{|z|^2} v_0(x+z) \, d\sigma_z \right) \\
 &= \partial_t \left( \frac{1}{4\pi} \int_{|z|=ct} \frac{1}{|z|^2} \nu \cdot \nabla (|z| v_0(x+z)) \, d\sigma_z \right) \\
 &= \partial_t^2 \left( \frac{1}{4\pi c} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon < |z| < ct} \frac{1}{|z|^2} \nu \cdot \nabla (|z| v_0(x+z)) \, dz \right) \\
 &= \partial_t^2 \left( \frac{1}{4\pi c} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|\omega|=1} \left( \int_{\varepsilon < r < ct} \frac{1}{r^2} \partial_r (r v_0(x+r\omega)) \, r^2 dr \right) d\omega \right) \\
 &= \partial_t^2 \left( \frac{1}{4\pi c} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|\omega|=1} (ct v_0(x+ct\omega) - \varepsilon v_0(x+\varepsilon\omega)) \, d\omega \right) \\
 &= \partial_t^2 \left( \frac{t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} v_0(x+ct\omega) \, d\omega \right) \\
 &= \partial_t^2 \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) \, d\sigma_y \right).
 \end{aligned}$$

Für den zweiten Teil können wir uns nun kurz fassen:

$$\begin{aligned}
 c^2 \Delta_x \partial_t \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) \, d\sigma_y \right) &= \partial_t c^2 \Delta_x \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) \, d\sigma_y \right) \\
 &= \partial_t^2 \partial_t \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) \, d\sigma_y \right).
 \end{aligned}$$

Der Beweis ist komplett. ■

Auch hier kann man für  $f$  das Prinzip von Duhamel verwenden. Da dieses Prinzip in jeder Dimension gilt, betrachten wir gleich die allgemeine Version.

## 6.2 Ergebnisse für beliebige Dimensionen

**Proposition 6.3 (Prinzip von Duhamel)** Sei  $f \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ ,  $u_0 = v_0 = 0$ . Wenn für jedes  $s \geq 0$  die Funktion

$$(x, t) \mapsto U(x, t; s) \in C^2(\{(x, t, s); x \in \mathbb{R}^n \text{ und } 0 \leq s \leq t < \infty\})$$

eine Lösung ist von

$$\begin{cases} U_{tt}(x, t; s) - c^2 \Delta U(x, t; s) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t > s, \\ U(x, t; s) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t = s, \\ U_t(x, t; s) = f(x, s) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t = s, \end{cases} \quad (6.3)$$

dann ist

$$u(x, t) = \int_0^t U(x, t; s) \, ds. \quad (6.4)$$

eine Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (6.5)$$

**Beweis.** Ähnlich wie in einer Dimension zeigt man:

$$\begin{aligned}\partial_t^2 \int_0^t U(x, t; s) ds &= \partial_t \left( U(x, t; s)_{s=t} + \int_0^t \partial_t U(x, t; s) ds \right) = \partial_t \int_0^t \partial_t U(x, t; s) ds = \\ &= (\partial_t U(x, t; s))_{s=t} + \int_0^t \partial_t^2 U(x, t; s) ds = f(x, s) + \int_0^t c^2 \Delta U(x, t; s) ds.\end{aligned}$$

■

Die Ableitung der Kirchhoffschen Formel mag rätselhaft erscheinen. Wenn man hinterher zeigen kann, dass das Ergebnis stimmt, soll uns das eigentlich keine Sorgen bereiten. Trotzdem ist es vernünftig, dieser Ableitung etwas Beachtung zu geben. Die Idee ist wie folgt gekommen. Die  $\Delta$ -Differentialoperator ist drehungsinvariant:

$$\Delta(u \circ R) = (\Delta u) \circ R \text{ für beliebige Drehungen } R,$$

denn sei  $M$  eine orthogonale Matrix, so findet man  $MM^T = I$  und

$$\begin{aligned}\Delta(u(Mx)) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j,k=1}^n M_{ji} M_{ki} (\partial_k \partial_j u)(Mx) = \sum_{j,k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n M_{ji} M_{ki} \right) (\partial_k \partial_j u)(Mx) = \\ &= \sum_{j,k=1}^n (MM^T)_{jk} (\partial_k \partial_j u)(Mx) = \sum_{k=1}^n (\partial_k^2 u)(Mx) = (\Delta u)(Mx).\end{aligned}$$

**Proposition 6.4 (Euler - Poisson - Darboux<sup>2</sup>)** Wenn  $(t, x) \mapsto u(t, x)$  eine Lösung ist von

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t > 0, \\ u(x, t) = g(x) \text{ und } u_t(x, t) = h(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (6.6)$$

dann ist

$$U(r, t) := \frac{\int_{\partial B_r(x)} u(y, t) d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(x)} 1 d\sigma_y} \quad (6.7)$$

mit

$$G(r) := \frac{\int_{\partial B_r(x)} g(y) d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(x)} 1 d\sigma_y} \quad \text{und} \quad H(r) := \frac{\int_{\partial B_r(x)} h(y) d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(x)} 1 d\sigma_y} \quad (6.8)$$

eine Lösung von

$$\begin{cases} U_{tt}(r, t) - c^2 r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r U(r, t) = 0 & \text{für } r > 0 \text{ und } t > 0, \\ U(r, t) = G(r) \text{ und } U_t(r, t) = H(r) & \text{für } r > 0. \end{cases} \quad (6.9)$$

**Bemerkung 6.4.1** Die Differentialgleichung in (6.9) nennt man die Euler-Poisson-Darboux Gleichung.

Diese Proposition liefert uns auch die Eindeutigkeit der Lösung in Raumdimension 3.

**Theorem 6.5** Das Anfangswertproblem für die Wellengleichung in (6.1) hat höchstens eine Lösung in  $C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ .

<sup>2</sup> • Leonhard Euler, Basel 1707 – St. Petersburg 1783. • Siméon Denis Poisson, 1781 – 1840, hat sich nie weit von Paris entfernt. Die folgende Aussage wird ihm zugeschrieben: *La vie n'est bonne qu'à deux choses: à faire des mathématiques et à les professer*. Siehe Seite 71 für ein Bild. • Jean Gaston Darboux, Nîmes 1842 – Paris 1917.

**Beweis.** Wenn (6.1) zwei Lösungen hat, sagen wir  $u_1$  und  $u_2$ , dann löst  $w = u_1 - u_2$  das Randwertproblem mit  $f = u_0 = v_0 = 0$ . Nehmen wir an, es gibt  $w(\tilde{x}, \tilde{t}) \neq 0$ . Ohne Verlust der Allgemeinheit nehmen wir  $\tilde{x} = 0$ . Weil  $\Delta$  invariant unter orthogonalen Abbildungen ist, folgt  $U_{tt} - c^2 r^{-2} \partial_r r^2 \partial_r U = 0$  für

$$U(r, t) = \frac{\int_{\partial B_r(0)} w(y, t) d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(0)} 1 d\sigma_y}.$$

Setzen wir

$$V(r, t) = rU(r, t)$$

so folgt

$$r^{-2} \partial_r r^2 \partial_r U = r^{-2} \partial_r r^2 \partial_r r^{-1} V = r^{-2} \partial_r (-V + r \partial_r V) = r^{-1} \partial_r^2 V$$

und weiter, dass  $V(r, t)$  eine Lösung der Wellengleichung in einer Dimension ist mit  $V(r, 0) = V_t(r, 0) = 0$  für  $r > 0$  und  $V(0, t) = 0$ . Diese Lösung ist eindeutig und daher gilt  $V(r, t) = 0$  für alle  $r, t > 0$  und auch  $U(r, t) = 0$  für alle  $r, t > 0$ . Dann findet man

$$w(0, \tilde{t}) = \frac{1}{4\pi} \int_{M \in SO(3)} w(M0, \tilde{t}) d\sigma = \frac{1}{4\pi} U(0, \tilde{t}) = 0,$$

und dies ist ein Widerspruch. ■

## 6.3 Poisson für Raumdimension 2

Eine Lösungsformel wie die von Kirchhoff lässt sich in 2 Dimensionen nicht direkt herleiten. Wenn man die Formel in drei Dimensionen verwendet für Funktionen die in einer Richtung konstant sind, bekommt man eine Formel für das zweidimensionale Problem. Anders gesagt, statt

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ und } u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (6.10)$$

betrachten wir das ähnliche Problem in  $\mathbb{R}^3$  mit  $\tilde{u}_0(x_1, x_2, x_3) = u_0(x_1, x_2)$  und  $\tilde{v}_0(x_1, x_2, x_3) = v_0(x_1, x_2)$ . Die Kirchhoffsche Formel gibt uns eine Lösung  $\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ , nämlich

$$\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\substack{|y-x|=ct \\ y \in \mathbb{R}^3}} \tilde{v}_0(y) d\sigma_y + \partial_t \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\substack{|y-x|=ct \\ y \in \mathbb{R}^3}} \tilde{u}_0(y) d\sigma_y \right).$$

Weil  $\tilde{u}_0$  und  $\tilde{v}_0$  jedoch nicht von  $x_3$  abhängen, hängt auch  $\tilde{u}$  nicht von  $x_3$  ab. Es folgt außerdem, dass

$$\begin{aligned} \int_{|y-x|=ct, y \in \mathbb{R}^3} \tilde{u}_0(y_1, y_2, y_3) d\sigma_y &= \int_{|y-(x_1, x_2, 0)|=ct, y \in \mathbb{R}^3} u_0(y_1, y_2) d\sigma_y = \\ &= 2 \int_{|z| \leq ct, z \in \mathbb{R}^2} u_0(x+z) \sqrt{1 + |\nabla w(z)|^2} dz. \end{aligned} \quad (6.11)$$



Hier beschreibt  $w$  die Höhe  $y_3$  der Sphäre als Funktion von  $(z_1, z_2)$ , das heißt

$$(y_1, y_2, y_3) = \gamma(z_1, z_2) := (x_1 + z_1, x_1 + z_2, w(z_1, z_2)) \text{ mit } w(z_1, z_2) = \pm \sqrt{c^2 t^2 - z_1^2 - z_2^2}.$$

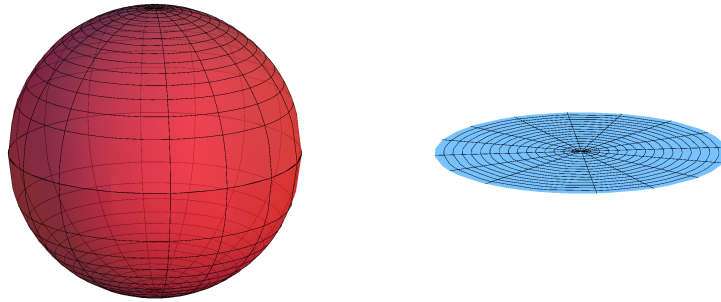


Abbildung 6.2: Statt über die Sphäre  $\partial B_{ct}(x_1, x_2, 0)$  in  $\mathbb{R}^3$  integriert man über eine Scheibe  $B_{ct}(x_1, x_2)$  in  $\mathbb{R}^2$ .

Die 2 in (6.11) folgt, weil man zwei Hälften hat. Der Faktor  $\sqrt{1 + |\nabla w(z)|^2}$  folgt aus der Parametrisierung  $\gamma$  durch

$$\sqrt{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z_1} & \frac{\partial \gamma}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z_1} & \frac{\partial \gamma}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z_2} \end{pmatrix}} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial w}{\partial z_1} & \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial w}{\partial z_2} \\ \frac{\partial w}{\partial z_2} \frac{\partial w}{\partial z_1} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z_2} \frac{\partial w}{\partial z_2} \end{pmatrix}} = \sqrt{1 + |\nabla w(z)|^2}.$$

Mit

$$\sqrt{1 + |\nabla w(z)|^2} = \sqrt{1 + \frac{|z|^2}{c^2 t^2 - |z|^2}} = \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - |z|^2}}$$

findet man:

**Theorem 6.6 (Die Formel von Poisson)** Sei  $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$  und  $v_0 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ . Die Lösung von (6.10) ist für  $x \in \mathbb{R}^2$  und  $t > 0$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_{|y-x| \leq ct} \frac{v_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy + \partial_t \left( \frac{1}{2\pi c} \int_{|y-x| \leq ct} \frac{u_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy \right). \quad (6.12)$$

**Bemerkung 6.6.1** Betrachtet man wiederum das Einflussgebiet und das Abhängigkeitsgebiet wie auch in einer Dimension, dann bekommt man in Dimension 2 zwei gefüllte Kegel die in Abbildung 6.3 dargestellt sind.

**Bemerkung 6.6.2** Wenn man auch für eine rechte Seite  $f(x, t)$  lösen möchte, kann man wiederum das Prinzip von Duhamel verwenden.

**Bemerkung 6.6.3** Diese Idee in der Dimension abzusteigen wird Hadamard zugeschrieben.

**Lemma 6.7** Man kann die Formel in (6.12) wie folgt umschreiben:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi ct} \int_{|y-x| \leq ct} \frac{tv_0(y) + u_0(y) + \nabla u_0(y) \cdot (y-x)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy.$$

**Beweis.** Wir brauchen nur die zweite Hälfte von (6.12) zu betrachten und benutzen da die Substitution  $y = x + ctr\omega$  mit  $r \in (0, 1)$  und  $\omega \in \mathbb{R}^2$  mit  $|\omega| = 1$ . Mit  $dy = c^2 t^2 r dr d\omega$  folgt

$$\begin{aligned} \partial_t \left( \frac{1}{2\pi c} \int_{|y-x| \leq ct} \frac{u_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy \right) &= \partial_t \left( \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega|=1} \int_{r=0}^1 \frac{t u_0(x + ctr\omega)}{\sqrt{1-r^2}} r dr d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega|=1} \int_{r=0}^1 \frac{u_0(x + ctr\omega) + t cr\omega \cdot \nabla u_0(x + ctr\omega)}{\sqrt{1-r^2}} r dr d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi ct} \int_{|y-x| \leq ct} \frac{u_0(y) + (y-x) \cdot \nabla u_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy. \end{aligned}$$

■

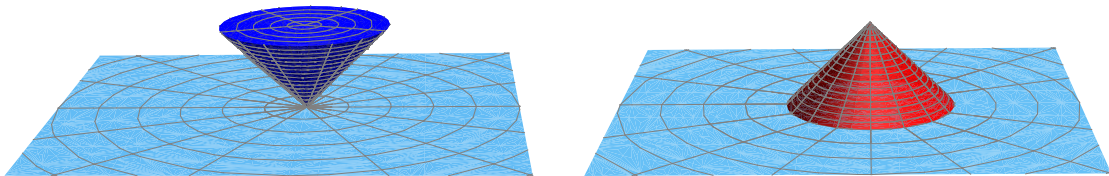


Abbildung 6.3: Einfluss- und Abhängigkeitsgebiet in 2 Dimensionen; die Zeit nach oben und in blau  $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ . Im Gegensatz zu 3 Dimensionen ist der Kegel nun gefüllt.

Die Eindeutigkeit der Lösung in zwei Raumdimensionen folgt aus der Eindeutigkeit in drei Raumdimensionen.

## 6.4 Raumdimensionen 4 und höher

Wir betrachten erst die ungeraden Raumdimensionen. Wenn wir da Existenz, Eindeutigkeit oder sogar eine explizite Formel für eine Lösung gefunden haben, können wir mit dem Absteigetricke von Hadamard auch die geraden Raumdimensionen angehen.

Wir definieren für eine Funktion  $(x, t) \mapsto u(x, t)$  die (6.6) erfüllt, wie in (6.7) die Funktion  $(r, t) \mapsto U(r, t)$ . Ähnlich werden auch  $G$  und  $H$  wie in (6.8) definiert.

**Lemma 6.8** Sei  $n \geq 3$  ungerade. Wenn  $(r, t) \mapsto U(r, t)$  eine  $\frac{1}{2}(n+1)$ -mal differenzierbare Lösung ist von

$$\begin{cases} U_{tt}(r, t) - c^2 r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r U(r, t) = 0 & \text{für } r > 0 \text{ und } t > 0, \\ U(r, t) = G(r) \text{ und } U_t(r, t) = H(r) & \text{für } r > 0, \end{cases} \quad (6.13)$$

dann ist  $(r, t) \mapsto \tilde{U}(r, t)$ , definiert durch

$$\tilde{U}(r, t) = (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} (r^{n-2} U(r, t))$$

eine Lösung von

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt}(r, t) - c^2 \partial_r^2 \tilde{U}(r, t) = 0 & \text{für } r > 0 \text{ und } t > 0, \\ \tilde{U}(r, t) = \tilde{G}(r) \text{ und } \tilde{U}_t(r, t) = \tilde{H}(r) & \text{für } r > 0, \end{cases} \quad (6.14)$$

für  $\tilde{G}(r) = (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} (r^{n-2} G(r))$  und  $\tilde{H}(r) = (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} (r^{n-2} H(r))$ .

**Beweis.** Schreibe  $k = \frac{1}{2}(n-3)$ . Man zeigt mit vollständiger Induktion nach  $k$ , dass

$$\partial_r^2 (r^{-1} \partial_r)^k r^{2k+1} f(r) = (r^{-1} \partial_r)^{k+1} r^{2k+2} \partial_r f(r).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} c^2 \partial_r^2 \tilde{U}(r, t) &= c^2 \partial_r^2 (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} (r^{n-2} U(r, t)) = \\ &= c^2 (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} (r^{-1} \partial_r) r^{n-1} \partial_r U(r, t) = \\ &= (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} r^{n-2} (c^2 r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r U(r, t)) = \\ &= \partial_t^2 (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} (r^{n-2} U(r, t)) = \partial_t^2 \tilde{U}(r, t). \end{aligned}$$

Die zugehörige Anfangsbedingungen kontrolliert man sofort. ■

Man kann nun wieder raten, wie die Lösungsformel in ungeraden Dimensionen sein wird für die Wellengleichung:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = 0 & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (6.15)$$

Verwendet man den Absteigetrick von Hadamard, dann findet man auch eine Formel für gerade Raumdimensionen.

Die Eindeutigkeit einer solchen Lösung kann man mit Hilfe von Lemma 6.8 wie in Theorem 6.5 beweisen.

**Theorem 6.9** Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ,  $f = 0$ ,  $u_0 \in C^{m+2}(\mathbb{R}^n)$  und  $v_0 \in C^{m+1}(\mathbb{R})$ .

- Wenn  $n$  ungerade ist, hat (6.15) die folgende Lösung:

$$u(x, t) = C_n \left( (t^{-1} \partial_t)^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{c^{n-1} t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y + \partial_t (t^{-1} \partial_t)^{\frac{n-3}{2}} \left( \frac{1}{c^{n-1} t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) \right).$$

$$\text{Es gilt } C_n = \frac{1}{\omega_n (n-2)(n-4) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1}.$$

- Wenn  $n$  gerade ist, hat (6.15) die folgende Lösung:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= D_n \left( (t^{-1} \partial_t)^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{c^{n-1}} \int_{|y-x| \leq ct} \frac{v_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} d\sigma_y + \right. \\ &\quad \left. + \partial_t (t^{-1} \partial_t)^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{c^{n-1}} \left( \int_{|y-x| \leq ct} \frac{u_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} d\sigma_y \right) \right). \end{aligned}$$

$$\text{Es gilt } D_n = \frac{1}{\omega_n n (n-2)(n-4) \dots 4 \cdot 2}.$$

$$\text{Wie vorher } \omega_n = \int_{\partial B_1(0)} 1 d\sigma.$$

Die Beweise dieser Formeln sind ähnlich wie die für die Formeln von Kirchhoff (6.2) und Poisson (6.12).



## 6.5 Gebiete mit Rand

Eine natürliche Frage ist was passiert wenn man die Wellengleichung nicht auf ganz  $\mathbb{R}^n$  sondern nur auf ein Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  lösen möchte. Man kann zeigen, dass das folgende Anfangs/Randwertproblem sinnvoll ist im Sinne von Hadamard:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \Omega, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x, t) = \varphi(x, t) & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (6.16)$$

Nur in einigen einfachen Fälle, wie zum Beispiel beim Halbraum  $\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ , kann man einen expliziten Formel für die Lösung herleiten. Für allgemeinere Gebiete gibt es kaum derartige explizite Formel und müssen wir andere mathematische Werkzeuge anwenden. Aber auch ohne solchen Formeln kann man die Fragen von Hadamard zu ein solches Problem angehen und für (6.16) Existenz, Eindeutigkeit und Robustheit zeigen.

**Theorem 6.10** *Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$ . Dann hat (6.16) höchstens eine Lösung in  $C^2(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$ .*

**Beweis.** Wenn es zwei Lösungen gäbe, sagen wir  $u_1$  und  $u_2$ , dann wäre  $u = u_1 - u_2$  eine Lösung von (6.16) mit  $f = u_0 = v_0 = \varphi = 0$ . Betrachte die Funktion

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t(x, t)^2 + c^2 |\nabla u(x, t)|^2) dx.$$

Man nennt diese Funktion die Energie. Es gilt

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{\Omega} (u_t(x, t) u_{tt}(x, t) + c^2 \nabla u(x, t) \cdot \nabla u_t(x, t)) dx = \\ &= \int_{\Omega} (u_t(x, t) u_{tt}(x, t) + c^2 \nabla u(x, t) \cdot \nabla u_t(x, t)) dx = \\ &= \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u(x, t) u_t(x, t) d\sigma_x + \int_{\Omega} u_t(x, t) (u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t)) dx = 0. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt verwenden man, dass  $u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = 0$  und dass aus  $u(x, t) = 0$  für  $(x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+$  folgt  $u_t = 0$  auf  $\partial\Omega \times \mathbb{R}^+$ . Also gilt

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t(x, 0)^2 + c^2 |\nabla u(x, 0)|^2) dx = 0.$$

Hier verwendet man  $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ . Weil in  $E(t)$  die Summe zweier Quadraten ist, folgt  $u_t(x, t) = 0 = \nabla u(x, t)$  für alle  $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$ . Wenn alle Ableitungen 0 sind, ist die Funktion konstant. Weil  $u$  am Rand 0 ist, gilt  $u = 0$  auf  $\Omega \times \mathbb{R}^+$ . Es gibt also nur eine Lösung. ■



# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 7



## Die Wärmeleitungsgleichung I

Eine typische Frage bei der parabolischen Differentialgleichung  $(\partial_t - \Delta)u = 0$  betrifft die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega. \end{cases} \quad (7.1)$$

Der Wert  $u(t, x)$  stellt die Temperatur an der Stelle  $x$  zur Zeit  $t$  dar bei durch  $u_0$  gegebenen Anfangswerten. Wenn  $\Omega = \mathbb{R}^n$  braucht man keine Randwerte. Wenn es einen Rand  $\partial\Omega$  gibt, kann man aus physikalischen Gründen vermuten, dass ein solcher Rand die Lösung mitbestimmt. Es wäre möglich den Fall zu betrachten, dass der Rand isoliert ist und dies würde bedeuten, dass keine Wärme herausfließt:  $\partial_\nu u(x, t) = 0$  für  $x \in \partial\Omega$ . Statt eines isolierten Randes könnte man am Rand die Temperatur festlegen:  $u(x, t) = \varphi(x, t)$  für  $x \in \partial\Omega$ . Im Gegensatz zu der Wellengleichung werden wir bei der Wärmeleitungsgleichung sehen, dass dieser Einfluss vom Randverhalten sich mit unendlicher Geschwindigkeit im Gebiet verbreitet. Physikalisch widerspricht es der Annahme, dass sich nichts schneller als die Lichtgeschwindigkeit verbreiten kann.

### 7.1 Diffusionskern

Die Wärmeleitungsgleichung in Raumdimension 1

$$(\partial_t - \partial_x^2) u(x, t) = 0 \quad (7.2)$$

hat die folgende Skalierungseigenschaft. Wenn  $(x, t) \mapsto u(x, t)$  eine Lösung ist, dann ist  $(x, t) \mapsto u(cx, c^2t)$  für jede  $c \in \mathbb{R}^+$  auch eine Lösung. Weil dies für jedes  $c > 0$  gilt, könnte man vielleicht sogar  $c = t^{-1/2}$  nehmen und es wäre

$$(x, t) \mapsto u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right)$$

eine Lösung. Dann hätte man eine Funktion, die nur von einer Variablen abhängt, nämlich  $\xi := \frac{x}{\sqrt{t}}$ . Setzt man

$$v(\xi) = u(\xi, 1)$$

so folgt für  $v$  die folgende Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= (\partial_t - \partial_x^2) v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = v'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \frac{-x}{2t\sqrt{t}} - v''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \frac{1}{t} = \\ &= -\frac{1}{t} \left( \frac{1}{2}\xi v'(\xi) + v''(\xi) \right), \end{aligned}$$

und diese gewöhnliche Differentialgleichung kann man lösen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\xi v'(\xi) + v''(\xi) &= 0, \\ \frac{v''(\xi)}{v'(\xi)} &= -\frac{1}{2}\xi \quad (\text{oder } v'(\xi) = 0), \\ \ln |v'(\xi)| &= -\frac{1}{4}\xi^2 + c_1, \\ v'(\xi) &= c_2 e^{-\frac{1}{4}\xi^2}\end{aligned}$$

und man findet

$$u(x, t) = v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = c_2 \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi + c_3.$$

Wenn wir  $c_2 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$  und  $c_3 = 0$  setzen<sup>1</sup> folgt

$$U(x) := \lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Im Sinne von Distributionen gilt  $\partial_x U = \delta$  und mit einer Verschiebung

$$\partial_x U(\cdot - y) = \delta_y.$$

Dies läßt uns vermuten, dass man eine Lösung von

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (7.3)$$

bekommen könnte durch

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \partial_x \left( \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\frac{x-y}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi \right) dy.$$

Es gilt

$$\partial_x \left( \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\frac{x-y}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi \right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}$$

und das folgende Theorem.

**Theorem 7.1** Wenn  $u_0 \in C_b(\mathbb{R})$  (beschränkt und stetig), dann ist  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  wohldefiniert durch

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy \quad \text{für } t > 0.$$

Es gilt:

<sup>1</sup>Die Standardrechnung mit Polarkoordinaten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi = 2\sqrt{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{4}x^2} e^{-\frac{1}{4}y^2} dx dy} = 2\sqrt{\int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} r e^{-\frac{1}{4}r^2} dr d\varphi} = \sqrt{4\pi}.$$

- $u$  erfüllt die Differentialgleichung in (7.3);
- $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ ;
- $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = u_0(x)$  und
- für  $u$ , fortgesetzt durch  $u_0$  für  $t = 0$ , gilt  $u \in C_b(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ .

**Bemerkung 7.1.1** Die Funktion  $(x, t) \mapsto (4\pi t)^{-1/2} e^{-\frac{1}{4}(x)^2/t}$  nennt man die Fundamentallösung oder Diffusionskern für die Wärmeleitungsgleichung in Raumdimension 1.

**Bemerkung 7.1.2** Es gibt zwei wesentliche Unterschiede zu der Wellengleichung.

1. Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung hat eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.
2. Auch wenn  $u_0$  nur stetig ist, ist  $u(\cdot, t)$  für  $t > 0$  unendlich oft differenzierbar. Bei der Wellengleichung ist der Lösungsteil von  $u(\cdot, t)$  der von  $u_0$  abhängt genauso oft differenzierbar wie  $u_0$  (und der Teil von  $u(\cdot, t)$  der von  $v_0$  abhängt einmal mehr als  $v_0$ ).

**Beweis.** Die gleichmäßige Beschränktheit folgt aus

$$\left| \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy \right| \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \|u_0\|_\infty dy = \|u_0\|_\infty.$$

Stetigkeit und Differenzierbarkeit jeder Ordnung folgt für  $t > 0$  und  $x \in \mathbb{R}$  aus den Eigenschaften von  $\exp(-\frac{1}{4}(x-y)^2/t)$  und aus der dominierten Konvergenz. Also kann man die Folge von Differenzieren und Integrieren vertauschen. Es gilt  $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ .

Die Differentialgleichung folgt aus

$$(\partial_t - \partial_x^2) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy = \int_{\mathbb{R}} (\partial_t - \partial_x^2) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy = 0 \text{ für } t > 0.$$

Für  $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = u_0(x)$  bemerkt man, dass

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} u_0(x - \xi\sqrt{t}) d\xi.$$

Mit  $\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi = 1$  folgt, dass

$$u(x, t) - u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{|\xi| > t^{-1/4}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} \left( u_0(x - \xi\sqrt{t}) - u_0(x) \right) d\xi.$$

Schreiben wir  $\int_{\mathbb{R}} = \int_{|\xi| > t^{-1/4}} + \int_{|\xi| < t^{-1/4}}$ . Dann finden wir für  $t \downarrow 0$ , weil  $\|u_0\|_\infty < \infty$  gilt, dass

$$\left| \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{|\xi| > t^{-1/4}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} \left( u_0(x - \xi\sqrt{t}) - u_0(x) \right) d\xi \right| \leq \frac{4}{\sqrt{4\pi}} \|u_0\|_\infty \int_{t^{-1/4}}^\infty e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi$$

und

$$\int_{t^{-1/4}}^\infty e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi \leq \int_{t^{-1/4}}^\infty e^{-\frac{1}{4}\xi t^{-1/4}} d\xi = 4t^{1/4} e^{-\frac{1}{4}} \rightarrow 0 \text{ für } t \downarrow 0.$$

Wegen der Stetigkeit von  $u_0$  folgt, dass

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{|\xi| < t^{-\frac{1}{4}}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} \left( u_0(x - \xi\sqrt{t}) - u_0(x) \right) d\xi \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{|\xi| < t^{-\frac{1}{4}}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} \sup \{ |u_0(y) - u_0(x)|; |y - x| < t^{1/4} \} d\xi \leq \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi \sup \{ |u_0(y) - u_0(x)|; |y - x| < t^{1/4} \} = \\ & = \sup \{ |u_0(y) - u_0(x)|; |y - x| < t^{1/4} \} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Es gilt also  $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = u_0(x)$  und diese Konvergenz ist gleichmäßig auf beschränkten Intervallen und sogar gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$  wenn  $u_0$  gleichmäßig stetig ist. Weil

$$|u(x, t) - u_0(y)| \leq |u(x, t) - u_0(x)| + |u_0(x) - u_0(y)|$$

folgt wiederum mit der lokal gleichmäßigen Stetigkeit von  $u_0$ , dass

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (y,0) \\ t > 0}} u(x, t) = u_0(y)$$

und so auch die Stetigkeit der Erweiterung von  $u(\cdot, t)$  bei  $t = 0$  mit  $u_0$ . ■

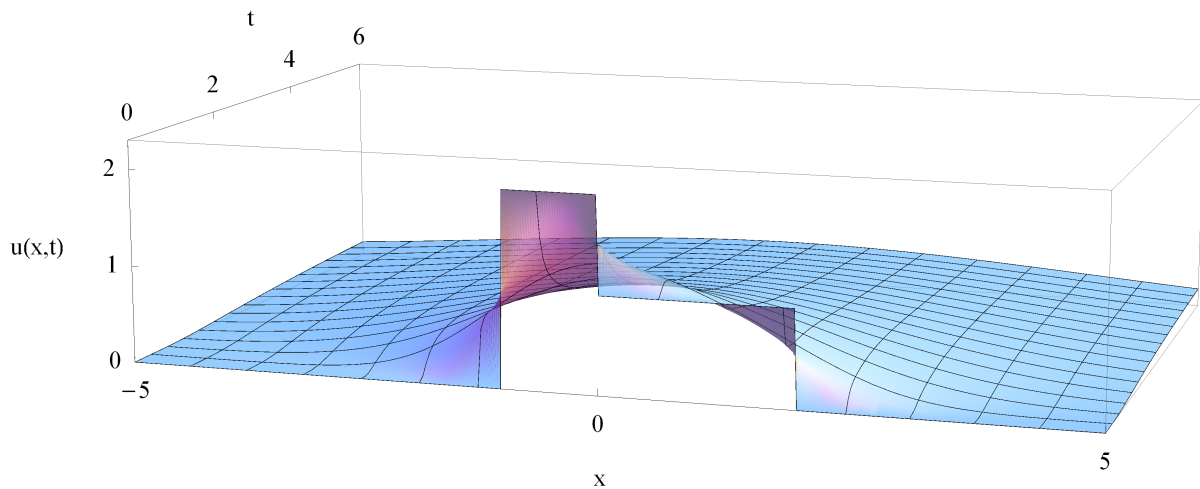


Abbildung 7.1: Darstellung der Funktion aus Beispiel 7.2.

**Beispiel 7.2** Man bekommt eine Lösung

$$u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \cap C^0(\mathbb{R} \times [0, \infty) \setminus \{(-1, 0), (0, 0), (2, 0)\})$$

von (7.3) mit

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (-\infty, -1), \\ 2 & \text{für } x \in [-1, 0), \\ 1 & \text{für } x \in [0, 2), \\ 0 & \text{für } x \in [2, \infty), \end{cases}$$

durch

$$u(x, t) = \operatorname{erf}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x-2}{2\sqrt{t}}\right)$$

mit

$$\operatorname{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-s^2} ds.$$

Obwohl diese Funktion nicht-stetige Anfangswerte hat, ist sie für  $t > 0$  sogar unendlich oft differenzierbar. Eine Skizze zu dieser Funktion findet man in Abbildung 7.1.

Für die Wärmeleitungsgleichung in mehr Dimensionen

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (7.4)$$

hat man:

**Theorem 7.3** Wenn  $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$  (beschränkt und stetig), dann ist  $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  wohldefiniert durch

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy \quad \text{für } t > 0. \quad (7.5)$$

Es gilt:

- $u$  erfüllt die Differentialgleichung in (7.4);
- $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ ;
- $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = u_0(x)$  und
- für  $u$ , fortgesetzt durch  $u_0$  für  $t = 0$ , gilt  $u \in C_b(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ .

**Bemerkung 7.3.1** Die Funktion  $p$ , definiert durch

$$p_n(x, t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t} \quad (7.6)$$

nennt man die Fundamentallösung oder Diffusionskern für die Wärmeleitungsgleichung in Raumdimension  $n$ .

**Beweis.** Wir zeigen, dass  $(x, t) \mapsto (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t}$  für  $t > 0$  die Differentialgleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} \partial_t \left( t^{-n/2} e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t} \right) &= t^{-n/2-1} \left( -\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}|x|^2 t^{-1} \right) e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t}, \\ \Delta \left( t^{-n/2} e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t} \right) &= \nabla \cdot \left( -\frac{1}{2}x t^{-n/2-1} e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t} \right) = t^{-n/2-1} \left( -\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}x \cdot x t^{-1} \right) e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t}. \end{aligned}$$

Der Rest des Beweises ist ähnlich wie in einer Dimension. ■

Wir betrachten anschließend die Wärmeleitungsgleichung mit einer Wärmequelle  $f$ :

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (7.7)$$

Dazu nehmen wir die Lösungen  $U(\cdot, \cdot; s)$  von

$$\begin{cases} \partial_t U(x, t; s) - \Delta U(x, t; s) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t > s, \\ U(x, s; s) = f(x, s) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (7.8)$$

Man bekommt eine Lösung von (7.8) durch eine Zeitverschiebung in (7.5):

$$U(x, t; s) = \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y, s) dy. \quad (7.9)$$

Ähnlich wie für die Wellengleichung hat man:

**Theorem 7.4 (Duhamel)** Sei  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ . Für die Funktion  $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$u(x, t) = \int_0^t U(x, t; s) ds,$$

mit  $U$  wie in (7.9), gilt

- $u$  erfüllt die Differentialgleichung in (7.7);
- $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = 0$ ;
- $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ .

**Beweis.** Weil  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  findet man  $U(\cdot, \cdot; s) \in C_b^2(\mathbb{R}^n \times [s, \infty))$  und es folgt<sup>2</sup>

$$\partial_t \int_0^t U(x, t; s) ds = U(x, t; s)|_{s=t} + \int_0^t \partial_t U(x, t; s) ds = f(x, t) + \int_0^t \partial_t U(x, t; s) ds.$$

Man bekommt

$$(\partial_t - \Delta) \int_0^t U(x, t; s) ds = U(x, t; s)|_{s=t} + \int_0^t (\partial_t - \Delta) U(x, t; s) ds = f(x, t)$$

und aus der Beschränktheit von  $f$ , die zur Beschränktheit von  $U$  führt, dass

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_0^t U(x, t; s) ds = 0.$$

Die letzte Aussage folgt aus  $U(\cdot, \cdot; s) \in C_b^2(\mathbb{R}^n \times [s, \infty))$ . ■

## 7.2 Mittelwert und Maximum

Für harmonische Funktionen ist in Proposition 2.5 gezeigt, dass im Zentrum einer Kugel der Mittelwert über der Kugeloberfläche angenommen wird. Ein Ergebnis ähnlicher Art gilt für die Wärmeleitungsgleichung. Weil  $t$  und  $x$  sich nicht gleich verhalten, ist das Ergebnis komplizierter.

**Definition 7.5** Wir definieren eine „Wärmeleitungskugel“  $W(x, t, r) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  durch

$$W(x, t, r) = \left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; s < t \text{ und } (4\pi(t-s))^{n/2} e^{\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} < r^n \right\}. \quad (7.10)$$

**Bemerkung 7.5.1** Sei  $p_n$  der Diffusionskern. Dann gilt:

$$(4\pi(t-s))^{n/2} e^{\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} < r^n \quad \Leftrightarrow \quad 1 < r^n p_n(x-y, t-s).$$

---

<sup>2</sup>Sei  $v \in C^1(\{(s, t); 0 \leq s \leq t < \infty\})$ . Dann gilt für die rechte Ableitung von  $\int_0^t v(s, t) ds$ , dass:

$$\begin{aligned} \partial_t^+ \left( \int_0^t v(s, t) ds \right) &= \lim_{h \downarrow 0} \left( \frac{\int_0^{t+h} v(s, t+h) ds - \int_0^t v(s, t) ds}{h} \right) = \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \left( \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(s, t+h) ds + \int_0^t \frac{v(s, t+h) - v(s, t)}{h} ds \right) = \\ &= v(t, t) + \int_0^t \partial_t^+ v(s, t) ds. \end{aligned}$$

Ähnliches gilt auch für die linke Ableitung.



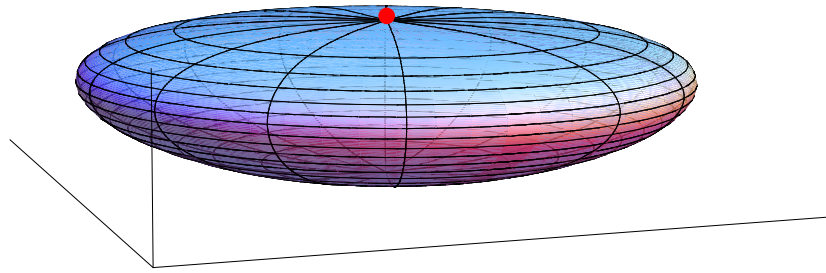


Abbildung 7.2: Eine Wärmeleitungskugel  $W(x, t, r)$  mit dem Punkt  $(x, t)$  in rot.

**Bemerkung 7.5.2** Einige Eigenschaften von  $W(x, t, r)$ .

- $\partial W(x, t, r) \in C^\infty$  für  $r > 0$ . Eine Wärmeleitungskugel ist ein konvexes Gebiet, bei dem  $(x, t)$  der höchste Punkt ist. Anders gesagt,  $(x, t)$  liegt in der Mitte oben auf  $W(x, t, r)$ .
- Für  $(y, s) \in W(x, t, r)$  gilt

$$t - \frac{1}{4\pi} r^2 < s < t \text{ und } |x - y| < c_n r$$

mit  $c_n = \left(\frac{n}{2\pi e}\right)^{n/2}$ . Das letztere folgt aus

$$\begin{aligned} |x - y|^n &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \frac{|x - y|^n}{(4(t - s))^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} (4\pi(t - s))^{n/2} e^{\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi^{n/2}} \sup_{\alpha > 0} \alpha^n e^{-\alpha^2} r^n = \left(\frac{n}{2\pi e}\right)^{n/2} r^n. \end{aligned}$$

- Weiter gilt

$$(y, s) \in W(x, t, c) \Leftrightarrow (ry, r^2 s) \in W(rx, r^2 t, rc).$$

**Lemma 7.6** Sei  $W(0, 0, r)$  wie in (7.10). Es gilt

$$\frac{1}{r^n} \iint_{W(0,0,r)} \frac{|y|^2}{4s^2} dy ds = 1.$$

**Beweis.** Der Ausdruck hängt nicht von  $r$  ab, denn es gilt

$$\frac{1}{r^n} \iint_{W(0,0,r)} \frac{|y|^2}{4s^2} dy ds = \frac{1}{r^n} \iint_{W(0,0,1)} \frac{|ry|^2}{4(r^2 s)^2} r^n dy r^2 ds = \iint_{W(0,0,1)} \frac{|y|^2}{4s^2} dy ds.$$

Wir substituieren  $\sigma = -s$  und  $y = 2\sqrt{\sigma}z$ . Es folgt:

$$\begin{aligned} \iint_{W(0,0,1)} \frac{|y|^2}{4s^2} dy ds &= \int_{z \in \mathbb{R}^n} \int_{\sigma=0}^{\frac{1}{4\pi} e^{-2|z|^2/n}} \frac{4\sigma |z|^2}{4\sigma^2} (2\sqrt{\sigma})^n d\sigma dz = \\ &= \int_{z \in \mathbb{R}^n} \frac{2^{n+1}}{n} \left[ \sigma^{\frac{1}{2}n} \right]_0^{\frac{1}{4\pi} e^{-2|z|^2/n}} |z|^2 dz = \frac{2\omega_n}{\pi^{n/2} n} \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} r^{n+1} dr = \\ &= \frac{\omega_n}{\pi^{n/2} n} \int_{t=0}^{\infty} e^{-t} t^{n/2} dt = \frac{\omega_n}{\pi^{n/2} n} \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

Für den Flächeninhalt  $\omega_n$  der Einheitssphäre in  $\mathbb{R}^n$  gilt nämlich  $\omega_n = n\pi^{n/2}/\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)$ . ■

**Theorem 7.7 (Mittelwerteigenschaft für die Wärmeleitungsgleichung)** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$  ein offenes Gebiet. Wenn die Funktion  $u \in C^2(U)$  die Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0$  auf  $U$  erfüllt, dann gilt

$$u(x, t) = \frac{1}{4r^n} \iint_{W(x, t, r)} u(y, s) \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dy ds$$

für jede Wärmeleitungskugel  $W(x, t, r)$  mit  $\overline{W(x, t, r)} \subset U$ .

**Beweis.** Ohne Verlust der Allgemeinheit können wir annehmen, dass  $x = 0$  und  $t = 0$ . Wir betrachten

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{1}{4r^n} \iint_{W(0, 0, r)} u(y, s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = \\ &= \frac{1}{4r^n} \iint_{W(0, 0, 1)} u(ry, r^2s) \frac{|ry|^2}{(r^2s)^2} r^{n+2} dy ds = \frac{1}{4} \iint_{W(0, 0, 1)} u(ry, r^2s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \frac{1}{4} \iint_{W(0, 0, 1)} (y \cdot \nabla u(ry, r^2s) + 2rs \partial_t u(ry, r^2s)) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{W(0, 0, r)} \left( \frac{|y|^2}{4s^2} y \cdot \nabla u(y, s) + \frac{|y|^2}{2s} \partial_t u(y, s) \right) dy ds = (*) \end{aligned}$$

Schreiben wir

$$\psi(y, s, r) = \log(r^n p_n(y, -s)) = n \log r - \frac{n}{2} \log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s}$$

so folgt  $\nabla \psi(y, s, r) = \frac{y}{2s}$  und  $\partial_s \psi(y, s, r) = -\frac{1}{2} n s^{-1} - \frac{1}{4} |y|^2 s^{-2}$ . Bemerke, dass

$$\psi(y, s, r) = 0 \text{ auf } \partial W(0, 0, r).$$

Wir finden, wenn wir nach  $y$ , nach  $s$  und wieder nach  $y$  partiell integrieren, dass

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{W(0, 0, r)} \left( \frac{|y|^2}{4s^2} y \cdot \nabla u(y, s) + y \cdot \nabla \psi(y, s, r) \partial_s u(y, s) \right) dy ds = \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{W(0, 0, r)} \left( \frac{|y|^2}{4s^2} y \cdot \nabla u(y, s) - \psi(y, s, r) (n \partial_s u(y, s) + y \cdot \nabla \partial_s u(y, s)) \right) dy ds = \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{W(0, 0, r)} \left( \left( \frac{|y|^2}{4s^2} + \partial_s \psi(y, s, r) \right) y \cdot \nabla u(y, s) - n \psi(y, s, r) \partial_s u(y, s) \right) dy ds = \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{W(0, 0, r)} \left( -\frac{n}{2s} y \cdot \nabla u(y, s) - n \psi(y, s, r) \Delta u(y, s) \right) dy ds = \\ &= \frac{-n}{r^{n+1}} \iint_{W(0, 0, r)} (\nabla \psi(y, s, r) \cdot \nabla u(y, s) + \psi(y, s, r) \Delta u(y, s)) dy ds = 0. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\phi(r) = \lim_{\rho \downarrow 0} \phi(\rho) = \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{1}{4\rho^n} \iint_{W(0, 0, \rho)} u(y, s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = u(0, 0)$$

wegen der Stetigkeit von  $u$ . ■

## 7.3 Maximumprinzip und Eindeutigkeit

Für harmonische Funktionen folgt aus Korollar 2.6, dass eine harmonische Funktion ihr Maximum nur auf dem Rand annehmen kann. Auch für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung gilt ein ähnliches Ergebnis.

**Definition 7.8** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Man definiert den parabolischen Rand von  $\Omega \times (0, T)$  durch

$$\partial_P(\Omega \times (0, T)) = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times (0, T)).$$

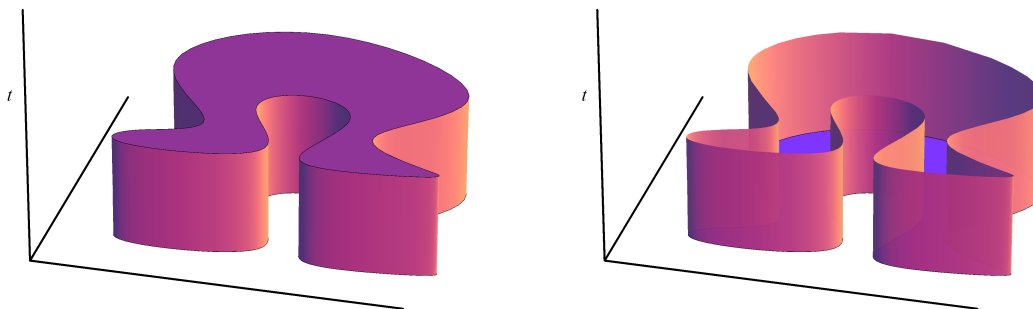


Abbildung 7.3:  $\Omega \times (0, T)$  und sein parabolischer Rand  $\partial_P(\Omega \times (0, T))$

**Theorem 7.9 (Das starke Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung auf beschränkten Gebieten)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und zusammenhängend. Sei  $u \in C^2(\Omega \times (0, T)) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, T])$  eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \text{ auf } \Omega \times (0, T).$$

Dann gilt:

1. Das Maximum wird auf dem parabolischen Rand angenommen:

$$\max \{u(x, t); (x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]\} = \max \{u(x, t); (x, t) \in \partial_P(\Omega \times (0, T))\}.$$

2. Wenn das Maximum in  $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T]$  angenommen wird, also

$$u(x_0, t_0) = \max \{u(x, t); (x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]\},$$

dann ist  $u$  konstant auf  $\bar{\Omega} \times [0, t_0]$ .

**Beweis.** Wir setzen  $M = \max \{u(x, t); (x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]\}$  und nehmen an, dass es  $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T]$  gibt, mit  $u(x_0, t_0) = M$ .

Dann gilt für jede Wärmeleitungskugel  $W(x_0, t_0, r) \subset \bar{\Omega} \times [0, T]$ , dass

$$\begin{aligned} M &= u(x_0, t_0) = \frac{1}{4r^n} \iint_{W(x_0, t_0, r)} u(y, s) \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} dy ds \leq \\ &\leq \frac{1}{4r^n} \iint_{W(x_0, t_0, r)} M \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} dy ds = M. \end{aligned}$$

Gleichheit tritt nur auf, wenn  $u(y, s) = M$  für  $(y, s) \in W(x_0, t_0, r)$ . Wir können  $r$  so gross nehmen, dass  $\partial_P(\Omega \times (0, T))$  von  $W(x_0, t_0, r)$  berührt wird. In diese Berührungstelle  $(\tilde{x}, \tilde{t})$  gilt  $u(\tilde{x}, \tilde{t}) = M$  und die erste Aussage ist bewiesen.

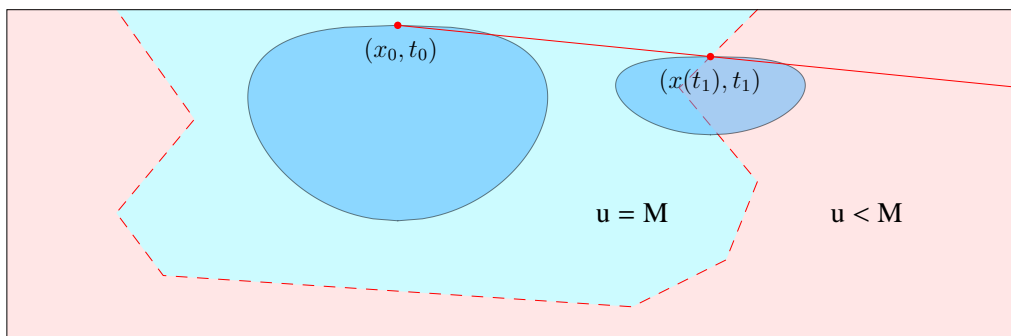


Abbildung 7.4: Die Verwendung von Wärmeleitungskugeln für das Maximumprinzip

Für die zweite Behauptung nehmen wir an, dass es  $(x_*, t_*) \in \bar{\Omega} \times [0, t_0)$  gibt mit  $u(x_*, t_*) < M$ . Sei  $x(\cdot) : [t_*, t_0] \rightarrow \Omega$  eine Kurve, die  $x_*$  mit  $x_0$  verbindet. Dann verbindet  $t \mapsto (x(t), t)$  den Punkt  $(x_*, t_*)$  mit  $(x_0, t_0)$ . Setze

$$t_1 = \sup \{t \in [t_*, t_0] ; u(x(t), t) < M\}. \quad (7.11)$$

Es gibt  $W(x(t_1), t_1, r) \subset \bar{\Omega} \times [0, T]$  mit  $r > 0$  und  $\varepsilon > 0$  derart, dass  $(x(t), t) \in W(x(t_1), t_1, r)$  für  $t \in (t_1 - \varepsilon, t_1)$ . Weil  $u(x(t_1), t_1) = M$  gilt, folgt aus dem ersten Teil des Beweises, dass  $u(x, t) = M$  auf  $W(x(t_1), t_1, r)$  und dies ist ein Widerspruch zu (7.11). ■

**Korollar 7.10 (Eindeutigkeit auf beschränkten Gebieten)** Sei  $\Omega$  ein offenes und beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und sei  $T > 0$ . Das Anfangs-/ Randwertproblem

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = f(x, t) & \text{für } (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x, t) = \varphi(x, t) & \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \end{cases}$$

hat höchstens eine Lösung  $u$  in  $C^2(\Omega \times (0, T)) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, T])$ .

**Beweis.** Wenn es zwei Lösungen  $u_1$  und  $u_2$  gibt, wendet man Theorem 7.9 an auf  $w = u_1 - u_2$  und auf  $-w$  für jede Zusammenhangskomponente von  $\bar{\Omega} \times [0, T]$ . ■

# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 8



## Die Wärmeleitungsgleichung II

### 8.1 Eindeutigkeit unter einer Wachstumsbedingung

**Theorem 8.1 (Ein starkes Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung auf  $\mathbb{R}^n$  unter einer Wachstumsbedingung)** Sei  $T > 0$  und sei  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \times (0, T),$$

die die folgende Bedingung erfüllt:

- Es gibt  $C$  &  $A$  derart, dass  $u(x, t) \leq C e^{A|x|^2}$  für  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$ .

Dann gilt

$$\sup \{u(x, t); (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]\} = \sup \{u(x, 0); x \in \mathbb{R}^n\}.$$

**Beweis.** Nehme an, dass es  $(y, t_1) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$  gibt mit

$$u(y, t_1) > M := \sup \{u(x, 0); x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Wir fangen an mit dem Fall, dass  $t_1$  so klein ist, dass  $4At_1 < 1$ . Dann gibt es  $\varepsilon > 0$  mit  $4A(t_1 + \varepsilon) < 1$ . Man definiere für  $\delta > 0$  die Funktion

$$v_\delta(x, t) = u(x, t) - \frac{\delta}{(t_1 + \varepsilon - t)^{n/2}} \exp\left(\frac{|x - y|^2}{4(t_1 + \varepsilon - t)}\right)$$

und man nehme  $\delta$  so klein, dass

$$v_\delta(y, t_1) = u(y, t_1) - \frac{\delta}{\varepsilon^{n/2}} > M.$$

Es gilt  $(\partial_t - \Delta)v_\delta(x, t) = 0$  für  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, t_1 + \varepsilon)$ . Nehme  $\Omega_r = B_r(y)$ .

Wir haben

$$v_\delta(x, 0) \leq u(x, 0) \leq M \text{ für } x \in \Omega_r,$$

und für  $(x, t) \in \partial\Omega_r \times (0, t_1)$  gilt

$$\begin{aligned} v_\delta(x, t) &= u(x, t) - \frac{\delta}{(t_1 + \varepsilon - t)^{n/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(t_1 + \varepsilon - t)}\right) \leq \\ &\leq C \exp(A|x|^2) - \frac{\delta}{(t_1 + \varepsilon - t)^{n/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(t_1 + \varepsilon - t)}\right) \leq \\ &\leq C \exp(A(|y| + r)^2) - \frac{\delta}{(t_1 + \varepsilon)^{n/2}} \exp\left(\frac{1}{4(t_1 + \varepsilon)} r^2\right). \end{aligned}$$

Weil  $A < \frac{1}{4(t_1 + \varepsilon)}$ , folgt  $v_\delta(x, t) \rightarrow -\infty$  für  $(x, t) \in \partial B_r(y) \times (0, t_1)$ , wenn  $r \rightarrow \infty$ . Wir können dann  $r$  derart groß nehmen, dass

$$v_\delta(x, t) \leq M \text{ für } x \in \partial\Omega_r.$$

Mit Theorem 7.9 gilt

$$M < \sup \{v_\delta(x, t); (x, t) \in \Omega_r \times (0, t_1)\} = \sup \{v_\delta(x, t); (x, t) \in \partial_P(\Omega_r \times (0, t_1))\} \leq M,$$

ein Widerspruch.

Wenn die Annahme  $4At_1 < 1$  nicht erfüllt ist, teilt man das Intervall  $(0, t_1)$  auf in kleinere Intervalle und zeigt das Maximumprinzip nacheinander auf  $(0, \frac{1}{n}t_1)$ ,  $(\frac{1}{n}t_1, \frac{2}{n}t_1)$ , usw. ■

**Korollar 8.2 (Eindeutigkeit auf  $\mathbb{R}^n$  bei einer Wachstumbedingung)** Sei  $T > 0$ . Sei  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  eine Lösung von

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u(x, t) = f(x, t) & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

die die folgende Wachstumbedingung erfüllt: Es gibt  $C$  und  $A$  derart, dass

$$|u(x, t)| \leq Ce^{A|x|^2} \text{ für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T].$$

Es gibt höchstens eine solche Lösung.

**Beweis.** Man wende Theorem 8.1 an auf die Differenz zweier Lösungen. ■

## 8.2 Eindeutigkeit mit Hilfe der Energiefunktion

Die Eindeutigkeit für das Anfangs-/ Randwertproblem lässt sich bei beschränkten Gebieten  $\Omega$  mit  $\partial\Omega \in C^1$  einfacher zeigen. Wenn  $u_1$  und  $u_2$  Lösungen in  $C^2(\bar{\Omega} \times (0, T]) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, T])$  sind von

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u(x, t) = f(x, t) & \text{für } (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = \varphi(x, t) & \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (8.1)$$

definiert man für  $w = u_1 - u_2$  die *Energiefunktion*  $E$  durch

$$E(t) = \int_{\Omega} w(x, t)^2 dx. \quad (8.2)$$

**Lemma 8.3** Sei  $\Omega$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $w$  und  $E$  wie oben. Dann gilt  $E'(t) \leq 0$ .

**Korollar 8.4** Sei  $\Omega$  beschränkt mit  $\partial\Omega \in C^1$  und sei  $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ . Dann hat (8.1) mit  $u(x, 0) = u_0(x)$  höchstens eine Lösung in  $C^2(\bar{\Omega} \times (0, T]) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, T])$ .

**Beweis.** Man findet, dass

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{\Omega} 2w(x, t) \partial_t w(x, t) \, dx \\ &= \int_{\Omega} 2w(x, t) \Delta w(x, t) \, dx \\ &= 2 \int_{\partial\Omega} w(x, t) \frac{\partial}{\partial n} w(x, t) \, dx - 2 \int_{\Omega} |\nabla w(x, t)|^2 \, dx \\ &= -2 \int_{\Omega} |\nabla w(x, t)|^2 \, dx \leq 0. \end{aligned}$$

Wir haben die Differentialgleichung und partielle Integration verwendet, und außerdem dass  $w(x, t) = 0$  für  $x \in \partial\Omega$ . Das Lemma ist so bewiesen.

Für das Korollar bemerkt man, dass aus der Definition folgt, dass  $E(t) \geq 0$ . Also wenn  $E(0) = 0$  gilt, dann folgt, dass  $E(t) = 0$  für alle  $t \geq 0$ . Weil  $w(x, 0) = 0$  hat man  $E(0) = 0$  und so findet man

$$0 \leq E(t) \leq E(0) = 0.$$

Wenn  $E(t) = 0$  folgt  $w(x, t) = 0$  und die Eindeutigkeit. ■

Diese Energiefunktion  $E$  können wir auch verwenden um Eindeutigkeit der Anfangswerte zu zeigen. Dieses Problem ist wesentlich anders, denn eine Lösung rückwärts zu finden ist im Allgemeinen nicht möglich.

**Theorem 8.5** Wir betrachten (8.1) mit  $f$  und  $\varphi$  gegeben und  $u_0$  unbekannt. Das Gebiet  $\Omega$  sei beschränkt und  $\partial\Omega \in C^1$ . Wenn  $u_1, u_2 \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, T])$  Lösungen von

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = f(x, t) & \text{für } (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = \varphi(x, t) & \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (8.3)$$

sind (ohne  $u_0$  vorzuschreiben!) und

$$u_1(x, T) = u_2(x, T),$$

dann gilt  $u_1 = u_2$  auf  $\bar{\Omega} \times [0, T]$ .

**Beweis.** Wir betrachten  $E(t)$  aus (8.2). Es gilt

$$\begin{aligned} E''(t) &= -4 \int_{\Omega} \nabla w(x, t) \cdot \nabla \partial_t w(x, t) \, dx = \\ &= 4 \int_{\Omega} \Delta w(x, t) \partial_t w(x, t) \, dx = 4 \int_{\Omega} |\Delta w(x, t)|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Wir haben hier verwendet, dass  $w(x, t) = 0$  auf  $\partial\Omega \times [0, T]$  und daher auch  $\partial_t w(x, t) = 0$  auf  $\partial\Omega \times [0, T]$ . Mit Cauchy-Schwarz gilt dann, dass

$$E'(t) = 2 \int_{\Omega} w(x, t) \Delta w(x, t) \, dx \leq 2 \left( \int_{\Omega} w(x, t)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} \Delta w(x, t)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

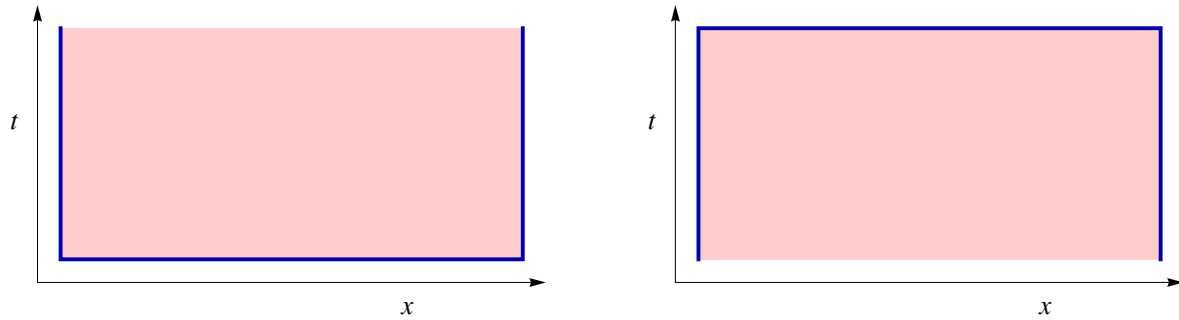


Abbildung 8.1: Schematische Darstellung vorgeschriebener Randwerte bei der Wärmeleitungsgleichung. Obwohl die Eindeutigkeit für beide Fälle gilt, heißt das noch nicht, dass beide Randwertprobleme wohldefiniert sind im Sinne von Hadamard. Mit Anfangswert  $u(x, 0) = u_0(x)$  und  $u_0 \in C(\bar{\Omega})$  kann man Existenz und Robustheit zeigen. Für  $u(x, T) = u_1(x)$  und  $u_1 \in C(\bar{\Omega})$  gilt dies nicht.

anders gesagt, dass

$$E'(t)^2 \leq E(t)E''(t).$$

Wegen unserer Annahme gilt  $E(T) = 0$ . Wenn  $E(t) = 0$  auf  $[0, T]$  wären wir fertig. Nehmen wir also an, es gibt ein Intervall  $[t_1, t_2] \subset [0, T]$  mit  $E(t) > 0$  für  $t \in [t_1, t_2)$  und  $E(t_2) = 0$ . Weil  $E(t) > 0$  auf diesem Intervall gilt, ist  $\log(E(t))$  wohldefiniert. Es folgt, dass

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 \log(E(t)) = \frac{d}{dt} \left(\frac{E'(t)}{E(t)}\right) = \frac{E''(t)E(t) - E'(t)^2}{E(t)^2} \geq 0.$$

Dann ist  $t \mapsto \log(E(t))$  convex auf  $[t_1, t_2)$  und für  $t \in [t_1, t_2)$  gilt

$$\log(E((1-s)t_1 + st)) \leq (1-s)\log(E(t_1)) + s\log(E(t)) \text{ für } s \in [0, 1].$$

Anders geschrieben wird dies

$$E((1-s)t_1 + st) \leq E(t_1)^{1-s} E(t)^s \text{ für } s \in [0, 1],$$

und weil  $E$  stetig ist, folgt

$$E((1-s)t_1 + st_2) \leq E(t_1)^{1-s} E(t_2)^s = 0 \text{ für } s \in (0, 1].$$

So findet man  $E(t) = 0$  für  $t \in (t_1, t_2]$  und das widerspricht der Annahme. ■

### 8.3 Regularität

Wir haben gesehen, dass die Lösung der Wärmeleitungsgleichung in  $\mathbb{R}^n \times (0, T)$  (mit  $f = 0$ ) unendlich oft differenzierbar ist, sogar wenn  $x \mapsto u(x, 0)$  nur stetig ist. Dies gilt auch für die Wärmeleitungsgleichung in  $\Omega \times (0, T)$  mit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Obwohl wir keine explizite Lösung zur Verfügung haben und sogar noch nicht einmal die Existenz einer Lösung gezeigt haben, können wir doch diese Regularität zeigen.

**Theorem 8.6** Sei  $u \in C^2(\Omega \times (0, T)) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, T])$  eine Lösung von (8.1) mit  $f(x, t) = 0$ . Dann gilt  $u \in C^\infty(\Omega \times (0, T))$ .



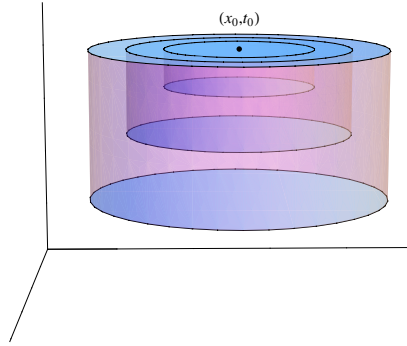


Abbildung 8.2: Die Zylinder  $Z_1 \supset Z_2 \supset Z_3$  aus dem Beweis zu Theorem 8.6.

**Beweis.** Sei  $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T)$ . Wir zeigen diese Regularität in  $(x_0, t_0)$  und definieren dazu die Zylinder

$$Z(x_0, t_0, r) = \{(x, t); |x - x_0| < r \text{ und } t_0 - r^2 < t < t_0\}.$$

Nehme an  $Z(x_0, t_0, r_0) \subset \Omega \times (0, T)$  und setze

$$Z_1 = Z(x_0, t_0, r_0), \quad Z_2 = Z(x_0, t_0, \frac{3}{4}r_0) \quad \text{und} \quad Z_3 = Z(x_0, t_0, \frac{1}{2}r_0).$$

Sei  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$  so definiert, dass

$$\chi(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{für } (x, t) \in Z_2, \\ \dots & \text{für } (x, t) \in Z_1 \setminus Z_2, \\ 0 & \text{für } (x, t) \notin Z_1, \end{cases}$$

und definiere

$$v(x, t) = \begin{cases} \chi(x, t) u(x, t) & \text{für } (x, t) \in Z_1, \\ 0 & \text{für } (x, t) \notin Z_1. \end{cases}$$

Bemerke, dass  $v \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  gilt, dass

$$v(x, 0) = 0 \tag{8.4}$$

und außerdem, dass

$$(\partial_t - \Delta)v(x, t) = \partial_t \chi(x, t) u(x, t) - \Delta \chi(x, t) u(x, t) - 2\nabla \chi(x, t) \cdot \nabla u(x, t) =: \tilde{f}(x, t) \tag{8.5}$$

Weil  $\chi(x, t) = 1$  auf  $Z_2$  und  $\chi(x, t) = 0$  auf  $Z_1^c$  für

$$\tilde{f}(x, t) = 0 \quad \text{für } (x, t) \in Z_2 \cup Z_1^c$$

und es gilt, dass  $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ . Mit Duhamel findet man eine Lösung von (8.4-8.5) und weil diese beschränkte Lösung eindeutig ist wegen Theorem 8.2, folgt

$$v(x, t) = \iint_{(y,s) \in Z_1 \setminus Z_2} \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \exp\left(\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}\right) \tilde{f}(y, s) dy ds.$$

Für  $(x, t) \in Z_3$  gilt  $\chi(x, t) = 1$  und also auch

$$u(x, t) = \iint_{(y,s) \in Z_1 \setminus Z_2} \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \exp\left(\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}\right) \tilde{f}(y, s) dy ds \quad \text{für } (x, t) \in Z_3.$$

Es sei bemerkt, dass  $(x, t) \in Z_3$  und  $(y, s) \in Z_1 \setminus Z_2$  bedeutet, dass man der singulären Stelle im Integral, nämlich  $(y, s) = (x, t)$ , fern bleibt. Es gilt also, dass

$$(x, t) \mapsto \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \exp\left(\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}\right) \in C^\infty(Z_3).$$

Mit dem Satz zu Majorisierter Konvergenz lässt sich Differenzieren und Integrieren vertauschen und es folgt, dass auch  $u \in C^\infty(Z_3)$ . ■

## 8.4 Existenz auf beschränkten Gebieten

Wir werden hier skizzieren wie man die Existenz einer Lösung zu

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (8.6)$$

bekommen kann. Man versucht Lösungen zu finden für

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (8.7)$$

die folgende Form haben:

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (8.8)$$

Für eine solche Lösung gilt

$$X(x)T'(t) - \Delta X(x)T(t) = 0$$

und wenn  $u$  nicht trivial ist, findet man

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta X(x)}{X(x)}.$$

Das bedeutet wiederum, dass

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta X(x)}{X(x)} = c.$$

Man findet eine passende Funktion  $u$  wie in dem *Separationsansatz* (8.8), wenn man eine Lösung hat vom zugehörigen Eigenwertproblem.

**Definition 8.7** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes und zusammenhängendes Gebiet. Man nennt

$$\begin{cases} -\Delta X(x) = \lambda X(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ X(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (8.9)$$

wo sowohl die Funktion  $X \in C^2(\Omega) \cap C_0(\bar{\Omega})$ , als auch die Konstante  $\lambda \in \mathbb{R}$  gesucht wird, ein Eigenwertproblem. Für ein Paar  $(X, \lambda)$ , das dieses Problem erfüllt, nennt man  $X$  eine Eigenfunktion und  $\lambda$  den zugehörigen Eigenwert.

**Bemerkung 8.7.1** Meistens reicht es, wenn die Eigenfunktion nur im schwachen Sinnen das Eigenwertproblem (8.9) erfüllt. Das heißt, man sucht  $X \in W_0^{1,2}(\Omega)$  derart, dass

$$\int_{\Omega} \nabla X(x) \cdot \nabla \varphi(x) - \lambda X(x)\varphi(x) dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Wenn das Gebiet keinen glatten Rand hat kann es sein, dass es nur schwache Lösungen gibt.

**Definition 8.8** Der Raum  $W_0^{1,2}(\Omega)$  ist definiert als der Abschluß von  $C_0^\infty(\Omega)$  in der  $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ -Norm:

$$W_0^{1,2}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}},$$

$$\text{mit } \|f\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Bemerkung 8.8.1** Man hat  $C^2(\overline{\Omega}) \cap C_0(\overline{\Omega}) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ . Wenn  $\Omega$  mehrdimensional ist, sind Funktionen in  $W_0^{1,2}(\Omega)$  im Allgemeinen nicht mal stetig.

Wie bei Eigenvektoren kann man auch eine Eigenfunktion mit einer Zahl multiplizieren und es bleibt eine Eigenfunktion mit dem gleichen Eigenwert. Es ist auch hier üblich, diese (abhängigen) Eigenfunktionen als eine Eigenfunktion zu benennen.

**Beispiel 8.9** Das Eigenwertproblem

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x) & \text{für } 0 < x < 1, \\ X(x) = 0 & \text{für } x \in \{0, 1\}, \end{cases}$$

hat als Lösungen  $\{(X_k, \lambda_k); k \in \mathbb{N}^+\}$  mit

$$X_k(x) = \sin(k\pi x) \text{ und } \lambda_k = k^2\pi^2.$$

Man kann folgendes zeigen:  $\{\sqrt{2}X_k; k \in \mathbb{N}^+\}$  ist ein vollständiges orthonormales System in  $L^2(0, 1)$ . Orthonormal in  $L^2(0, 1)$  bedeutet

$$\langle \sqrt{2}X_k, \sqrt{2}X_\ell \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } k = \ell, \\ 0 & \text{für } k \neq \ell, \end{cases}$$

für  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ . Vollständig bedeutet, dass es für jede  $u_0 \in L^2(0, 1)$  eine Approximation im  $L^2(0, 1)$ -Sinne gibt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| u_0 - \sum_{k=1}^n \langle \sqrt{2}X_k, u_0 \rangle \sqrt{2}X_k(\cdot) \right\|_{L^2(0,1)} = 0.$$

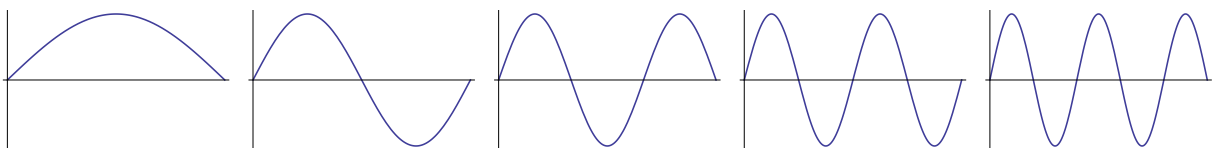


Abbildung 8.3: Darstellung der ersten 5 Eigenfunktionen aus Beispiel 8.9.

Wenn  $X_k$  eine Eigenfunktion mit Eigenwert  $\lambda_k$  für (8.9) ist, dann hat man auch eine Lösung von (8.6) mit  $u(x, 0) = X_k(x)$ , nämlich

$$u(x, t) = e^{-\lambda_k t} X_k(x).$$

Man sieht sofort, dass

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta) u(x, t) &= -\lambda_k e^{-\lambda_k t} X_k(x) + \lambda_k e^{-\lambda_k t} X_k(x) = 0, \\ u(x, 0) &= e^{-\lambda_k \cdot 0} X_k(x) = X_k(x), \\ u(x, t)|_{x \in \{0, 1\}} &= e^{-\lambda_k t} X_k(x)|_{x \in \{0, 1\}} = 0. \end{aligned}$$

Für  $u(x, 0) = \sum_{k=1}^n c_k X_k(x)$  findet man als Lösung dieser linearen Differentialgleichung

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{-\lambda_k t} X_k(x).$$

Ohne Beweis beschreiben wir, wie man allgemeine Anfangswerte mit einem solchen Ansatz angehen kann.

**Behauptung 8.10** *Ist folgendes erfüllt:*

1.  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  ist ein vollständiges orthonormales System von Eigenfunktionen in  $L^2(\Omega)$ , die (8.9) im schwachen Sinne erfüllen;
2.  $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  hat höchstens endlich viele negative Eigenwerte;
3.  $u_0 \in L^2(\Omega)$ ,

dann gilt:

- Die Funktion  $u(\cdot, t) \in L^2(\Omega)$  ist für  $t \geq 0$  wohldefiniert durch

$$u(x, t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{-\lambda_k t} \langle X_k, u_0 \rangle X_k(x);$$

- $t \mapsto u(\cdot, t) \in L^\infty((0, T); L^2(\Omega))$ ;
- $\lim_{t \downarrow 0} \|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^2(0,1)} = 0$ ;

Wenn zusätzlich gilt, dass  $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , dann folgt

- $t \mapsto u(\cdot, t) \in L^\infty((0, T); W_0^{1,2}(\Omega))$ ;
- $u$  ist eine schwache Lösung der Differentialgleichung  $(\partial_t - \Delta)u = 0$ .

Das bedeutet, dass für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \times (0, T))$  gilt

$$\int_0^T \int_\Omega (u(x, t) \partial_t \varphi(x, t) - \nabla u(x, t) \cdot \nabla \varphi(x, t)) dx dt = 0.$$

Ohne nähere Bedingungen am Rand  $\partial\Omega$ , wie zum Beispiel  $\partial\Omega \in C^{2,\gamma}$ , kann man nicht die Existenz einer klassischen Lösung zeigen. Auch wenn  $u_0 \in C^2(\overline{\Omega})$  kann es sein, dass  $u(\cdot, t)$  für  $t > 0$  nicht stetig bis auf  $\partial\Omega$  ist. Im Inneren von  $\Omega \times (0, T)$  wird die Lösung wie vorher unendlich oft differenzierbar sein.

Ein Separationsansatz, der zu explizit berechenbaren Lösungsformeln führt, gibt es meistens nur, wenn genügend Symmetrie vorhanden ist und man keine wilden Randwerte hat. Für

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (8.10)$$

findet man so eigentlich nur eine Lösung, wenn  $\Omega$  ein Rechteck, Quader, Kreis, Halbkreis, Kugel usw. ist.

**Beispiel 8.11** Für ein Rechteck  $\Omega$ , sagen wir  $\Omega = (0, a) \times (0, b)$ , braucht man die Eigenwerte und Eigenfunktionen zu

$$\begin{cases} -\Delta\varphi(x) = \lambda\varphi(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ \varphi(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (8.11)$$

Die Eigenwerte und Eigenfunktionen sind

$$\begin{aligned} \lambda_{k,\ell} &= \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{\ell^2}{b^2} \right) \pi^2, \\ \varphi_{k,\ell}(x_1, x_2) &= \frac{2}{ab} \sin\left(k\frac{\pi}{a}x_1\right) \sin\left(\ell\frac{\pi}{b}x_2\right), \end{aligned}$$

und  $\{\varphi_{k,\ell}\}_{k,\ell=1}^{\infty}$  ist ein vollständiges Orthonormalsystem für  $L^2(\Omega)$ . Für  $u_0 \in L^2(\Omega)$  kann man die Lösung zu (8.10) wie folgt schreiben:

$$u(x, t) = \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \langle u_0, \varphi_{k\ell} \rangle e^{-\lambda_{k\ell}t} \varphi_{k\ell}(x)$$

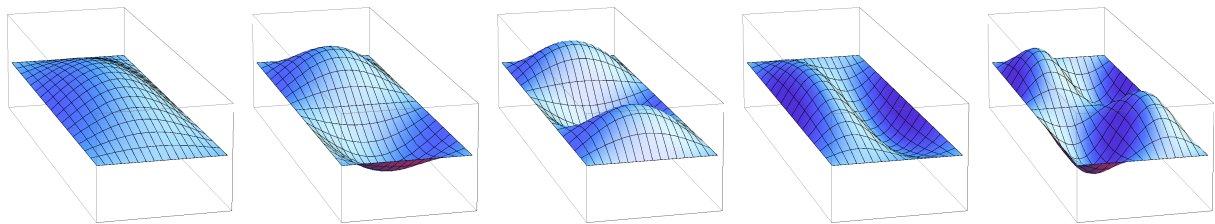


Abbildung 8.4: Darstellung der ersten 5 Eigenfunktionen aus Beispiel 8.11.

**Beispiel 8.12** Für einen Kreis  $\Omega$ , sagen wir  $\Omega = B_1(0)$ , braucht man die Eigenwerte und Eigenfunktionen zu (8.11), die man mit einem zweiten Separationsansatz, nämlich

$$\varphi(r \cos \theta, r \sin \theta) = R(r) \Theta(\theta),$$

via

$$-r^{-1} (rR'(r))' \Theta(\theta) - r^{-2} R(r) \Theta''(\theta) = \lambda R(r) \Theta(\theta)$$

überführt in

$$\begin{cases} -r^{-1} (rR'(r))' = \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right) R(r) & \text{für } r \in (0, 1), \\ R(1) = R'(0) = 0, \end{cases} \quad (8.12)$$

und

$$\begin{cases} -\Theta''(\theta) = \mu \Theta(\theta) & \text{für } \theta \in (0, 2\pi), \\ \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi). \end{cases} \quad (8.13)$$

Die Eigenwerte und Eigenfunktionen für (8.13) sind

$$\begin{aligned} \mu_n &= n^2 \text{ mit } n \in \mathbb{N}, \\ \Theta_{n,0}(\theta) &= \cos(n\theta) \text{ für } n \in \mathbb{N}, \\ \Theta_{n,1}(\theta) &= \sin(n\theta) \text{ für } n \in \mathbb{N}^+. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Besselfunktionen und ihrer Nullstellen findet man Lösungen für (8.12) mit  $\mu = n^2$  und so die Eigenwerte und Eigenfunktionen für das Eigenwertproblem (8.11) auf dem Kreis  $B_1(0)$ :

$$\lambda_{n,m} = j_{n,m}^2,$$

$$\varphi_{n,m,0}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \cos(n\theta) J_n(j_{n,m}r) \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } m \in \mathbb{N}^+,$$

$$\varphi_{n,m,1}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \sin(n\theta) J_n(j_{n,m}r) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}^+ \text{ und } m \in \mathbb{N}^+.$$

Hier ist  $J_n$  die  $n$ -te Besselfunktion erster Gattung und  $j_{n,m}$  die  $m$ -te positive Nullstelle von  $J_n$ . Nach Normierung bilden diese Eigenfunktionen ein vollständiges Orthogonalsystem. Dass dieses System vollständig ist, haben wir hier jedoch nicht bewiesen.

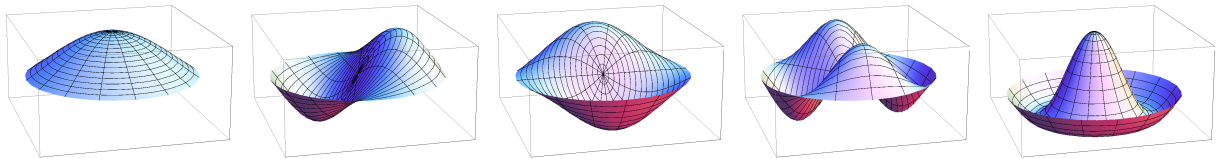


Abbildung 8.5: Darstellung von 5 Eigenfunktionen aus Beispiel 8.12:  $\varphi_{0,1,0}$ ,  $\varphi_{1,1,0}$ ,  $\varphi_{1,1,1}$ ,  $\varphi_{2,1,0}$  und  $\varphi_{0,2,0}$ .

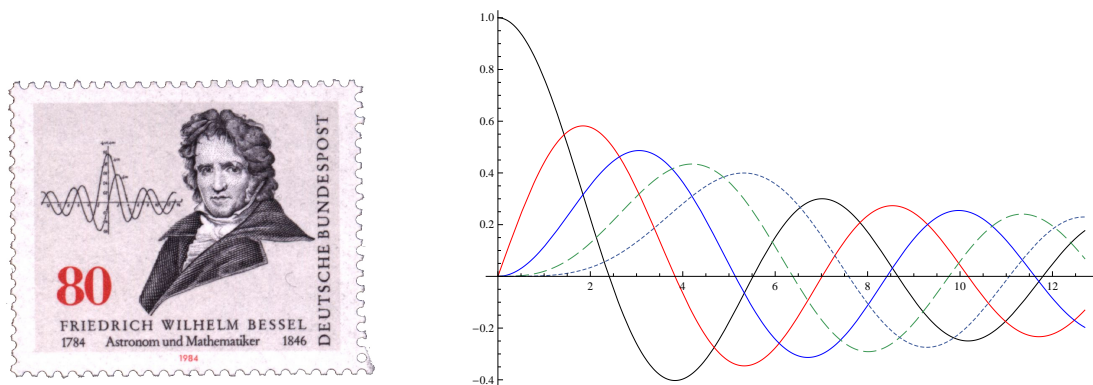


Abbildung 8.6: Friedrich Wilhelm Bessel und die nach ihm benannten Funktionen.

## 8.5 Zwei Gegenbeispiele

**Beispiel 8.13** Wir haben gesehen, dass wenn  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  eine Lösung ist von

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (8.14)$$

sogar gilt, dass  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ . Dies bedeutet, dass das Rückwärtsproblem

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (-T, 0), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (8.15)$$

nur möglicherweise lösbar ist, wenn  $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Aber wenn es der Zufall sogar will, dass (8.15) lösbar ist, zeigt folgendes Beispiel von Hadamard, dass die Robustheit verletzt ist. Sei

$$u_\varepsilon(x, t) = \varepsilon e^{-t/\varepsilon^2} \sin(x/\varepsilon).$$

Man berechnet sofort, dass  $(\partial_t - \partial_x^2) u_\varepsilon(x, t) = 0$  für  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und dass

$$|u_\varepsilon(x, 0)| = |\varepsilon \sin(x/\varepsilon)| \leq \varepsilon.$$

Auch gilt für beliebige  $t < 0$ , dass

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|u_\varepsilon(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\| \varepsilon e^{-t/\varepsilon^2} \sin(x/\varepsilon) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon e^{-t/\varepsilon^2} = \infty.$$

Das heißt, man kann kleine Störungen beim Anfangswert angeben mit beliebig großen Änderungen in der Lösung.

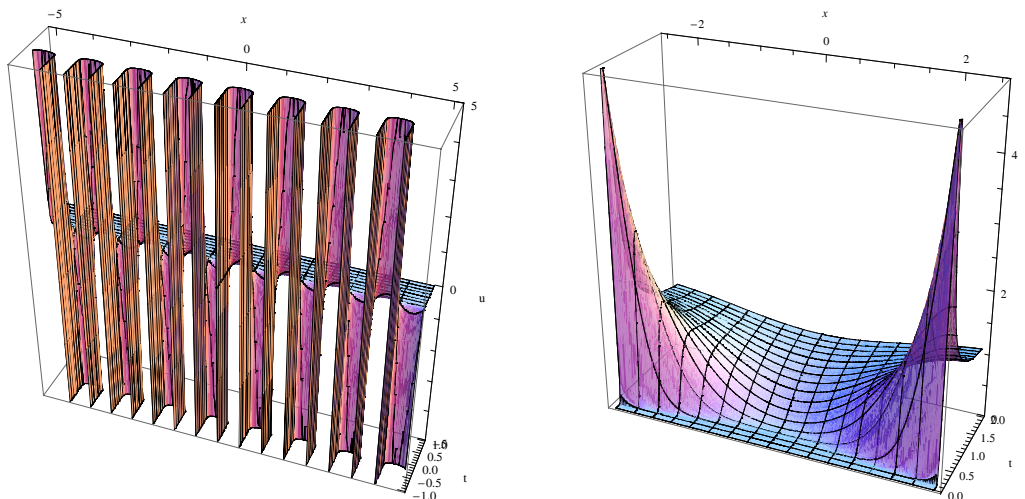


Abbildung 8.7: Links eine Skizze zu dem Gegenbeispiel von Hadamard mit  $\varepsilon = \frac{1}{5}$ . Rechts die Funktion von Tychonov aus Beispiel 8.14.

**Beispiel 8.14** Wir haben die Eindeutigkeit gezeigt für die Lösung zu

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = f(x, t) & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (8.16)$$

wenn die Lösung zusätzlich eine Wachstumsbedingung erfüllt: Es gibt  $C \in \mathbb{R}$  mit

$$|u(x, t)| \leq C e^{A|x|^2} \text{ für alle } (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty).$$

Tychonov hat sich folgendes Beispiel überlegt. Man definiere

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial_t^n \phi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ für } x, t \in \mathbb{R}$$

mit

$$\phi(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{für } t \neq 0, \\ 0 & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Man kann zeigen, dass die Reihe gleichmäßig konvergiert auf kompakten Teilmengen von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und sogar dass

$$\left| \partial_t^n \phi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right| \leq \frac{2^n n!}{(2n)!} \left( \frac{x^2}{t} \right)^n \exp\left(\frac{-1}{4t^2}\right) \leq \frac{1}{n!} \left( \frac{x^2}{t} \right)^n \exp\left(\frac{-1}{4t^2}\right).$$

Es folgt

$$|u(x, t)| \leq \exp\left(\frac{x^2}{t}\right) \exp\left(\frac{-1}{4t^2}\right) = \exp\left(\frac{4x^2 t - 1}{4t^2}\right) \quad (8.17)$$

und

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = 0.$$

Dieser Grenzwert gilt für jedes  $x$  aber die Konvergenz ist nicht gleichmäßig!

Auch gilt

$$(\partial_t - \partial_x^2) \sum_{n=0}^{\infty} \partial_t^n \phi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \partial_t^{n+1} \phi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \partial_t^n \phi(t) \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} = 0.$$

Die Funktion  $u$  ist also eine nicht-triviale Lösung von

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (8.18)$$

Es folgt selbstverständlich nicht aus (8.17), dass die  $C^{\infty}$ -Bedingung nicht erfüllt ist. Man kann jedoch zeigen, dass die Abschätzung in (8.17) fast optimal ist und dass  $u$  tatsächlich die  $C^{\infty}$ -Bedingung nicht erfüllt.

Mehr Details zu diesen Beispielen findet man im Buch von DiBenedetto.



# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 9

### Die Laplace- und Poisson-Gleichungen



Die Struktur bei elliptischen Gleichungen zweiter Ordnung ist nicht wesentlich verschieden bei Operatoren mit konstanten oder nicht-konstanten Koeffizienten. Technische Aspekte können leider unverhältnismäßig kompliziert werden bei allgemeinen elliptischen Randwertproblemen. Wir werden uns deshalb oft beschränken auf einen Prototyp elliptischer Differentialgleichungen, nämlich die Poisson-Gleichung<sup>1</sup>

$$\Delta u = f. \tag{9.1}$$

Den Differentialoperator<sup>2</sup>

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$$

nennt man Laplace-Operator<sup>3</sup>. Setzt man  $f = 0$  in (9.1), wird sie Laplace-Gleichung genannt. Meistens sucht man Lösungen von (9.1) auf einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit vorgegebenen Randwerten auf  $\partial\Omega$ .

## 9.1 Fundamentallösung

**Definition 9.1** Sei  $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$ . Die Funktion  $F_n : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  definiert durch

$$F_2(x) = \frac{-1}{2\pi} \ln |x|,$$
$$F_n(x) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} |x|^{2-n} \quad \text{für } n \geq 3,$$

nennt man die Fundamentallösung zu  $-\Delta$ .

**Bemerkung 9.1.1** Man findet eine Fundamentallösung für einen rotationsinvarianten Operator wie  $-\Delta$  wenn man eine passende Lösung von  $-\Delta f(|x|) = 0$  für  $|x| > 0$  nimmt. Das heißt, man sucht  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  derart, dass

$$r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r f(r) = 0.$$

---

<sup>1</sup>Siméon Denis Poisson (1781–1840) bekam in 1802 eine Professur an die L'École Polytechnique in Paris. Er war ein Schüler von Pierre-Simon Marquis de Laplace.

<sup>2</sup>Stochastiker nehmen oft  $\Delta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$  und für Potentialtheoretiker gilt  $\Delta = - \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$ .

<sup>3</sup>Pierre-Simon Marquis de Laplace (1749–1827) war ein Schüler von Jean-Baptiste le Rond d'Alembert.

Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}\Delta f(|x|) &= \nabla \cdot \left( f'(|x|) \frac{x}{|x|} \right) = \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} f'(|x|)) \frac{x_i}{|x|} + f'(|x|) \nabla \cdot \frac{x}{|x|} = \\ &= \sum_{i=1}^n f''(|x|) \left( \frac{x_i}{|x|} \right)^2 + f'(|x|) \left( \frac{n}{|x|} - \frac{x}{|x|} \cdot \frac{x}{|x|^2} \right) = f''(|x|) + \frac{n-1}{|x|} f'(|x|)\end{aligned}$$

und via

$$f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r f(r)$$

folgt  $f(r) = c_1 r^{2-n} + c_2$  wenn  $n \geq 2$  und  $f(r) = c_1 \log r + c_2$  wenn  $n = 2$ . Die zweite Konstante spielt keine Rolle und  $c_1$  sollte man derart wählen, dass folgendes gilt.

**Lemma 9.2** Im Sinne von Distributionen gilt  $-\Delta F_n = \delta_0$ .

**Beweis.** Man soll zeigen, dass für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  (oder  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ) gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_n(x) \cdot (-\Delta \varphi(x)) dx = \varphi(0).$$

Wie bei Proposition 2.5 verwendet man, dass  $F_n \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  und dass

$$-\Delta F_n(x) = 0 \text{ für } x \neq 0.$$

Nehmen wir  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  so gibt es eine Kugel  $B_R(0)$ , die den Träger von  $\varphi$  umfasst, und es gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} F_n(x) (-\Delta \varphi(x)) dx &= -\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{B_R(0) \setminus B_\varepsilon(0)} F_n(x) \Delta \varphi(x) dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( -\int_{\partial(B_R(0) \setminus B_\varepsilon(0))} (F_n(x) \nabla \varphi(x) - \nabla F_n(x) \varphi(x)) \cdot \nu d\sigma_x + \right. \\ &\quad \left. - \int_{B_R(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \Delta F_n(x) \varphi(x) dx \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} F_n(x) \nabla \varphi(x) \cdot \nu d\sigma_x - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \nabla F_n(x) \varphi(x) \cdot \nu d\sigma_x.\end{aligned}$$

Man findet für  $n > 2$ , dass

$$\begin{aligned}\left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} F_n(x) \nabla \varphi(x) \cdot \nu d\sigma_x \right| &\leq \frac{\varepsilon^{2-n} \|\nabla \varphi\|_\infty}{(n-2) \omega_n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} 1 d\sigma_x = \frac{\|\nabla \varphi\|_\infty}{n-2} \varepsilon, \\ \left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \nabla F_n(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) \cdot \nu d\sigma_x \right| &\leq \frac{\varepsilon^{1-n} \|\nabla \varphi\|_\infty}{\omega_n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |x| d\sigma_x \leq \|\nabla \varphi\|_\infty \varepsilon.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} F_n(x) (-\Delta \varphi(x)) dx &= -\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \nabla F_n(x) \varphi(0) \cdot \nu d\sigma_x = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{1}{\omega_n} |x|^{1-n} \varphi(0) d\sigma_x = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n} \varphi(0) \int_{\partial B_\varepsilon(0)} 1 d\sigma_x = \varphi(0).\end{aligned}$$

Für  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  benutzt man, dass  $\varphi$  und  $\nabla\varphi$  schneller als jedes Polynom nach 0 konvergiert für  $|x| \rightarrow \infty$ . ■

Wenn  $-\Delta F_n = \delta_0$  im Sinne von Distributionen, dann gilt im gleichen Sinne auch

$$-\Delta F_n(\cdot - y) = \delta_0(\cdot - y) = \delta_y(\cdot).$$

Anders gesagt

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) (-\Delta\varphi(x)) dx = \varphi(y).$$

Wenn  $-\Delta\varphi = f$  gilt, so hat man, wenn man  $x$  und  $y$  vertauscht und  $F_n(z) = F_n(-z)$  bemerkt, dass

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) f(y) dy. \quad (9.2)$$

Man nennt (9.2) eine *Darstellungformel* für  $-\Delta\varphi = f$ . Das heißt, wenn für  $\varphi$  und  $f$  gilt, dass  $-\Delta\varphi = f$ , dann gilt auch (9.2). Sie ist noch keine Lösungsformel. Das werden wir nun zeigen:

**Proposition 9.3** Sei  $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$  und setze

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) f(y) dy. \quad (9.3)$$

Dann gilt  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$  und  $-\Delta u = f$  in  $\mathbb{R}^n$ .

**Beweis.** Wenn man bedenkt, dass

$$\Delta u(x) = \Delta \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) f(y) dy \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \Delta F_n(x - y) f(y) dy = 0,$$

dann kann man anscheinend Integral und  $\Delta$ -Operator nicht vertauschen,

$$\Delta_x \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) f(y) dy \neq \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x F_n(x - y) f(y) dy$$

**Falsch**

denn dann wäre die Proposition falsch. Der Grund ist, dass die zweiten Ableitungen von  $x \mapsto F_n(x - y)$  nicht integrierbar sind. Die Sätze über majorisierte oder monotone Konvergenz sind nicht anwendbar. Die ersten Ableitungen von  $x \mapsto F_n(x - y)$  sind aber lokal integrierbar, und mit majorisierter Konvergenz und einer partiellen Integration folgt

$$\begin{aligned} \nabla u(x) &= \nabla \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x F_n(x - y) f(y) dy = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_y F_n(x - y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) \nabla f(y) dy. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Also ist  $u$  differenzierbar und weil  $\nabla f$  stetig ist und

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) \nabla f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(z) \nabla_x f(x - z) dy$$

gilt, findet man, dass  $\nabla u$  stetig ist, also gilt  $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ .

Auch gilt, dass

$$\begin{aligned}\partial_{x_i} \partial_{x_j} u(x) &= \partial_{x_i} \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) \partial_j f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_i} F_n(x-y) \partial_j f(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i F_n)(z) (\partial_j f)(x-z) dy\end{aligned}$$

existiert und sogar stetig ist. Also gilt  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ .

Weiter folgt

$$\begin{aligned}-\Delta u(x) &= -\nabla \cdot \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) \nabla f(y) dy = - \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x F_n(x-y) \cdot \nabla f(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_y F_n(x-y) \cdot \nabla f(y) dy.\end{aligned}$$

Wir bohren wieder ein kleines Loch, diesmal um  $x$  herum und finden

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \nabla_y F_n(x-y) \cdot \nabla f(y) dy &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)} \nabla_y F_n(x-y) \cdot \nabla f(y) dy = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( - \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \nabla_y F_n(x-y) \cdot f(y) \nu d\sigma_y - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)} \Delta_y F_n(x-y) f(y) dy \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{1}{\omega_n} |x-y|^{1-n} f(y) d\sigma_x = f(x).\end{aligned}$$

Nicht nur der letzten Schritt ist ähnlich wie im Beweis von Lemma 9.2. ■

Dieses Lemma hat als Voraussetzung, dass  $f$  stetig differenzierbar ist und eine kompakten Träger hat. Beide Bedingungen kann man abschwächen. Es reicht wenn  $f$  integrierbar ist und wenn die rechte Seite in (9.3) wohldefiniert ist. Wir werden diesem hier nicht weiter nachgehen. Wir möchten die Annahmen nur in einer Richtung etwas abschwächen. Um zu zeigen, dass  $u$  definiert durch (9.3) in  $x_0$  zweimal stetig differenzierbar ist reicht es, wenn  $f$  in einer Umgebung von  $x_0$  stetig differenzierbar ist.

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Man nehme  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  derart, dass

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x - x_0| \leq \varepsilon, \\ \dots & \text{für } \varepsilon < |x - x_0| < 2\varepsilon, \\ 0 & \text{für } |x - x_0| \geq 2\varepsilon. \end{cases}$$

Dann gilt

$$u(x) = \int_{B_{2\varepsilon}(x_0)} F_n(x-y) \chi(y) f(y) dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x_0)} F_n(x-y) (1 - \chi(y)) f(y) dy.$$

Nehmen wir  $x \in B_{\frac{1}{2}\varepsilon}(x_0)$ , so gilt für  $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x_0)$ , dass  $|x - y| \geq \frac{1}{2}\varepsilon$ . Dies bedeutet, dass die singuläre Stelle im rechten Integral mindestens  $\frac{1}{2}\varepsilon$  vom Integrationsgebiet entfernt liegt und somit folgt sogar für  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , dass

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x_0)} F_n(x-y) (1 - \chi(y)) f(y) dy \in C^\infty(B_{\varepsilon/2}(x_0)).$$

Für das linke Integral können wir Proposition 9.3 verwenden. Für  $f \in C^1(\overline{B_{2\varepsilon}(x_0)})$  folgt

$$x \mapsto \int_{B_{2\varepsilon}(x_0)} F_n(x-y) \chi(y) f(y) dy \in C^2(\mathbb{R}^n).$$

Übrigens gilt für  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit kompaktem Träger, dass  $u$  in (9.3) wohldefiniert ist und sogar dass

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy \in C(\mathbb{R}^n). \quad (9.5)$$

Es gilt nämlich, dass wenn der Träger von  $f$  in  $B_R(0)$  liegt, dass

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy \right| &= \left| \int_{B_R(0)} F_n(x-y) f(y) dy \right| \leq \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B_R(0)} F_n(x-y) dy \leq C_R \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Für  $f \geq 0$  kann man den Satz zur majorisierten Konvergenz verwenden um zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow x} \int_{\mathbb{R}^n} F_n(z-y) f(y) dy &= \lim_{z \rightarrow x} \int_{\mathbb{R}^n} F_n(w) f(w-z) dw = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} F_n(w) f(w-x) dw = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy. \end{aligned}$$

Das liefert (9.5). Wir fassen zusammen:

**Lemma 9.4** Sei  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  und nehme an,  $f$  hat einen kompakten Träger. Dann ist

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy.$$

wohldefiniert und es gilt  $u \in C(\mathbb{R}^n)$ .

Wenn außerdem  $f|_{\overline{B_{2\varepsilon}(x_0)}} \in C^1(\overline{B_{2\varepsilon}(x_0)})$ , dann gilt

$$u|_{\overline{B_{\varepsilon/2}(x_0)}} \in C^2(\overline{B_{\varepsilon/2}(x_0)}) \quad (9.6)$$

und  $-\Delta u(x) = f(x)$  für  $x \in \overline{B_{\varepsilon/2}(x_0)}$ .

**Bemerkung 9.4.1** Statt anzunehmen, dass  $f$  einen kompakten Träger hat, reicht es wenn  $f$  genügend schnell fallend ist:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (1 + |x|^2)^k f(x) = 0$$

für  $k \in \mathbb{R}^+$  genügend groß.

## 9.2 Randwertprobleme

Das eigentliche Problem, an dem man interessiert ist, ist

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (9.7)$$

Wir werden grob einige Möglichkeiten beschreiben, wie man dieses Problem angehen kann. Vorher geben wir zwei Möglichkeiten an, wie man dieses Problem vereinfachen kann.

Es sei bemerkt, dass wenn man

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = \varphi & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (9.8)$$

für allgemeine  $f$  und  $\varphi$  lösen kann, man auch (9.7) lösen kann. Denn seien  $v$  und  $w$  Lösungen von (9.8), dann ist  $u = v + w$  eine Lösung von (9.7). Manchmal braucht man aber nur eine der beiden aus (9.8) lösen zu können:

- Wenn man das rechte Randwertproblem in (9.8) lösen kann, dann kann man auch (9.7) lösen: Setze

$$u_1 = \int_{\Omega} F_n(x-y) f(y) dy$$

und sei  $w$  eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = \varphi - u_1 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

so findet man, dass  $u = u_1 + w$  eine Lösung ist von (9.7).

- Wenn man das linke Randwertproblem in (9.8) lösen kann und  $\varphi = \Phi|_{\partial\Omega}$  für  $\Phi \in C^2(\bar{\Omega})$ , dann kann man auch (9.7) lösen: Sei  $v$  eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta v = f + \Delta\Phi & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

so ist  $u = v + \Phi$  eine Lösung von (9.7).

### 9.2.1 Die Methode von Perron

Für harmonische Funktionen  $u$  auf  $\Omega$ , also  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$ , sagt Proposition 2.5, dass

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) d\sigma_x \quad \text{für jede Sphäre } B_r(x_0) \text{ mit } \overline{B_r(x_0)} \subset \Omega.$$

Diese Aussage ist gleichwertig zu

$$u(x_0) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \quad \text{für jede Sphäre } B_r(x_0) \subset \Omega.$$

Den Flächeninhalt der Einheitskugel in  $\mathbb{R}^n$  nennen wir  $\omega_n$ ; das Volumen der Einheitskugel in  $\mathbb{R}^n$  ist dann  $\frac{1}{n}\omega_n$ .

**Definition 9.5** Eine Funktion  $u \in C(\Omega)$  nennt man superharmonisch auf  $\Omega$ , wenn

$$u(x_0) \geq \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \quad \text{für jede Sphäre } B_r(x_0) \subset \Omega.$$

Eine Funktion  $u \in C(\Omega)$  nennt man subharmonisch auf  $\Omega$ , wenn

$$u(x_0) \leq \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \quad \text{für jede Sphäre } B_r(x_0) \subset \Omega.$$

Für

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

kann man wie folgt verfahren.

**Ansatz 9.1 (Mit Hilfe des Maximum Prinzips)** Perron<sup>4</sup> definiert

$$S_\varphi(\bar{\Omega}) = \{u \in C(\bar{\Omega}) ; u \text{ superharmonisch in } \Omega \text{ und } u \geq \varphi \text{ auf } \partial\Omega\}$$

und setzt

$$\bar{u}(x) = \inf \{u(x) ; u \in S_\varphi(\bar{\Omega})\}.$$

Man kann zeigen, dass  $\bar{u}$  harmonisch ist auf  $\Omega$  und dass  $u \geq \varphi$  auf  $\partial\Omega$ . Wenn man zusätzlich annimmt, dass  $\Omega$  einen „netten“ Rand hat und  $\varphi$  stetig ist, kann man sogar zeigen, dass  $\bar{u} \in C(\bar{\Omega})$  und  $\bar{u} = \varphi$  auf  $\partial\Omega$ . Was genau nett ist, soll noch erklärt werden. Das Maximum Prinzip sagt aus, dass eine subharmonische Funktion ein Maximum nur am Rand des Gebietes annehmen kann. Für eine superharmonische Funktion folgt, dass sie ein Minimum nur am Rande annehmen kann und so auch dass  $\bar{u} \geq \min \{\varphi(x) ; x \in \partial\Omega\}$ .

## 9.2.2 Mit Hilfe des Darstellungssatzes von Riesz

Eine zweite Lösungsmöglichkeit gibt es, wenn man die schwache Version zum Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

betrachtet. Die schwache Formulierung einer Lösung  $u$  ist wie folgt: Man hat  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  derart, dass

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - f v) dx = 0 \text{ für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

**Definition 9.6** Für  $p \in (1, \infty)$  ist  $W_0^{1,p}(\Omega)$  der Sobolev-Raum definiert durch

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}} \quad (9.9)$$

mit

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} (u(x)^p + |\nabla u(x)|^p) dx \right)^{1/p}.$$

Mit  $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}$  ist gemeint, dass  $W_0^{1,p}(\Omega)$  der Abschluss ist von  $C_0^\infty(\Omega)$  bezüglich der  $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ -Norm.

Man kann zeigen, dass  $W_0^{1,2}(\Omega)$  bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

ein Hilbert-Raum ist. Für  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und  $f \in L^2(\Omega)$  ist

$$v \mapsto \int_{\Omega} f(x) v(x) dx : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige lineare Abbildung.

<sup>4</sup>Oskar Perron, 1880 Frankenthal in der Pfalz – 1975 München

**Ansatz 9.2 (Mit dem Darstellungssatz von Riesz)** Der Darstellungssatz von Riesz<sup>5</sup> für Hilbert-Räume besagt, dass für jede stetige lineare Abbildung  $v \mapsto F(v) : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  existiert mit

$$\langle u, v \rangle = F(v) \text{ für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

**Bemerkung 9.6.1** Anders gesagt, nehmen wir

$$F(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

so finden wir eine Funktion  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , für die gilt

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \text{ für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Das heißt, dass  $u$  eine schwache Lösung ist.

Ein Vorteil dieses Verfahrens ist, dass wir kaum Bedingungen an  $\Omega$  haben. Es ist aber nicht klar und meistens auch nicht richtig, dass dieses  $u$  eine klassische Lösung ist. Das ist meistens nur der Fall, wenn es  $\alpha > 0$  gibt mit  $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  und  $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ .

### 9.2.3 Durch Variationsrechnung

Hilbert<sup>6</sup> betrachtete das Funktional

$$J : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

definiert durch

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - f(x) u(x) \right) dx$$

und konnte folgendes zeigen:

**Ansatz 9.3 (Mit Hilfe der direkten Methoden der Variationsrechnung)** Für  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und  $f \in L^2(\Omega)$  gibt es  $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$  derart, dass

$$J(u_0) = \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} J(u).$$

Für eine solche Funktion  $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gilt also

$$J(u_0) \leq J(u) \text{ für alle } u \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

und dann auch, dass

$$J(u_0) \leq J(u_0 + \varepsilon\psi) \text{ für alle } \psi \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ und } \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Es folgt für die erste Variation

$$\partial J(u_0, \psi) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(u_0 + \varepsilon\psi),$$

dass

$$0 = \partial J(u_0, \psi) = \int_{\Omega} (\nabla u(x) \cdot \nabla \psi(x) - f(x) \psi(x)) dx \text{ für alle } \psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

und damit, dass die Funktion  $u_0$ , die  $J$  minimalisiert über  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , eine schwache Lösung ist.

<sup>5</sup>Frigyes Riesz, 1880 – 1956, war ein Ungarischer Mathematiker.

<sup>6</sup>David Hilbert, 1862 Königsberg – 1943 Göttingen, war wahrscheinlich der einflussreichste Mathematiker seiner Zeit.



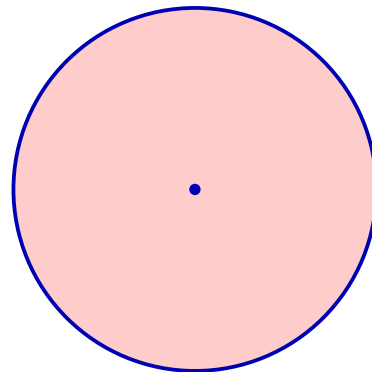
### 9.2.4 Ein Beispiel

Die verschiedenen Lösungstypen geben auch tatsächlich unterschiedliche Ergebnisse. Man betrachte für  $n \geq 2$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; 0 < |x| < 1\}$$

und das Problem

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 1 & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (9.10)$$



**Behauptung 9.7** *Problem (9.10) hat keine Lösung in  $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ .*

Wenn es eine solche Lösung  $u_0$  gibt, ist auch die rotierte Funktion  $u_\varphi = u_0 \circ R_\varphi$  eine Lösung mit  $R_\varphi$  irgendeine Rotation um 0. Sogar  $u_{rad} := \frac{1}{\omega_n} \int_{\varphi \in \partial B_1(0)} u_0(R_\varphi x) d\varphi$  wäre eine Lösung. Weil  $u_{rad}$  radialsymmetrisch ist, findet man für  $U(|x|) = u_{rad}(x)$  die gewöhnliche Differentialgleichung

$$-r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r U(r) = 1.$$

Man hat  $\partial_r r^{n-1} \partial_r U(r) = -r^{n-1}$  und via  $r^{n-1} \partial_r U(r) = c - \frac{1}{n} r^n$  und  $\partial_r U(r) = cr^{1-n} - \frac{1}{n} r$  folgt

$$U(r) = c_1 + c_2 r^{2-n} - \frac{1}{2n} r^2 \quad \text{für } n > 2,$$

$$U(r) = c_1 + c_2 \log r - \frac{1}{4} r^2 \quad \text{für } n = 2.$$

Es gibt aber keine derartige Funktion, die  $U(0) = 0 = U(1)$  erfüllt. Es gibt also keine Lösung  $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ .

**Behauptung 9.8** *Die Funktion  $u(x) = \frac{1}{2n} (1 - |x|^2)$  ist eine schwache Lösung von (9.10) in  $W_0^{1,2}(\Omega)$ .*

Eine schwache Lösung ist hier eine Funktion  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , also im  $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ -Sinne durch  $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$  approximierbar, die die folgende Gleichung erfüllt:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} 1 v \, dx \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Wir werden diese Behauptung nicht bis ins Detail beweisen. Wir zeigen nur, dass der Funktionswert in einem Punkt nicht wahrgenommen wird im Raum  $W_0^{1,2}(\Omega)$  mit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und  $n \geq 2$ .

Dies sieht man am folgenden Beispiel. Wir werden zeigen, dass die Funktionenfolge

$$\varphi_k(x) = \frac{\log(1+k|x|)}{\log(1+k)} (1 - |x|^2)$$

in  $W_0^{1,2}(B_1(0))$  gegen  $\varphi_\infty(x) = 1 - |x|^2$  konvergiert wenn  $n \geq 2$ . Trotzdem gilt

$$\varphi_k(0) = 0 \neq 1 = \varphi_\infty(0).$$

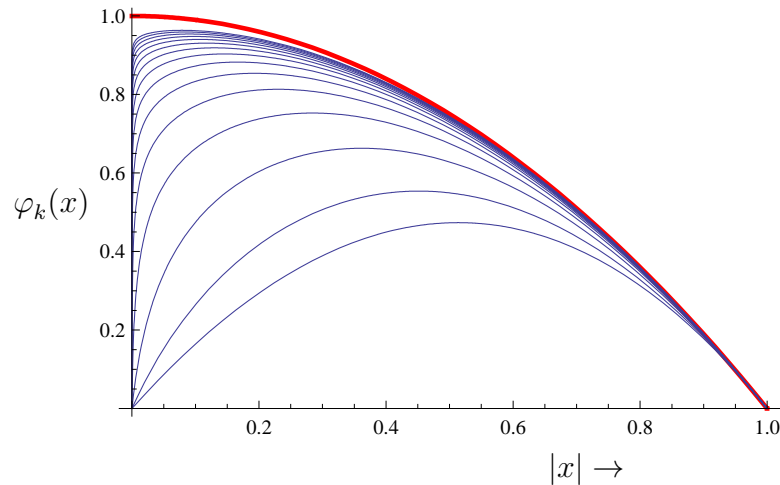


Abbildung 9.1:  $\varphi_k$  konvergiert gegen  $1 - |\cdot|^2$  in  $W_0^{1,2}(B_1(0))$  und nicht in  $C(\overline{B_1(0)})$ .

Es gilt

$$\begin{aligned} \|\varphi_k(\cdot) - (1 - |\cdot|^2)\|_{W_0^{1,2}(B_1)}^2 &= \int_{B_1(0)} \left| \nabla \left( \left( \frac{\log(1+k|x|)}{\log(1+k)} - 1 \right) (1 - |x|^2) \right) \right|^2 dx = \\ &= \omega_n \int_{r=0}^1 \left| \frac{k(1-r^2)}{(1+kr)\log(1+k)} - \left( \frac{\log(1+kr)}{\log(1+k)} - 1 \right) 2r \right|^2 r^{n-1} dr \leq \\ &\leq \omega_n \int_{r=0}^1 2 \left( \left| \frac{k(1-r^2)}{(1+kr)\log(1+k)} \right|^2 + \left| \left( \frac{\log(1+kr)}{\log(1+k)} - 1 \right) 2r \right|^2 \right) r^{n-1} dr = \\ &= \dots = \mathcal{O} \left( \frac{\log(1+k^2)}{(\log(1+k))^2} \right) = \mathcal{O} \left( \frac{1}{\log(k)} \right) \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Zu den Pünktchen bemerken wir folgendes. Für  $n \geq 2$  und auch nur dann gilt, dass

$$\left( \frac{k(1-r^2)}{(1+kr)\log(1+k)} \right)^2 r^{n-1} \leq \frac{2}{(\log(1+k))^2} \frac{k^2 r}{1+k^2 r^2}$$

und

$$\int_0^1 \frac{2k^2 r}{1+k^2 r^2} dr = \log(1+k^2).$$

Der Rest des Integrals lässt sich einfacher abschätzen.

# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 10



## Ordnung und Existenz bei Laplace

### 10.1 Greensche Funktionen auf Halbraum und Kugel

Bevor wir die oben genannten Lösungsmethoden anschauen, werden ein paar Fälle vorgestellt, bei denen man eine fast explizite Lösung geben kann.

**Beispiel 10.1** Für einige  $f$  ist es möglich eine Formel für eine Lösung auf dem Halbraum zu geben:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1}, \\ u = 0 & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}. \end{cases}$$

Man definiert

$$\tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{für } x \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1}, \\ \dots & \text{für } x \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}, \\ -f(-x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{für } x \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1}, \end{cases}$$

und setzt

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) \tilde{f}(y) dy. \quad (10.1)$$

Wenn  $f \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ , dann gilt  $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Hat  $f$  auch noch einen kompakten Träger oder fällt sie genügend schnell für  $|x| \rightarrow \infty$ , dann folgt mit Proposition 9.3, dass

$$-\Delta u = \tilde{f} = f \text{ auf } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1}.$$

Man findet aus Symmetriegründen, dass

$$u(-x_1, x_2, \dots, x_n) = -u(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Wenn  $f$  die Bedingungen von Lemma 9.4 erfüllt, ist  $u$  stetig und es folgt, dass

$$u(0, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Das heißt,  $u$  in (10.1) liefert eine Lösung.

Man kann die Funktion in (10.1) noch anders schreiben. Wir setzen

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^* = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$$

und finden

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy - \int_{\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y^*) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy - \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n} F_n(x-y^*) f(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n} G(x,y) f(y) dy \end{aligned}$$

mit

$$G(x,y) = F_n(x-y) - F_n(x-y^*) \text{ für } x,y \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n.$$

Man bemerke, dass nur  $x \mapsto F_n(x-y)$  eine Singularität innerhalb  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$  hat, weil  $y \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ .

**Definition 10.2** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Eine Funktion  $G_\Omega : \Omega \times \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$  derart, dass

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x,y) f(y) dy$$

für genügend nette Funktionen  $f$  eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

gibt, nennt man eine Greensche<sup>1</sup> Funktion.

Formell hat eine Greensche Funktion folgende Eigenschaften:

- $-\Delta_x G(x,y) = \delta_y(x)$  für  $x,y \in \Omega$ ;
- $G(x,y) = 0$  für  $x \in \partial\Omega$  und  $y \in \Omega$ .

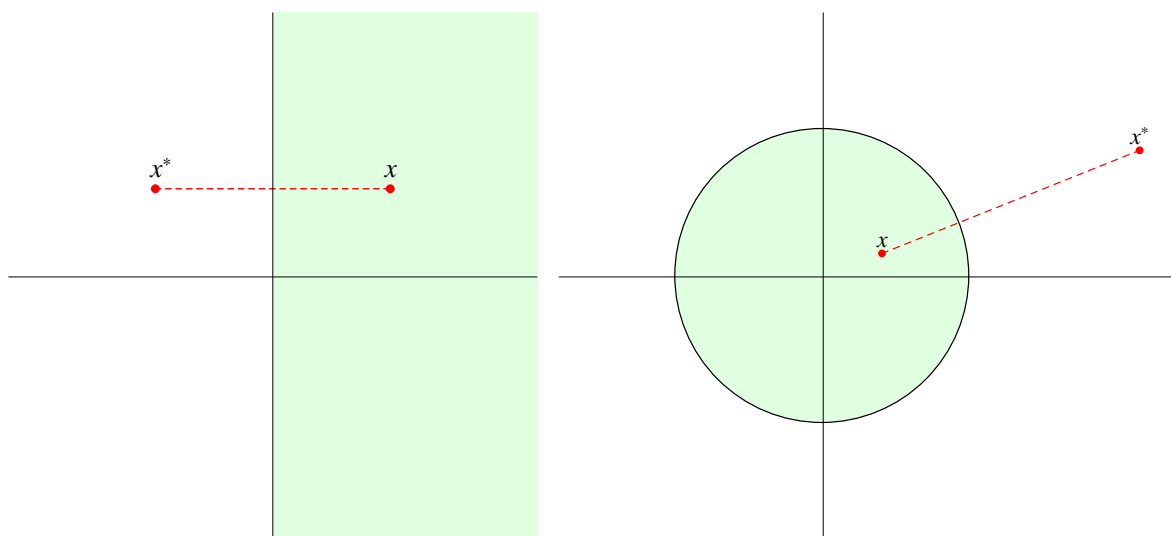


Abbildung 10.1: Halbraum und Kugel haben explizite Greensche Funktionen.

<sup>1</sup>Georg Green, 1793 – 1841, Britischer Mathematiker.

**Beispiel 10.3** Betrachte das Gebiet  $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ . Definiere die Kelvin-Spiegelung von  $B_R(0) \setminus \{0\}$  zu  $\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$  durch

$$x^* = \frac{R^2}{|x|^2}x.$$

Dann ist

$$G_{B_R(0)}(x, y) = F_n(x - y) - F_n\left(\frac{|y|}{R}(x - y^*)\right) \quad (10.2)$$

eine Greensche Funktion für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B_R(0), \\ u = 0 & \text{auf } \partial B_R(0). \end{cases} \quad (10.3)$$

Für  $y \in B_R(0)$  folgt  $|y^*| > R$  und man sieht, dass  $x \mapsto F_n\left(\frac{|y|}{R}(x - y^*)\right)$  keine Singularität für  $x \in B_R(0)$  hat. Man sollte sich fragen was passiert, wenn  $y = 0$ . Weil

$$\left|\frac{|y|}{R}(x - y^*)\right|^2 = \left|\frac{|y|}{R}x - \frac{R}{|y|}y\right|^2 = \frac{|y|^2|x|^2}{R^2} - 2x \cdot y + R^2 \quad (10.4)$$

sieht man, dass  $F_n\left(\frac{|y|}{R}(x - y^*)\right)$  für  $y = 0$  sogar unendlich glatt fortsetzbar ist durch  $F_n(R)$ .

Formell folgt, mit  $y$  als Parameter, dass

$$-\Delta G_{B_R(0)}(\cdot, y) = \delta_y - \frac{|y|^2}{R^2}\delta_{y^*} = \delta_y \quad (10.5)$$

für Funktionen mit Träger innerhalb  $\Omega$ .

Weil (10.4) gilt, kann man  $x$  und  $y$  vertauschen, es folgt

$$G_{B_R(0)}(x, y) = F_n(x - y) - F_n\left(\frac{|x|}{R}(y - x^*)\right),$$

und wegen

$$\lim_{|x| \uparrow R} \frac{|x|}{R}(y - x^*) = y - x,$$

findet man

$$G_{B_R(0)}(x, y) = 0 \text{ für } x \in \partial B_R(0) \text{ und } y \in B_R(0). \quad (10.6)$$

Die Gleichungen (10.5) und (10.6) lassen vermuten, dass  $(x, y) \mapsto G_{B_R(0)}(x, y)$  tatsächlich eine Greensche Funktion ist für (10.3). Man verwende dazu die Ergebnisse aus Abschnitt 9.1.

## 10.2 Greensche Funktionen auf beliebigen Gebieten

In Sektion 10.1 haben wir eine Lösungsformel für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B_R(0), \\ u = 0 & \text{auf } \partial B_R(0). \end{cases}$$

gefunden:

$$u(x) = \int_{B_R(0)} G_{B_R(0)}(x, y) f(y) dy \quad (10.7)$$

mit

$$G_{B_R(0)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \ln \left( 1 + \frac{(R^2 - |x|^2)(R^2 - |y|^2)}{R^2|x-y|^2} \right) & \text{für } n = 2, \\ \frac{1}{\omega_n(n-2)} \left( |x-y|^{2-n} - \left| \frac{|y|}{R}x - \frac{R}{|y|}y \right|^{2-n} \right) & \text{für } n \geq 3. \end{cases} \quad (10.8)$$

Die erste Formel in (10.8) ergibt sich übrigens direkt durch (10.4) und die Eigenschaften vom Logarithmus.

Eine Greensche Funktion existiert für allgemeinere Gebiete. Sucht man eine solche Funktion für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (10.9)$$

das heißt

$$u(x) = \int_{\Omega} G_{\Omega}(x, y) f(y) dy$$

ist eine Lösung (10.9), dann kann man sagen, dass

$$G_{\Omega}(x, y) = F_n(x - y) - h(x, y)$$

mit  $h(\cdot, y)$  eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta h(\cdot, y) = 0 & \text{in } \Omega, \\ h(\cdot, y) = F_n(\cdot - y) & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (10.10)$$

Im Moment führen diese Überlegungen uns nicht weiter. Für die Existenz einer Greenschen Funktion auf  $\Omega$  müsste man erst mal (10.10) lösen können. Nur im Fall einer Kugel hatten wir eine explizite Funktion. Genau für diesen Fall kann man folgendes zeigen. Die Ergebnisse stimmen auch für andere Gebiete  $\Omega$ , aber das können wir hier noch nicht zeigen.

**Behauptung 10.4** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^1$ . Eine Greensche Funktion für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (10.11)$$

hat die folgenden Eigenschaften:

1.  $G_{\Omega} - F_n \in C^{\infty}(\Omega \times \Omega)$ , also folgt  $G_{\Omega} \in C^{\infty}(\Omega \times \Omega \setminus D_{\Omega})$ ;
2.  $G_{\Omega} \in C(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \setminus D_{\bar{\Omega}})$ ;
3.  $\Delta_x G_{\Omega}(x, y) = 0$  für  $(x, y) \in \Omega \times \Omega \setminus D_{\Omega}$ ;
4.  $G_{\Omega}(x, y) = 0$  für  $x \in \partial\Omega$  und  $y \in \Omega$ .
5.  $G_{\Omega}(x, y) = G_{\Omega}(y, x)$  für  $(x, y) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \setminus D_{\bar{\Omega}}$ .

Hier ist  $D_A = \{(x, x); x \in A\}$  die Diagonale von  $A \times A$ .

**Bemerkung 10.4.1** Für  $\Omega = B_R(0)$  hat  $G_{B_R(0)}$  definiert in (10.8) diese Eigenschaften.

Nehmen wir an,  $\Omega$  hat eine solche Greensche Funktion  $G_\Omega$  und dass außerdem gilt

$$y \mapsto G(x, y) \in C^1(\bar{\Omega} \setminus \{x\}) \text{ für alle } x \in \Omega. \quad (10.12)$$

Verwenden wir die *Greensche Formel*

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial \Omega} (u \partial_\nu v - v \partial_\nu u) d\sigma \quad (10.13)$$

für  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  mit  $-\Delta u = f$  und  $v = G_\Omega(x, \cdot)$  auf  $\Omega \setminus B_\varepsilon(x)$  statt  $\Omega$ , so finden wir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x)} (u(y) \Delta_y G_\Omega(x, y) - G_\Omega(x, y) \Delta u(y)) dy = \\ = \int_{\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(x))} (u(y) \partial_{\nu_y} G_\Omega(x, y) - G_\Omega(x, y) \partial_\nu u(y)) d\sigma_y. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Aus Eigenschaften 3 und 4 folgt

$$\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x)} u(y) \Delta_y G_\Omega(x, y) dy = 0 \text{ und } \int_{\partial \Omega} G_\Omega(x, y) \partial_\nu u(y) d\sigma_y = 0.$$

Aus Eigenschaft 1 folgt

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y) \partial_{\nu_{\text{in}}} G_\Omega(x, y) d\sigma_y &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y) \partial_{\nu_{\text{in}}} F_n(x - y) d\sigma_y = u(x), \\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} G_\Omega(x, y) \partial_\nu u(y) d\sigma_y &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} F_n(x - y) \partial_\nu u(y) d\sigma_y = 0. \end{aligned}$$

Kombinieren wir diese Gleichungen mit (10.14) so folgt mit  $\varepsilon \downarrow 0$ , dass

$$\int_{\Omega} G_\Omega(x, y) f(y) dy = u(x) + \int_{\partial \Omega} u(y) \partial_{\nu_y} G_\Omega(x, y) d\sigma_y. \quad (10.15)$$

Dies bedeutet, wir haben eine Darstellungsformel für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial \Omega, \end{cases} \quad (10.16)$$

bekommen.

**Proposition 10.5** Sei  $G_\Omega$  eine Greensche Funktion für  $\Omega$  mit Eigenschaften wie in Behauptung 10.4 und sei (10.12) erfüllt. Dann ist der Poisson-Kern

$$K_\Omega(x, y) = -\partial_{\nu_y} G_\Omega(x, y) \quad (10.17)$$

wohldefiniert für  $y \in \partial \Omega$  und  $x \in \bar{\Omega} \setminus \{y\}$ . Wenn (10.16) eine Lösung hat, wird sie dargestellt durch

$$u(x) = \int_{\Omega} G_\Omega(x, y) f(y) dy + \int_{\partial \Omega} K_\Omega(x, y) \varphi(y) d\sigma_y. \quad (10.18)$$

**Bemerkung 10.5.1** Für viele Gebiete  $\Omega$  ist (10.18) sogar eine Lösungsformel für (10.16). Die Formel in (10.18) folgt aus (10.15).

### 10.3 Tricks für Greensche Funktionen auf speziellen Gebieten

Durch (Kelvin-)Spiegelungen kann man auf einigen Gebieten explizite Greensche Funktionen konstruieren. Wir geben ein paar Beispiele.

**Beispiel 10.6** Die Halbkugel  $D = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 > 0 \text{ und } |x| < 1\}$  hat als Greensche Funktion

$$G_D(x, y) = F_n(x - y) - F_n(|y|(x - y^*)) - F_n(x - \bar{y}) + F_n(|y|(x - \bar{y}^*))$$

mit  $y^* = |y|^{-2}y$  und  $\bar{y} = (-y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

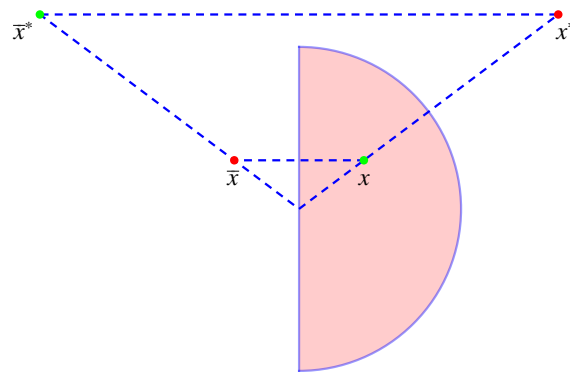


Abbildung 10.2: Konstruktion der Greenschen Funktion auf der Halbkugel.

**Beispiel 10.7** Der Schlitz  $S = \{x \in \mathbb{R}^n; 0 < x_1 < \ell\}$  hat als Greensche Funktion

$$G_D(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (F_n(x - y + 2k\ell \mathbf{e}_1) - F_n(x - \bar{y} + 2k\ell \mathbf{e}_1))$$

mit  $\bar{y} = (-y_1, y_2, \dots, y_n)$  und  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ .

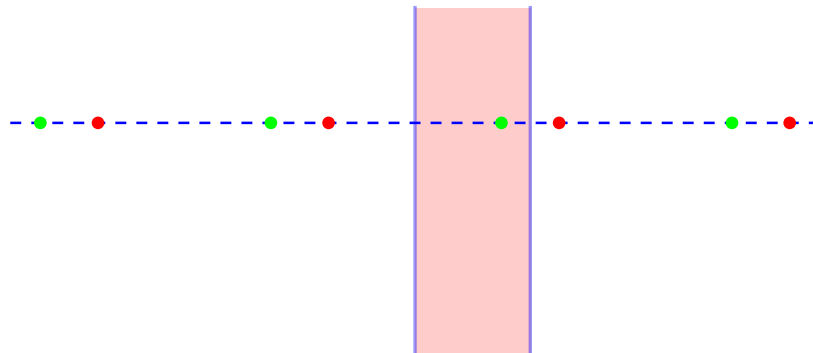


Abbildung 10.3: Konstruktion der Greenschen Funktion auf einem Schlitz.



**Beispiel 10.8** Das Tortenstück  $T = \{(r \cos \phi, r \sin \phi) \in \mathbb{R}^2; r > 0 \text{ und } 0 < \phi < \frac{1}{6}\pi\}$  hat als Greensche Funktion

$$G_D(x, y) = \sum_{k=0}^5 \left( F_2(x - R_{\pi/3}^k y) - F_2(x - R_{\pi/3}^k \bar{y}) + F_2(|y|(x - R_{\pi/3}^k \bar{y}^*)) - F_2(|y|(x - R_{\pi/3}^k y^*)) \right)$$

wobei  $R_{\pi/3} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & \sin(\pi/3) \\ -\sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix}$ .

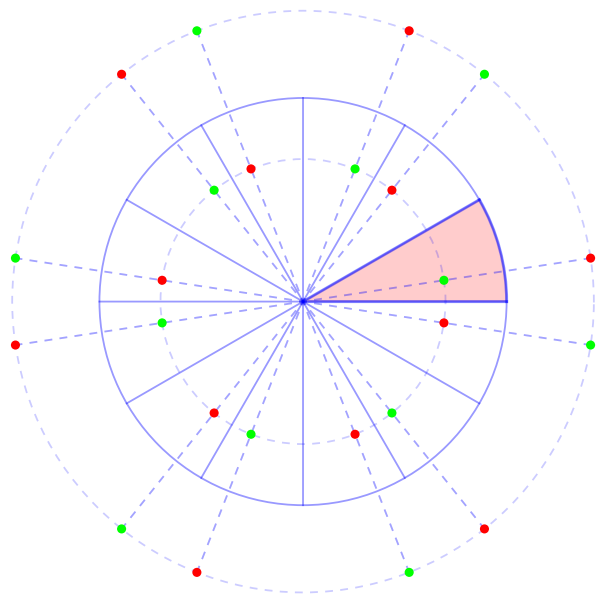


Abbildung 10.4: Konstruktion der Greenschen Funktion auf einem Tortenstück.

Für einfach zusammenhängende Gebiete in  $\mathbb{R}^2$  kann man den Riemannsches Abbildungssatz verwenden. Dieser Satz besagt, dass es für so ein Gebiet  $\Omega$  eine bikonforme Abbildung  $h : \bar{\Omega} \rightarrow \overline{B_1(0)}$  gibt, das heißt,  $h$  ist konform auf  $\Omega$  und hat eine konforme inverse auf  $B_1(0)$ . Konform oder winkeltreu bedeutet  $\frac{\partial}{\partial x} h_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} h_2(x, y)$  und  $\frac{\partial}{\partial x} h_2(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y} h_1(x, y)$ . Hat man Funktionentheorie gehört, erkennt man hier die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen.

**Lemma 10.9** Sei  $h : \bar{\Omega} \rightarrow \overline{B_1(0)}$  eine bikonforme Abbildung. Dann gilt

$$G_{\Omega}(x, y) = G_{B_1(0)}(h(x), h(y)).$$

**Beweis.** Man findet mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen, dass

$$\begin{aligned} \Delta(u \circ h) &= \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} \right)^2 u_{11} \circ h + \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial x} u_{12} \circ h + \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} \right)^2 u_{22} \circ h + \\ &+ \left( \frac{\partial h_1}{\partial y} \right)^2 u_{11} \circ h + \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial y} u_{12} \circ h + \left( \frac{\partial h_2}{\partial y} \right)^2 u_{22} \circ h \\ &= \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial y} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) (\Delta u) \circ h = J_h (\Delta u) \circ h. \end{aligned}$$

Hier ist  $J_h$  genau die Jacobi-Matrix zu der Abbildung  $h$ . Es folgt, dass

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} -\Delta \tilde{u} = \tilde{f} & \text{in } B_1(0), \\ \tilde{u} = 0 & \text{auf } \partial B_1(0), \end{cases}$$

äquivalent sind via  $\tilde{u} = u \circ h^{inv}$  und  $\tilde{f} = J_{h^{inv}} f \circ h^{inv}$ . Das heißt, wenn man für das rechte Problem eine Lösung  $\tilde{u}$  hat, dann hat man auch eine Lösung  $u$  für das linke Problem.

Es gilt weiter, dass

$$\begin{aligned} u(x) &= \tilde{u}(h(x)) = \int_{B_1(0)} G_{B_1(0)}(h(x), z) \tilde{f}(z) dz = \\ &= \int_{B_1(0)} G_{B_1(0)}(h(x), z) f(h^{inv}(z)) J_{h^{inv}}(z) dz = \\ &= \int_{\Omega} G_{B_1(0)}(h(x), h(y)) f(y) dy. \end{aligned}$$

Anders gesagt

$$G_{B_1(0)}(h(x), h(y)) = G_{\Omega}(x, y).$$

■

In höheren Dimensionen gibt es nur sehr wenige konforme Abbildungen, nämlich nur die Abbildungen sind konform, die sich zusammensetzen lassen aus Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen (orthogonale Abbildungen), Skalierungen und Inversionen. Inversionen sind genau die Kelvin-Spiegelungen.

## 10.4 Folgen der Greenschen Funktion auf der Kugel

**Lemma 10.10** Sei  $u$  harmonisch auf  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , dann gilt für jede Kugel  $B_R(x_0)$  mit  $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ , dass

$$u(x) = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{R\omega_n} \int_{\partial B_R(x_0)} \frac{u(y)}{|x - y|^n} d\sigma_y$$

**Bemerkung 10.10.1** Für  $x = x_0$  finden wir den Mittelwertsatz für harmonische Funktionen, Proposition 2.5:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(y) d\sigma_y. \quad (10.19)$$

**Bemerkung 10.10.2** Man sieht, dass  $G_{B_R(0)}(x, y) > 0$  für  $(x, y) \in B_R(0) \times B_R(0)$  und auch, dass

$$K_{B_R(0)}(x, y) > 0 \text{ für } (x, y) \in B_R(0) \times \partial B_R(0).$$

**Beweis.** Weil

$$\nabla_y G_{B_R(0)}(x, y) = \frac{-1}{\omega_n} \left( \frac{y - x}{|x - y|^n} - \frac{\left(\frac{|x|}{R}\right)^2 y - x}{\left|\frac{|x|}{R}y - \frac{R}{|x|x}\right|^n} \right)$$

folgt für  $|y| = R$  und  $\nu = R^{-1}y$ , dass

$$-\partial_{\nu_y} G_{B_R(0)}(x, y) = \frac{1}{\omega_n} \frac{\left(1 - \left(\frac{|x|}{R}\right)^2\right) y}{|x - y|^n} \cdot \frac{y}{R} = \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n |x - y|^n}.$$

Die Greensche Funktion für  $B_R(x_0)$  folgt aus (10.8) wenn man sie um  $x_0$  verschiebt, das heißt

$$K_{B_R(x_0)} = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{R\omega_n |x - y|^n},$$

und mit Proposition 10.5 folgt das Lemma. ■

### 10.4.1 Maximum-Prinzip für harmonische Funktionen

**Theorem 10.11** *Sei  $u$  harmonisch auf einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Wenn  $u$  ein Maximum oder Minimum innerhalb hat, dann ist  $u$  konstant.*

**Beweis.** Nehmen wir an,  $u$  hat ein Maximum in  $x_0 \in \Omega$ . Aus dem Mittelwertsatz, Lemma 10.10 mit  $x = x_0$  folgt, dass  $u = u(x_0)$  gilt auf jeder Sphäre innerhalb  $\Omega$  mit  $x_0$  als Zentrum. Weil  $\Omega$  zusammenhängend ist, kann man für jedes  $x^*$  einen Weg innerhalb  $\Omega$  finden, der  $x_0$  mit  $x^*$  verbindet, und das Ergebnis folgt, wenn man diesen Weg mit passenden Kugeln überdeckt. ■

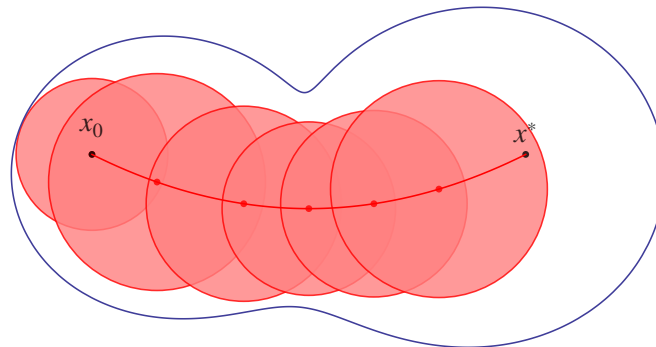


Abbildung 10.5: Man argumentiert von Kugel zu Kugel.

**Korollar 10.12** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und sei  $u \in C(\bar{\Omega})$  harmonisch innerhalb  $\Omega$ . Dann nimmt  $u$  sein Maximum und sein Minimum an auf  $\partial\Omega$ .*

**Beweis.** Eine stetige Funktion auf der kompakten Menge  $\bar{\Omega}$  hat ein Maximum (und ein Minimum) und wegen des letzten Theorems kann es nicht im Innern liegen. ■

**Korollar 10.13** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet. Dann hat*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (10.20)$$

*höchstens eine Lösung  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .*

**Beweis.** Wenn es zwei Lösungen hätte, verwende man das letzte Korollar für die Differenz. ■

**Theorem 10.14 (Die Ungleichung von Harnack<sup>2</sup>)** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und sei  $u$  positiv und harmonisch innerhalb  $\Omega$ . Dann gibt es für jede zusammenhängende offene Teilmenge  $A$  mit  $\bar{A} \subset \Omega$  eine Konstante  $c_A$  derart, dass*

$$\sup_{x \in A} u(x) \leq c_A \inf_{x \in A} u(x).$$

<sup>2</sup>Carl Gustav Axel Harnack, Tartu (damals Russland, heute Estland) 1851 – Dresden 1888.

**Beweis.** Sei  $x \in A$ . Wenn  $x_0 \in B_{r_1}(x)$  und  $\overline{B_{r_1+r_2}(x)} \subset \Omega$ , dann gilt wegen der Mittelwertegenschaft, Proposition 2.5,

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{n}{\omega_n (r_1 + r_2)^n} \int_{B_{r_1+r_2}(x)} u(y) dy \geq \\ &\geq \frac{n}{\omega_n (r_1 + r_2)^n} \int_{B_{r_1}(x_0)} u(y) dy = \frac{r_1^n}{(r_1 + r_2)^n} u(x_0). \end{aligned} \quad (10.21)$$

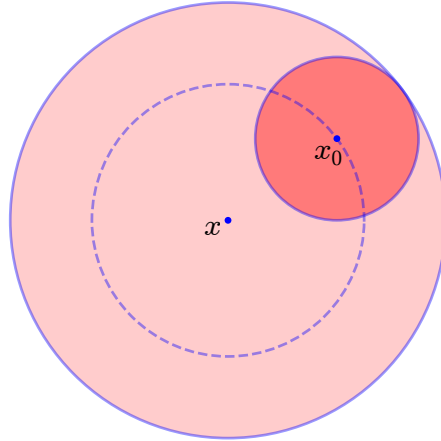


Abbildung 10.6: Kugeln bei Harnack

Wir nehmen nun für  $R$  die Distanz von  $A$  bis zum Rand von  $\Omega$ , das heißt

$$R = \frac{1}{3} \inf \{|a - b|; a \in A \text{ und } b \notin \Omega\}.$$

Nehme an, dass  $x, x_0 \in A$  und dass  $|x - x_0| \leq \frac{1}{2}R$ . Dann folgt, dass  $B_{\frac{1}{2}R}(x_0) \subset \overline{B_R(x)} \subset \Omega$  und wir können wie in (10.21) abschätzen. Wenn  $|x - x_0| > R$  gilt, dann kann man eine endliche Anzahl, sage  $k$  Kugeln  $B_R(x_i)$  finden mit  $x_i \in A$ , die eine Kette von  $x$  zu  $x_0$  bilden. Es folgt, dass

$$u(x) \geq \frac{1}{2^{nk}} u(x_0).$$

Dass es höchstens endlich Kugeln viele braucht, folgt aus der Kompaktheit von  $\bar{A}$  und eine endliche Teilüberdeckung aus  $\{B_R(x); x \in A\}$ . ■

### 10.4.2 Harmonisch auf Kugeln

**Lemma 10.15** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und sei  $u$  harmonisch auf  $\Omega$ . Dann gilt  $u \in C^\infty(\Omega)$  und für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gibt es  $C_{k,n}$  derart, dass

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_{k,n}}{\omega_n r^{n+k}} \int_{B_r(x_0)} |u(y)| dy$$

für jede Kugel  $B_r(x_0) \subset \Omega$  und  $k = |\alpha|$  mit  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .

**Beweis.** Für  $|\alpha| = 0$  folgt diese Aussage aus dem Mittelwertsatz. Durch Lemma 10.10 gilt

$$u(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}r\right)^2 - |x - x_0|^2}{\frac{1}{2}r\omega_n} \int_{\partial B_{r/2}(x_0)} \frac{u(y)}{|x - y|^n} d\sigma_y$$

und wenn man  $x \in B_{r/4}(x_0)$  nimmt, gilt

$$\begin{aligned} |D^\alpha u(x)| &= \sum_{\beta \leq \alpha} \left| D_x^\beta \left( \frac{(\frac{1}{2}r)^2 - |x-x_0|^2}{\frac{1}{2}r\omega_n} \right) \right| \int_{\partial B_{r/2}(x_0)} \left| D_x^{\alpha-\beta} \left( \frac{1}{|x-y|^n} \right) \right| |u(y)| d\sigma_y \leq \\ &\leq C_{|\alpha|} \sum_{\ell \leq 2} r^{1-\ell} \int_{\partial B_{r/2}(x_0)} \frac{1}{r^{n+|\alpha|-\ell}} |u(y)| d\sigma_y \leq C'_{|\alpha|} r^{-|\alpha|} \|u\|_{L^\infty(\partial B_{r/2}(x_0))}. \end{aligned} \quad (10.22)$$

Aus (2.13) folgt für  $z \in \partial B_{r/2}(x_0)$ , dass  $B_{r/2}(z) \subset B_r(x_0)$  und

$$|u(z)| = \left| \frac{n}{\omega_n (r/2)^n} \int_{B_{r/2}(z)} u(y) dy \right| \leq \frac{n}{\omega_n (r/2)^n} \int_{B_r(x_0)} |u(y)| dy. \quad (10.23)$$

Kombiniert man (10.22) und (10.23) so folgt das Ergebnis.  $\blacksquare$

**Theorem 10.16 (Liouville<sup>3</sup>)** Wenn  $u$  harmonisch und beschränkt ist auf  $\mathbb{R}^n$ , dann ist  $u$  konstant.

**Beweis.** Aus dem letzten Lemma folgt

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{C_1}{R^{n+1}} \int_{B_R(x)} |u(y)| dy$$

und wenn  $u$  beschränkt ist, folgt  $|\nabla u(x)| \leq C_1 \omega_n \|u\|_\infty R^{-1}$  für alle  $R > 0$  und  $x \in \mathbb{R}^n$ . Das bedeutet  $|\nabla u(x)| = 0$  und  $u$  ist konstant.  $\blacksquare$

**Proposition 10.17** Sei  $G_{B_R(0)}$  die Greensche Funktion für  $B_R(0)$  wie in (10.8) und sei  $K_{B_R(0)}(x, y) = -\partial_{\nu_y} G_{B_R(0)}(x, y)$ . Dann ist

$$u(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{für } x \in \partial B_R(0), \\ \int_{\partial B_R(0)} K_{B_R(0)}(x, y) \varphi(y) d\sigma_y & \text{für } x \in B_R(0), \end{cases}$$

die eindeutige Lösung in  $C(\overline{B_R(0)}) \cap C^\infty(B_R(0))$  von

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } B_R(0), \\ u = \varphi & \text{auf } \partial B_R(0), \end{cases} \quad (10.24)$$

für  $\varphi \in C(\partial B_R(0))$ .

**Beweis.** Die Eindeutigkeit folgt aus dem Maximumprinzip. Die Tatsache, dass  $\Delta K_{B_R(0)}(x, y) = 0$  für  $x \in B_R(0)$  kontrolliert man direkt; singuläre Stellen von  $x \mapsto K_{B_R(0)}(x, y)$  findet man nur für  $x \in \partial B_R(0)$ . Man soll nur noch beweisen, dass  $u$  stetig ist beim Rand. Dazu bemerkt man erst, dass

$$\int_{\partial B_R(0)} K_{B_R(0)}(x, y) d\sigma_y = 1.$$

Diese Identität folgt aus der Darstellungsformel, weil  $u(x) = 1$  eine Lösung ist von (10.24) mit  $\varphi = 1$ . Sei nun  $x_* \in \partial B_R(0)$  und sei  $\delta > 0$  derart, dass

$$y \in \partial B_R(0) \text{ und } |x_* - y| < \delta \implies |\varphi(x_*) - \varphi(y)| < \varepsilon.$$

<sup>3</sup>Joseph Liouville, Französischer Mathematiker, 1809 – 1882

Dann folgt

$$\begin{aligned} |u(x) - u(x_*)| &= |u(x) - \varphi(x_*)| = \left| \int_{\partial B_R(0)} K_{B_R(0)}(x, y) (\varphi(y) - \varphi(x_*)) d\sigma_y \right| \leq \\ &\leq \varepsilon \int_{\substack{\partial B_R(0) \\ |x_* - y| < \delta}} K_{B_R(0)}(x, y) d\sigma_y + 2 \|\varphi\|_{L^\infty(\partial B_R(0))} \int_{\substack{\partial B_R(0) \\ |x_* - y| \geq \delta}} K_{B_R(0)}(x, y) d\sigma_y \leq \\ &\leq \varepsilon \int_{\partial B_R(0)} K_{B_R(0)}(x, y) d\sigma_y + 2 \|\varphi\|_{L^\infty(\partial B_R(0))} \int_{\substack{\partial B_R(0) \\ |x_* - y| \geq \delta}} \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n |x - y|^n} d\sigma_y = (*). \end{aligned}$$

Wenn  $|x - x_*| < \frac{1}{2}\delta$  und  $|x_* - y| \geq \delta$  gilt, folgt

$$|x - y| \geq |x_* - y| - |x - x_*| \geq \delta - \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\delta$$

und

$$\begin{aligned} (*) &\leq \varepsilon + 2 \|\varphi\|_{L^\infty(\partial B_R(0))} \int_{\partial B_R(0)} \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n \left(\frac{1}{2}\delta\right)^n} d\sigma_y \leq \\ &\leq \varepsilon + 2 \|\varphi\|_{L^\infty(\partial B_R(0))} (R^2 - |x|^2) R^{n-2} \left(\frac{2}{\delta}\right)^n. \end{aligned}$$

Weil  $(R^2 - |x|^2) = (R + |x|)(R - |x|) \leq 2R(|x_*| - |x|) \leq 2R|x - x_*|$  gilt, können wir  $x$  genügend nahe an  $x_*$  nehmen um  $2 \|\varphi\|_{L^\infty(\partial B_R(0))} (R^2 - |x|^2) R^{n-2} \left(\frac{2}{\delta}\right)^n$  beliebig klein zu bekommen. Genügend klein wie zum Beispiel  $|u(x) - u(x_*)| < 2\varepsilon$ . Weil  $\varepsilon > 0$  beliebig ist, ist  $u$  stetig in  $x_*$ . ■

**Theorem 10.18** Sei  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und sei  $u \in C(\Omega)$ . Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

- $u$  ist harmonisch.
- $u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(y) d\sigma_y$  für alle  $B_R(x)$  mit  $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$ .

**Beweis.** Die eine Richtung ist der Mittelwertsatz. Für die andere Richtung verwenden wir, dass wir eine Lösungsformel haben für harmonische Funktionen auf Kugeln bei vorgeschriebenen stetigen Randwerten. Das heißt, für jede Kugel  $B_R(x_0)$  mit  $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$  ist

$$w(x) = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{R\omega_n} \int_{\partial B_R(x_0)} \frac{u(y)}{|x - y|^n} d\sigma_y$$

harmonisch innerhalb  $B_R(x_0)$  und stetig auf  $\overline{B_R(x_0)}$ .

Man hat also  $w - u \in C(\overline{B_R(x_0)})$  und sogar

$$w(x) - u(x) = 0 \text{ für } x \in \partial B_R(x_0). \quad (10.25)$$

Dann hat  $w - u$  die folgende Mittelwerteigenschaft auf jeder Sphäre  $\partial B_r(x_*)$  innerhalb  $B_R(x_0)$ :

$$w(x_*) - u(x_*) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_*)} (w(y) - u(y)) d\sigma_y,$$

und das bedeutet, dass  $w - u$  kein Extrem in  $x_*$  haben kann. Anders gesagt, die Funktion  $w - u$  kann sein Maximum und Minimum nur auf dem Rand  $\partial B_r(x_0)$  annehmen. Wegen (10.25) bedeutet es  $w = u$  auf  $\overline{B_R(x_0)}$  und dass  $u$  harmonisch ist. ■

**Korollar 10.19** Sei  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und seien  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C(\Omega)$  harmonisch auf  $\Omega$ . Wenn  $u_k$  lokal gleichmäßig zu  $u$  konvergiert, so ist auch  $u$  harmonisch auf  $\Omega$ .

**Beweis.** Wenn  $u_k \rightarrow u$  konvergiert, dann gilt für jede Kugel in  $\Omega$ , dass

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u_k(y) d\sigma_y = \\ &= \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(y) d\sigma_y = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(y) d\sigma_y. \end{aligned}$$

Wegen Theorem 10.18 ist  $u$  harmonisch. ■

**Korollar 10.20** Sei  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und seien  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C(\Omega)$  harmonisch auf  $\Omega$ . Nehme an, dass die Funktionen lokal gleichmäßig beschränkt sind. Dann existiert eine Teilfolge  $\{u_{k_\ell}\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ , die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion  $u$  konvergiert und die harmonisch ist auf  $\Omega$ .

**Beweis.** Lemma 10.15 zeigt, dass auf jede Kugel  $B_R(x_1)$  mit  $\overline{B_R(x_1)} \subset \Omega$  die Ableitungen  $\nabla u_k$  gleichmäßig beschränkt sind. Wegen der Offenheit von  $\Omega$  gibt es  $r_1 > 0$  mit  $B_{R+2r_1}(x_1) \subset \Omega$  und man wende das Ergebnis an auf  $B_{r_1}(x_0)$  für  $x_0 \in \overline{B_R(x_1)}$ . Dann folgt, dass die  $u_k$  gleichgradig stetig sind auf  $\overline{B_R(x_1)}$ . Der Satz von Arzelá-Ascoli besagt, dass es eine konvergente Teilfolge gibt. Korollar 10.19 liefert die gewünschte Teilfolge. ■





# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 11



## Existenz nach Perron

### 11.1 Das Theorem von Perron

Wie schon angekündigt liefert die Methode von Perron für

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (11.1)$$

eine Lösung  $u \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , angenommen  $\varphi$  ist stetig und  $\Omega$  genügend „nett“. Wir haben auch gesehen, dass  $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\}$  kein nettes Gebiet ist. Es wird Zeit für eine Bedingung, die uns  $\Omega$  genügend nett sein läßt.

**Bedingung 11.1** *Ein Gebiet  $\Omega$  erfüllt die äußere Kugelbedingung, wenn es für jedes  $x^* \in \partial\Omega$  eine Kugel  $B \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$  gibt mit  $x^* \in \partial B$ .*

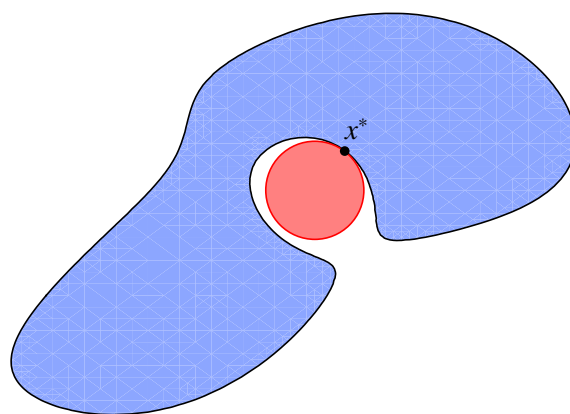


Abbildung 11.1: Die äußere Kugelbedingung.

**Bemerkung 11.1.1** *Diese äußere Kugelbedingung läßt sich leicht als ausreichende Bedingung verwenden. Tatsächlich kann man man diese Bedingung abschwächen. Eine äußere Kegelbedingung (e statt u!) reicht auch. Leider wird der Beweis aufwendiger.*

**Bemerkung 11.1.2** *Isolierte Punkte als Teil des Randes erfüllen klar weder die äußere Kugelbedingung noch eine äußere Kegelbedingung. Derartige Ränder sind jedoch nicht die einzigen, die Schwierigkeiten bereiten. Henri Lebesgue hat gezeigt, dass es auch zusammenhängende Ränder gibt, die keine Lösung in  $C(\bar{\Omega})$  zulassen. Sein Gegenbeispiel in drei Dimensionen in der Form einer hineingerichteten Spitze ist als „Lebesgue thorn“ bekannt geworden.*

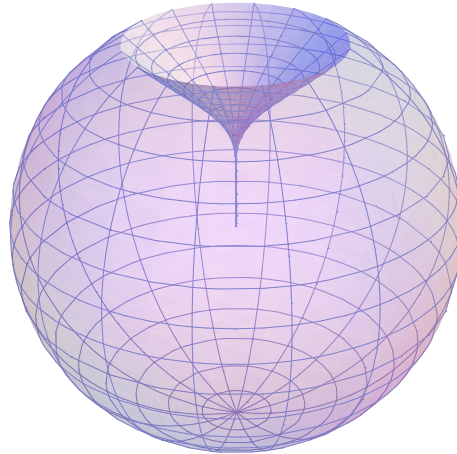


Abbildung 11.2: Bild einer Kugel mit einem „Lebesgue thorn“. Das Horn (oder der Dorn) ist hier wie folgt definiert:  $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < \exp(-1/z) \text{ für } z > 0\}$ . Also gilt  $\Omega = B_1(0) \setminus D$ .

**Theorem 11.2 (Perron)** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet, das die äußere Kugelbedingung erfüllt. Dann gibt es für jedes  $\varphi \in C(\partial\Omega)$  eine eindeutige Lösung  $u \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  zu (11.1).*

## 11.2 Minimum und Infimum bei superharmonisch

Man definiert

$$S_\varphi(\bar{\Omega}) = \{u \in C(\bar{\Omega}) ; u \text{ superharmonisch in } \Omega \text{ und } u \geq \varphi \text{ auf } \partial\Omega\}$$

und sucht die Lösung durch

$$u(x) := \inf \{v(x) ; v \in S_\varphi(\bar{\Omega})\}.$$

Wir werden das Theorem in mehreren Schritten beweisen.

**Lemma 11.3**  *$S_\varphi(\bar{\Omega})$  ist nicht leer und für  $u \in S_\varphi(\bar{\Omega})$  gilt  $u(x) \geq \min \{\varphi(x) ; x \in \partial\Omega\}$ .*

**Beweis.** Weil  $\varphi$  stetig ist auf einer beschränkten und abgeschlossenen Menge, existiert  $\min \{\varphi(x) ; x \in \partial\Omega\}$  und  $\max \{\varphi(x) ; x \in \partial\Omega\}$ . Die Konstante  $m = \min \{\varphi(x) ; x \in \partial\Omega\}$  liefert eine konstante Funktion in  $S_\varphi(\bar{\Omega})$ . Weiter gilt es, dass

$$u(x) \geq \min \{u(x) ; x \in \partial\Omega\} \geq \min \{\varphi(x) ; x \in \partial\Omega\}$$

weil eine superharmonische Funktion ihr Minimum am Rand annimmt. ■

**Lemma 11.4** Sei  $u_1, u_2 \in S_\varphi(\bar{\Omega})$  und definiere

$$u(x) = \min(u_1(x), u_2(x)).$$

Dann gilt  $u \in S_\varphi(\bar{\Omega})$ .

**Bemerkung 11.4.1** Durch wiederholte Anwendung folgt auch:  $u_1, \dots, u_k \in S_\varphi(\bar{\Omega})$  impliziert  $x \mapsto \min(u_1(x), \dots, u_k(x)) \in S_\varphi(\bar{\Omega})$ .

**Beweis.** Sei  $x_0 \in \Omega$  und nehme an,  $u(x_0) = u_1(x_0)$ . Dann gilt für  $B_r(x_0) \subset \Omega$ , dass

$$u(x_0) = u_1(x_0) \geq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u_1(y) d\sigma_y \geq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y) d\sigma_y.$$

Die Bedingung  $u \geq \varphi$  ist direkt erfüllt. ■

**Lemma 11.5** Sei  $u \in S_\varphi(\bar{\Omega})$  und sei  $B_R(x_0) \subset \Omega$ . Definiere

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in \bar{\Omega} \setminus B_R(x_0), \\ \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{R\omega_n} \int_{\partial B_R(x_0)} \frac{u(y)}{|x - y|^n} d\sigma_y & \text{für } x \in B_R(x_0). \end{cases} \quad (11.2)$$

Dann gilt  $\tilde{u} \leq u$  und  $\tilde{u} \in S_\varphi(\bar{\Omega})$ .

**Bemerkung 11.5.1** Die Änderung einer superharmonischen Funktion  $u$  zu  $\tilde{u} \leq u$  nennt man „harmonic lowering“ von  $u$ . Besser bekannt ist die ähnliche Änderung einer subharmonischen Funktion  $u$  zu  $\tilde{u} \geq u$ , die als „harmonic lifting“ von  $u$  bezeichnet wird.

**Beweis.** Die Funktion  $u - \tilde{u}$  ist superharmonisch und identisch 0 auf  $\partial B_R(x_0)$ . Wegen Proposition 10.17 ist  $\tilde{u}$  und darum auch  $u - \tilde{u}$  stetig. Es folgt  $u - \tilde{u} \geq 0$  in  $B_R(x_0)$ . Außerhalb gilt  $u - \tilde{u} = 0$ . ■

**Proposition 11.6** Sei  $\Omega$  beschränkt und  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ . Dann ist die Funktion

$$u(x) := \inf \{v(x); v \in S_\varphi(\bar{\Omega})\}. \quad (11.3)$$

harmonisch.

**Beweis.** Sei  $x_0 \in \Omega$  und sei  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset S_\varphi(\bar{\Omega})$  derart, dass  $u_k(x_0) \rightarrow u(x_0)$ . Setzen wir

$$U_k(x) := \min\{u_1(x), \dots, u_k(x)\},$$

so ist  $\{U_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Folge für alle  $x \in \Omega$ . Sei  $B_R(x_0) \subset \Omega$  und definiere  $\tilde{U}_k$  wie in (11.2). Auf  $B_R(x_0)$  sind die Funktionen  $\tilde{U}_k$  harmonisch. Korollar 10.20 liefert eine Teilfolge, die gegen eine harmonische Funktion  $U$  auf  $B_{R/2}(x_0)$  konvergiert. Aus dieser Konstruktion folgt  $U(x_0) = u(x_0)$  und  $U(x) \geq u(x)$  auf  $B_{R/2}(x_0)$ . Wir wollen zeigen, dass  $U(x) = u(x)$  auf  $B_{R/2}(x_0)$ . Nehmen wir an, dass es  $x_1 \in B_{R/2}(x_0)$  gibt mit  $U(x_1) > u(x_1)$ . Dann gibt es  $v \in S_\varphi(\bar{\Omega})$  mit

$$U(x_1) > v(x_1) \geq u(x_1). \quad (11.4)$$

Ähnlich wie vorhin betrachten wir

$$V_k(x) := \min\{v(x), u_1(x), \dots, u_k(x)\}$$

und finden eine harmonische Funktion  $V$  auf  $B_{R/2}(x_0)$  mit

$$U(x_0) = V(x_0)$$

und  $U(x) \geq V(x)$  auf  $B_{R/2}(x_0)$ . Dann folgt aus der Mittelwerteigenschaft, Proposition 2.5, dass  $U = V$  auf  $\overline{B_{R/2}(x_0)}$  im Widerspruch zu (11.4). Also gilt  $U(x) = u(x)$  auf  $B_{R/2}(x_0)$ , und  $u$  ist harmonisch in  $B_{R/2}(x_0)$ . Weil  $x_0$  beliebig ist, ist  $u$  harmonisch auf  $\Omega$ . ■

### 11.3 Beweis mit Barrieren am Rand

Wir müssen noch zeigen, dass diese Lösung  $u$  stetig auf  $\bar{\Omega}$  ist. Wenn  $u \in C(\bar{\Omega})$ , dann folgt aus dem Maximum Prinzip, dass die Lösung eindeutig ist.

**Definition 11.7** Eine Funktion  $b \in C(\bar{\Omega})$  heißt eine Barrierenfunktion bezüglich  $x^* \in \partial\Omega$ , wenn

1.  $b$  ist superharmonisch in  $\Omega$ ;
2.  $b(x^*) = 0$ ;
3.  $b(x) > 0$  für  $x \in \bar{\Omega} \setminus \{x^*\}$ .

**Lemma 11.8** Wenn  $\Omega$  die äußere Kugelbedingung erfüllt an der Stelle  $x^* \in \partial\Omega$ , dann existiert eine Barrierenfunktion bezüglich  $x^* \in \partial\Omega$ .

**Beweis.** Sei  $B_r(x_1)$  eine solche Kugel. Dann definiere für  $n \geq 3$  die Funktion

$$b(x) = r^{2-n} - |x - x_1|^{2-n}.$$

Die Funktion ist sogar harmonisch. Die beiden anderen Eigenschaften in Definition 11.7 zeigt man direkt.

Für  $n = 2$  setzt man  $b(x) = \log|x - x_1| - \log r$ . ■

In zwei Dimensionen kann man Barrierenfunktionen konstruieren, die lokal nur eine äußere Kegelbedingung voraussetzen mit Hilfe der Funktionen, die in Abbildung 1.2 dargestellt sind.

**Proposition 11.9** Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet, das die äußere Kugelbedingung erfüllt an der Stelle  $x^* \in \partial\Omega$ . Dann gilt für die Funktion  $u$  in (11.3), dass

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x^* \\ x \in \Omega}} u(x) = \varphi(x^*). \quad (11.5)$$

**Beweis.** Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es  $\delta > 0$  derart, dass

$$|x - x^*| < \delta \text{ und } x \in \partial\Omega \implies |\varphi(x) - \varphi(x^*)| < \varepsilon.$$

Man nehme  $k_1 > 0$  derartig, dass

$$|x - x^*| \geq \delta \text{ und } x \in \partial\Omega \implies k_1 b(x) > \varphi(x) - \varphi(x^*).$$

Dann gilt für die Funktion  $\bar{w}$ , definiert durch

$$\bar{w}(x) := \varphi(x^*) + \varepsilon + k_1 b(x)$$

dass  $\bar{w} \in S_\varphi(\bar{\Omega})$ . Es gilt also, dass

$$u(x) \leq \bar{w}(x) \text{ für } x \in \bar{\Omega}. \quad (11.6)$$

Auf ähnliche Art kann man auch eine harmonische Funktion  $n(x)$  finden durch

$$n(x) := -\inf \{v(x); v \in S_{-\varphi}(\bar{\Omega})\}. \quad (11.7)$$

Für  $v_1 \in S_\varphi(\bar{\Omega})$  und  $v_2 \in S_{-\varphi}(\bar{\Omega})$  folgt  $v_1 + v_2 \in S_0(\bar{\Omega})$  und weil  $v_1 + v_2$  superharmonisch ist, dass  $v_1 + v_2 \geq 0$  auf  $\bar{\Omega}$ . Anders gesagt

$$v_1 \geq -v_2 \text{ auf } \bar{\Omega}.$$

Es folgt dann auch, dass

$$u(x) = \inf \{v_1(x); v_1 \in S_\varphi(\bar{\Omega})\} \geq \sup \{-v_2(x); v_2 \in S_{-\varphi}(\bar{\Omega})\} = n(x) \text{ für } x \in \bar{\Omega}. \quad (11.8)$$

Auch hier kann man zeigen, dass es  $k_2 > 0$  gibt mit der Funktion

$$\underline{w}(x) := \varphi(x^*) - \varepsilon - k_2 b(x)$$

derart, dass

$$\underline{w}(x) \leq n(x) \text{ für } x \in \bar{\Omega}. \quad (11.9)$$

Aus (11.6-11.8-11.9) folgt

$$\underline{w}(x) \leq n(x) \leq u(x) \leq \bar{w}(x) \text{ für } x \in \bar{\Omega}$$

und dass es  $\delta_1 > 0$  gibt so, dass für  $x \in \bar{\Omega}$  und  $|x - x^*| < \delta_1$  folgt

$$|u(x) - \varphi(x^*)| < 2\varepsilon.$$

Weil  $\varepsilon$  beliebig ist, ist (11.5) erfüllt. ■



# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 12



## Laplace und Regularität

### 12.1 Bemerkungen zur Regularität

Wir haben gezeigt, dass es für  $f \in C^1(\bar{\Omega})$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit einer äußeren Kugelbedingung, eine Lösung  $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  gibt zu

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (12.1)$$

Wenn man vergleicht mit dem eindimensionalen Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{für } x \in (a, b), \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial(a, b), \end{cases} \quad (12.2)$$

dann folgt für (12.2), dass für  $f \in C^1([a, b])$  die Lösung  $u$  sogar in  $C^3([a, b])$  liegt. Und wenn man nur  $f \in C([a, b])$  hat, folgt immer noch eine Lösung  $u \in C^2([a, b])$ . Ganz allgemein kann man für (12.2) direkt zeigen, dass  $f \in C^{k,\gamma}([a, b])$  eine Lösung  $u \in C^{k+2,\gamma}([a, b])$  ergibt.

Kann man ähnliches vielleicht auch für (12.1) erwarten? Eine extra Schwierigkeit hat man durch den Rand, der im eindimensionalen Fall sehr trivial ist. Wenn wir nun annehmen, dass der Rand sehr schön ist, sagen wir  $\partial\Omega \in C^\infty$ , oder wenn wir vom Rand weg bleiben, gibt es dann ähnliches?

Die Perronsche Methode gibt uns eine Lösung zu (12.1) in zwei Schritten:

1. Man setzt

$$u_1(x) = \int_{\Omega} F_n(x-y) f(y) dy \quad (12.3)$$

und bekommt für  $f \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , dass  $u_1 \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  mit  $-\Delta u_1(x) = f(x)$  für  $x \in \Omega$ .

2. Man findet anschließend eine Lösung  $u_2 \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  von

$$\begin{cases} -\Delta u_2(x) = 0 & \text{für } x \in \Omega, \\ u_2(x) = u_1(x) & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (12.4)$$

Die Funktion  $u = u_1 - u_2$  ist die Lösung von (12.1). Die Eindeutigkeit folgt dabei aus dem Maximum-Prinzip.

## 12.2 Regularität und Fundamentallösung

In Proposition 9.3 haben wir schon bewiesen, dass für  $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$  folgt, dass für  $w$ , definiert durch

$$w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy, \quad (12.5)$$

gilt  $w \in C^2(\mathbb{R}^n)$ . Hier ist  $F_n$  die Fundamentallösung aus Definition 9.1. Wenn  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$  gilt, dann kann man wie folgt verfahren:

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} w(x) &= \partial_{x_i} \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy = \\ &= \partial_{x_i} \int_{\mathbb{R}^n} F_n(z) f(x-z) dz = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(z) \partial_{x_i} f(x-z) dz = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) \partial_{y_i} f(y) dy. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Man kann also eine Ableitung durch das Integralzeichen schieben.

Für  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$  gilt  $\partial_i f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$  und deshalb folgt aus Proposition 9.3 für (12.6), dass  $\partial_i w \in C^2(\mathbb{R}^n)$  gilt. Dies gilt für jedes  $i$ , also gilt  $w \in C^3(\mathbb{R}^n)$ . Man kann diese Schritte beliebig wiederholen und so folgt:

**Lemma 12.1** Sei  $k \in \mathbb{N}^+$ . Für  $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$  und  $w$  definiert in (12.5) gilt  $w \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ .

Mit mehr Mühe kann man sogar zeigen, dass für  $k \in \mathbb{N}$  und  $\gamma \in (0, 1)$  gilt:

$$f \in C_0^{k,\gamma}(\mathbb{R}^n) \implies w \in C^{k+2,\gamma}(\mathbb{R}^n).$$

Die Hölder-Stetigkeit der Lösung ist +2 besser als die Hölder-Stetigkeit der rechten Seite. Für  $C_0^k(\mathbb{R}^n)$  (oder  $C_0^{k,1}(\mathbb{R}^n)$ ) und Dimensionen  $n \geq 2$  gilt die Erhöhung der Differenzierbarkeit um 2 nicht:

$$f \in C_0^k(\mathbb{R}^n) \not\Rightarrow w \in C^{k+2}(\mathbb{R}^n).$$

Wir werden nun ein Beispiel geben bei dem  $f \in C(\bar{\Omega})$  und die Lösung von (12.1) nicht zweimal stetig differenzierbar ist.

**Beispiel 12.2** Die Funktion

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \log(-\log(x_1^2 + x_2^2)) & \text{für } x \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } x = (0, 0), \end{cases}$$

ist eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{für } x \in B_r(0), \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial B_r(0), \end{cases} \quad (12.7)$$

mit  $r = 1/\sqrt{e}$  und

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{4x_1 x_2 (1 - 2 \log(x_1^2 + x_2^2))}{(x_1^2 + x_2^2) (\log(x_1^2 + x_2^2))^2} & \text{für } x \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } x = (0, 0). \end{cases}$$

Die Funktion  $f$  ist stetig auf  $\overline{B_r(0)}$ , denn die rationale Teilfunktion ist beschränkt und der Logarithmus im Nenner sorgt für Konvergenz gegen 0 für  $x \rightarrow (0, 0)$ . Man kann



auch zeigen, dass  $u \in C^{1,\gamma}(\overline{B_r(0)})$  für jede  $\gamma < 1$ . Die Funktion  $u$  ist aber nicht zweimal differenzierbar in  $(0,0)$ . Die zweite Ableitung von  $u$  nach zum Beispiel  $x_1$  ist nicht definiert in  $(0,0)$  und unbeschränkt bei  $(0,0)$ :

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} \partial_{x_2} u(x_1, x_2) &= \log(-\log(x_1^2 + x_2^2)) + \\ &+ \frac{2x_1^4 + 2x_2^4}{(x_1^2 + x_2^2)^2 \log(x_1^2 + x_2^2)} - \frac{4x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2 (\log(x_1^2 + x_2^2))^2} \end{aligned}$$

Von den drei Termen hat der erste eine Singularität in  $(0,0)$ . Die zwei übrigen Terme kann man stetig durch 0 in  $(0,0)$  fortsetzen.

Man kann sich noch fragen, ob denn dieses  $u$  tatsächlich die einzige Lösung zu (12.7) ist. Wenn es eine zweite Lösung  $u_2$  gäbe, dann betrachte man  $w = u - u_2$ . Das Maximumprinzip oder der Mittelwertsatz hat zwar als Voraussetzung, dass  $w \in C^2(B_r(0)) \cap C(\overline{B_r(0)})$ , doch man kann zeigen, dass  $w \in W^{2,p}(B_r(0)) \cap C(\overline{B_r(0)})$  mit  $p$  groß reicht. Es folgt so, dass  $w = 0$ .

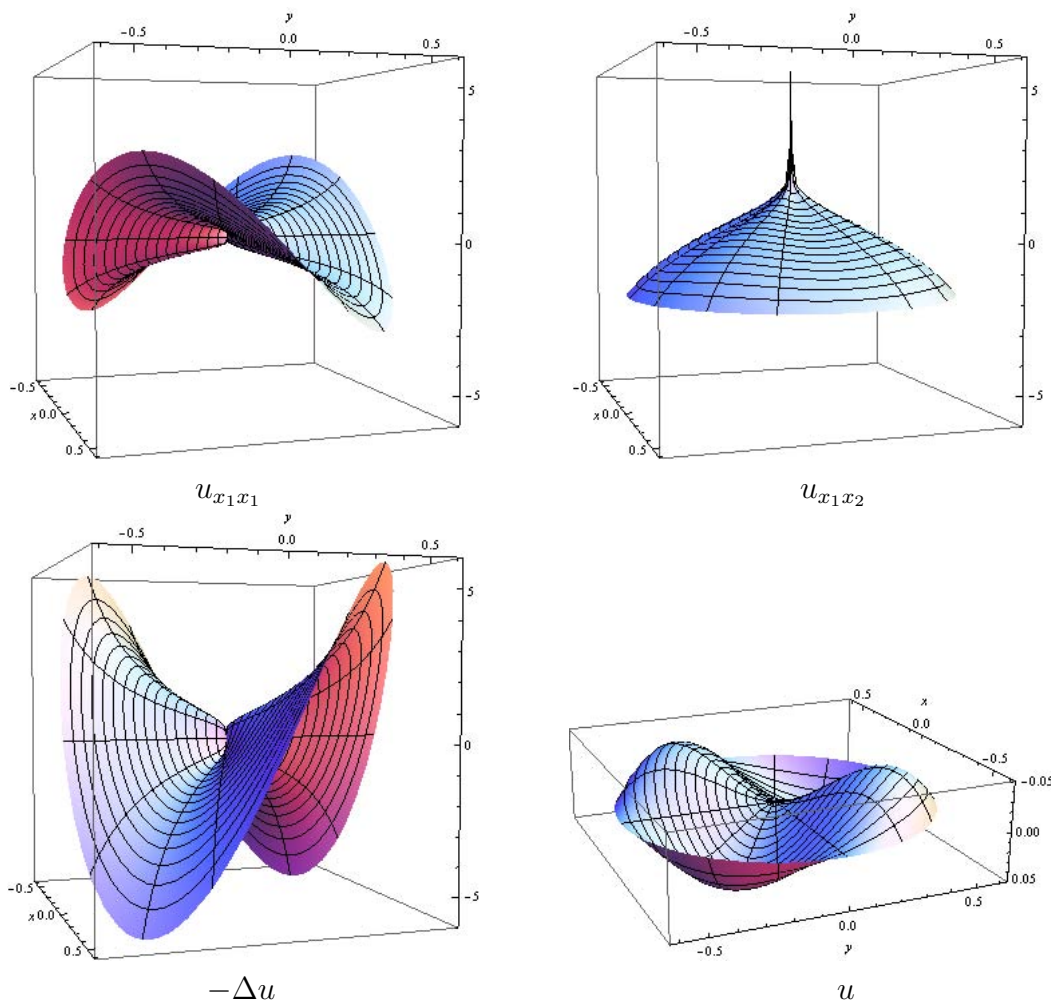


Abbildung 12.1: Skizzen zu den Funktionen aus Beispiel 12.2:

## 12.3 Regularität und Rand

Um den soeben gezeigten Ansatz zu verwenden, müsste man  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  auf ( $k$  mal) stetig differenzierbare Art erweitern können.

**Lemma 12.3** Sei  $f \in C^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})$ . Dann gibt es eine Erweiterung  $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ .

**Beweis.** Man definiere für  $x_1 < 0$  und  $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\tilde{f}(x_1, x') = \sum_{m=1}^{k+1} a_m f(-mx_1, x')$$

mit  $a_m$  bestimmt durch

$$1 = \sum_{m=1}^{k+1} (-m)^\ell a_m \text{ für } \ell \in \{0, 1, \dots, k\}. \quad (12.8)$$

Anders gesagt,  $a_m$  erfüllt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -m-1 \\ (-1)^2 & (-2)^2 & (-3)^2 & \dots & (-m-1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^k & (-2)^k & (-3)^k & \dots & (-m-1)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dieser Typ von Matrix ist nach Vandermonde benannt und bekanntlich invertierbar wenn die zweite Zeile keine gleichen Zahlen enthält. Es gibt also eine eindeutige Lösung  $a_1, \dots, a_{k+1}$ . Wenn die Gleichungen in (12.8) erfüllt sind, findet man für  $\ell + |\alpha| \leq k$ , dass

$$\begin{aligned} \partial_{x_1}^\ell \partial_{x'}^\alpha \tilde{f}(0, x') &= \lim_{x_1 \downarrow 0} \partial_{x_1}^\ell \partial_{x'}^\alpha \left( \sum_{m=1}^{k+1} a_m f(-mx_1, x') \right) = \\ &= \lim_{x_1 \downarrow 0} \sum_{m=1}^{k+1} a_m (-m)^\ell (\partial_{x_1}^\ell \partial_{x'}^\alpha f)(-mx_1, x') = \\ &= \sum_{m=1}^{k+1} a_m (-m)^\ell (\partial_{x_1}^\ell \partial_{x'}^\alpha f)(0, x') = (\partial_{x_1}^\ell \partial_{x'}^\alpha f)(0, x'). \end{aligned}$$

Dann folgt, dass

$$\tilde{f}(x_1, x') = \begin{cases} f(x_1, x') & \text{für } x_1 \geq 0, \\ \tilde{f}(x_1, x') & \text{für } x_1 < 0, \end{cases}$$

eine  $k$ -mal stetig differenzierbare Funktion ist. ■

**Beispiel 12.4** Die  $C^1$ -Erweiterung von  $f \in C^1[0, \infty)$  wird auf diese Art definiert:

$$\tilde{f}(x) = a_1 f(-x) + a_2 f(-2x) \text{ für } x < 0,$$

und  $a_1, a_2$  werden bestimmt durch

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{x \uparrow 0} \tilde{f}(x) = a_1 f(0) + a_2 f(0) = (a_1 + a_2) f(0), \\ f'(0) &= \lim_{x \uparrow 0} \tilde{f}'(x) = -a_1 f'(0) - 2a_2 f'(0) = (-a_1 - 2a_2) f'(0). \end{aligned}$$

Man löst  $1 = a_1 + a_2$  und  $1 = -a_1 - 2a_2$ , und man findet  $a_1 = 3$  und  $a_2 = -2$ .

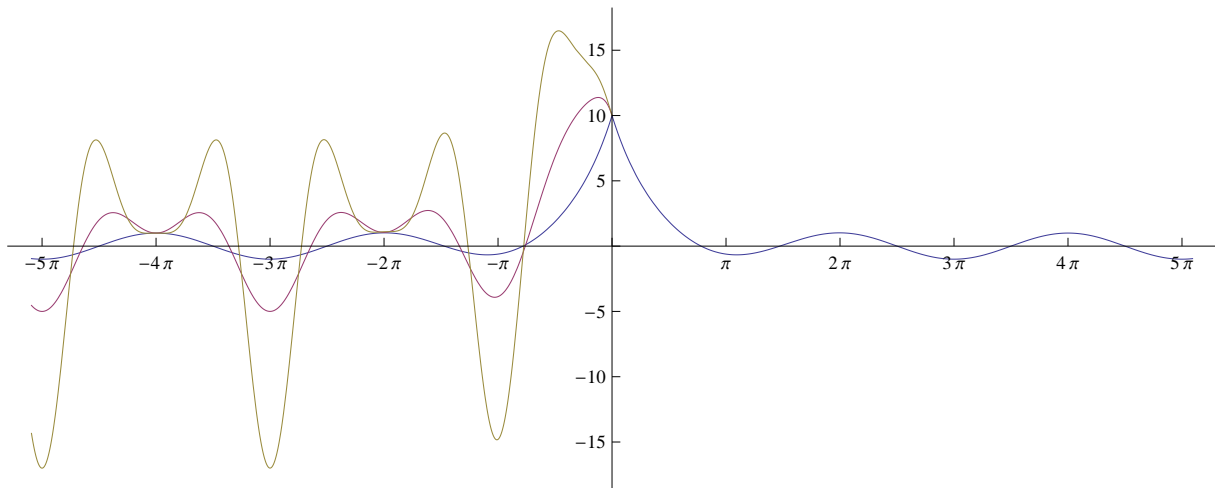


Abbildung 12.2: Die Funktion  $f(x) = 9e^{-x} + \cos(x)$  auf  $[0, \infty)$  und ihre  $C^0$ -,  $C^1$ - und  $C^2$ -Erweiterung auf  $\mathbb{R}^-$ .

Abbildung 12.2 zeigt, dass die Erweiterung bedeutend größer sein kann als die ursprüngliche Funktion. Man kann jedoch zeigen, dass diese Vergrößerung beschränkt ist. Für den Operator  $E_k : C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow C_b^k(\mathbb{R}^n)$ , definiert durch

$$E_k(f)(x_1, x') = \begin{cases} f(x_1, x') & \text{für } (x_1, x') \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}, \\ \sum_{m=1}^{k+1} a_m f(-mx_1, x') & \text{für } (x_1, x') \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1}, \end{cases}$$

mit  $a_m$  (anhängig von  $k$ ) als in (12.8), kann man folgendes zeigen:

**Lemma 12.5** *Es gibt  $C_k$  derart, dass*

$$\|E_k(f)\|_{C_b^k(\mathbb{R}^n)} \leq C_k \|f\|_{C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})} \text{ für alle } f \in C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}).$$

Anders gesagt:  $E_k : C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow C_b^k(\mathbb{R}^n)$  ist ein beschränkter linearer Operator.

**Beweis.** Weil  $E_k(f) \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$  gilt

$$\begin{aligned} \|E_k(f)\|_{C_b^k(\mathbb{R}^n)} &= \|E_k(f)\|_{C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})} + \|E_k(f)\|_{C_b^k(\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1})} = \\ &\leq \|f\|_{C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{m=1}^{k+1} |a_m| \sum_{\alpha_1 + |\alpha'| \leq k} \left\| (-m)^{\alpha_1} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x'}^{\alpha'} f \right\|_{\infty} \leq \\ &\leq \left( 1 + (k+1) \max_{m \leq k+1} \{|a_m| m^k\} \right) \|f\|_{C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})} \end{aligned}$$

für alle  $f \in C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})$ . ■

**Proposition 12.6** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^k$ . Dann gibt es einen beschränkten linearen Operator*

$$E_{k, \Omega} : C^k(\bar{\Omega}) \rightarrow C_0^k(\mathbb{R}^n)$$

mit  $E_{k, \Omega}(f)(x) = f(x)$  für  $x \in \bar{\Omega}$  und  $f \in C^k(\bar{\Omega})$ .

**Beweis.** Wir geben nur eine Skizze. Für  $\partial\Omega$  gibt es wie in Definition 1.9 beschrieben, eine Überdeckung des Randes mit Blöcken  $\{B_i\}_{i=1}^\ell$ . Sei  $\{\chi_i\}_{i=1}^\ell$  eine Zerlegung der Eins derart, dass  $\text{support}(\chi_i) \subset B_i$  für  $i = 1, \dots, \ell$ . Auf jedem dieser Blöcke kann man den Rand in lokalen Koordinaten beschreiben durch  $x_1^{(i)} = \psi_i(x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$  und  $\Omega$  durch  $x_1^{(i)} > \psi_i(x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ . Weil  $\psi_i \in C^k$  kann man den Rand glatt bügeln durch

$$S_i(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) = (x_1^{(i)} - \psi_i(x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}), x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}),$$

und lokal wird eine Funktion zu einer auf dem Halbraum transformiert durch

$$(S_i^* f)(y_1, y') = f(y_1 + \psi_i(y'), y').$$

Formal schreiben wir

$$E_{k,\Omega}(f) = \sum_{i=1}^{\ell} (S_i^*)^{-1} E_k S_i^* (\chi_i f)$$

und die Tatsache, dass diese Definition den gewünschten Erweiterungsoperator liefert, darf der Leser selbst überprüfen. Auch kann man sich davon überzeugen, dass  $E_{k,\Omega}(f)$  einen kompakten Träger hat, der nur abhängt von  $\{\chi_i\}_{i=1}^\ell$ . ■

**Korollar 12.7** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^k$ . Dann gilt für jedes  $f \in C^{k_1}(\bar{\Omega})$  mit  $k_1 \leq k$ , dass  $w \in C^{k_1+1}(\bar{\Omega})$  für

$$w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) E_{k,\Omega}(f)(y) dy.$$

**Bemerkung 12.7.1** Für  $x \in \Omega$  gilt  $-\Delta w(x) = E_{k,\Omega}(f)(x) = f(x)$ .

Dies bedeutet, dass man eine Lösung von (12.1) bekommt, wenn man

$$\begin{cases} -\Delta u_2 = 0 & \text{für } x \in \Omega, \\ u_2 = w & \text{für } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (12.9)$$

löst und  $u = w - u_2$  nimmt. Weil  $u_2 \in C^\infty(\Omega)$  folgt für  $f$  und  $\Omega$  wie in Korollar 12.7, dass  $u \in C^{k_1+1}(\bar{\Omega})$ . Möchte man sogar die Regularität einschließlich des Randes zeigen, kann man für Gebiete, die die äußeren Kugelbedingungen erfüllen, die Funktion  $u_2$  mit Oberlösungen und Unterlösungen annähern und mit Harnackschen Ungleichungen Abschätzungen erzeugen, die dafür sorgen, dass man  $u_2 \in C^1(\bar{\Omega})$  zeigen kann. Für höhere Regularität betrachtet man ein Problem wie (12.9) nun für  $\partial_{x_i} u_2$  usw.

## 12.4 Lösungen und Abschätzungen

In diesem Abschnitt beschreiben wir einige Ergebnisse für Lösungen von

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (12.10)$$

in verschiedenen Rahmen. Um diese Ergebnisse zu beweisen wäre eine Spezialvorlesung nötig.

**Theorem 12.8** Seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $\gamma \in (0, 1)$ . Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^{k+3}$ . Dann gibt es für jedes  $f \in C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$  genau eine Lösung  $u \in C^{k+2,\gamma}(\bar{\Omega})$  zu (12.10).

Außerdem gibt es eine Konstante  $c_{\Omega,k,\gamma} > 0$  derart, dass für jedes  $f \in C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$  und die zugehörige Lösung  $u$  gilt:

$$\|u\|_{C^{k+2,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq c_{\Omega,k,\gamma} \|f\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})}.$$

Für einen Beweis schaue man nach in [6].

Wir haben in Abschnitt 9.2.2 bemerkt, aber nicht bewiesen, dass es bei einem beschränkten Gebiet  $\Omega$  für  $f \in L^2(\Omega)$  eine schwache Lösung  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gibt zu (12.10). Eine schwache Lösung heißt hier:  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  und

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - f v) dx = 0 \text{ für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega). \quad (12.11)$$

Der Raum  $W_0^{1,2}(\Omega)$  wurde in (9.9) definiert. Die Sobolev-Räume  $W^{k,p}(\Omega)$  findet man in Abschnitt 1.5.

**Theorem 12.9** Nehmen wir  $k \in \mathbb{N}$  und  $p \in (1, \infty)$ . Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^{k+3}$ . Sei  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  die schwache Lösung vom Type (1.7). Wenn zusätzlich  $f \in W^{k,p}(\Omega)$  gilt, dann folgt  $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$ .

Außerdem gibt es eine Konstante  $c_{\Omega,k,p} > 0$  derart, dass für jedes  $f \in W^{k,p}(\Omega)$  und für die dazugehörige Lösung  $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{k+2,p}(\Omega)$  gilt:

$$\|u\|_{W^{k+2,p}(\Omega)} \leq c_{\Omega,k,p} \|f\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Für einen Beweis schaue man bei [3, Seite 317] für  $p = 2$  oder in [6] für allgemeine  $p \in (1, \infty)$ .

Wie verhalten sich diese beide Typen von Lösungen? Eine Richtung möge deutlich sein. Weil  $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega}) \subset W^{k,p}(\Omega)$  gilt für beschränkte Gebiete  $\Omega$  und dass es sogar  $c'_{\Omega,k,\gamma} > 0$  gibt mit

$$\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} \leq c'_{\Omega,k,\gamma} \|f\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})} \text{ für alle } f \in C^{k,\gamma}(\bar{\Omega}),$$

findet man für  $f \in C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$  nicht nur  $u \in C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$ , sondern auch  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ . Kann man auch in der umgekehrten Richtung eine Inklusion erwarten? Für  $f \in W^{k,p}(\Omega)$  findet man im Allgemeinen keine Lösung  $u \in C^{k+2,\gamma}(\bar{\Omega})$  aber manchmal schon, dass  $u \in C^{k+1,\gamma}(\bar{\Omega})$ . Die sogenannte Sobolev Einbettungen geben Antwort auf diese Art von Fragen.

Die Sobolevschen Einbettungssätze, die für beschränkte Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  gelten, die eine **innere(!)** Kegelbedingung erfüllen, geben uns die folgenden Abschätzungen:

- Wenn  $k \geq m$  und  $k - \frac{n}{p} > m - \frac{n}{q}$  dann gilt

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq c_{\Omega,k,p,m,q} \|u\|_{W^{m,q}(\Omega)}.$$

- Wenn  $k - \frac{n}{p} > m + \gamma$  dann gilt

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq c_{\Omega,k,p,m,\gamma} \|u\|_{C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})}.$$

Wenn man ganz genau wäre, müßte man bei der letzten Abschätzung eigentlich sagen, dass es für jede Äquivalenzklasse  $U \in W^{k,2}(\Omega)$  einen Vertreter  $u \in C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})$  gibt mit  $\|U\|_{W^{k,2}(\Omega)} \leq c_{\Omega,k,p,m,\gamma} \|u\|_{C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})}$ .

Man kann diese Ergebnisse kombinieren zur folgenden Aussage.

**Korollar 12.10** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^3$ . Dann gibt es für jedes  $f \in C(\bar{\Omega})$  genau eine schwache Lösung  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  zu (12.10). Außerdem gilt  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ , und es gibt  $c_\Omega > 0$  derart, dass für jedes  $f \in C(\bar{\Omega})$  und die zugehörige Lösung  $u$  gilt:*

$$\|u\|_{C^1(\bar{\Omega})} \leq c_\Omega \|f\|_{C(\bar{\Omega})}.$$

**Beweis.** Wenn  $f \in C(\bar{\Omega})$ , dann gilt  $f \in L^p(\Omega)$  für alle  $p \in (1, \infty)$  also auch für  $p = 2$ . Dann gibt es genau eine schwache Lösung in  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , die sogar in  $W^{2,p}(\Omega)$  liegt für alle  $p \in (1, \infty)$ . Für  $p > n$  folgt, dass  $u \in C^{1,\varepsilon}(\bar{\Omega})$  für  $\varepsilon \in (0, 1 - \frac{n}{p})$ . Die Abschätzungen folgen:

$$\|u\|_{C^1(\bar{\Omega})} \leq \|u\|_{C^{1,\varepsilon}(\bar{\Omega})} \leq c_1 \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq c_2 \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq c_3 \|f\|_{C(\bar{\Omega})}.$$

Die Konstanten hängen nur von  $\Omega$  und  $n$  ab. Man kann  $p = 2n$  und  $\varepsilon = \frac{1}{4}$  wählen. ■

Diese Überlegungen führen dazu, dass man für  $f \in C(\bar{\Omega})$  und  $\Omega \in C^3$  nur eine Lösung  $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  findet, und im Allgemeinen nicht in  $C^2(\bar{\Omega})$ . Das bedeutet, dass man eine Gleichung  $-\Delta u = f$  nicht punktweise

$$-\Delta u(x) = f(x) \text{ für alle } x \in \Omega$$

lesen soll, sondern nur

$$-\Delta u = f \text{ fast überall in } \Omega.$$

# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 13



## Semilineare Laplace-Gleichungen

### 13.1 Ein erweitertes Maximum-Prinzip

In diesem Abschnitt betrachten wir

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (13.1)$$

mit  $c \in C(\bar{\Omega})$ .

**Theorem 13.1 (Starkes Maximum-Prinzip)** Sei  $c \geq 0$ . Wenn  $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  eine Lösung ist von (13.1) mit  $0 \leq f \in C(\bar{\Omega})$  und  $p \geq 2$ , dann folgt, dass entweder  $u > 0$  in  $\Omega$  oder  $u = f = 0$  in  $\Omega$ .

Wir werden diese Aussage in mehreren Schritten beweisen. Das erste Ergebnis ist eine schwächere Version des obigen Theorems.

**Proposition 13.2 (Schwachtes Maximum-Prinzip)** Sei  $c \geq 0$ . Wenn  $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  eine Lösung ist von (13.1) und  $0 \leq f \in C(\bar{\Omega})$  und  $p \geq 2$ , dann folgt, dass  $u \geq 0$  in  $\Omega$ .

**Beweis.** Nehmen wir an, dass  $\min u = u(x_0) < 0$ . Weil  $u$  stetig ist, gibt es eine Kugel  $B_r(x_0)$  mit  $u(x) < 0$  für alle  $x \in B_r(x_0)$ . Wir können  $r$  sogar so groß wählen, dass es  $x_1 \in \partial B_r(x_0)$  gibt mit  $u(x_1) = 0$ . Es folgt auch, dass

$$f(x) - c(x)u(x) \geq 0 \text{ auf } B_r(x_0)$$

und damit, dass  $u$  superharmonisch ist auf  $B_r(x_0)$ . Wir finden einen Widerspruch zu  $u(x_1) = 0$ . Also folgt  $u \geq 0$  in  $\Omega$ . ■

**Lemma 13.3** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und sei  $u \in C(\bar{\Omega})$  eine nichtnegative Funktion. Wenn es  $x_0, x_1 \in \Omega$  gibt mit  $u(x_0) > 0 = u(x_1)$ , dann gibt es  $x_4, x_5 \in \Omega$  und  $R > 0$  mit

1.  $u(x_4) = 0$  und  $x_4 \in \partial B_R(x_5)$ ;
2.  $u(x) > 0$  für  $x \in \overline{B_R(x_5)} \setminus \{x_4\}$ ;

3.  $B_{2R}(x_4) \subset \Omega$ .

**Beweis.** Weil  $\Omega$  zusammenhängend ist, gibt es einen Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  mit  $\gamma(0) = x_0$  und  $\gamma(1) = x_1$ . Setze

$$t_2 = \inf \{t \in [0, 1]; u(\gamma(t)) = 0\} \text{ und } x_2 = \gamma(t_2).$$

Weil  $x_2 \in \Omega$  und  $\Omega$  offen ist, gibt es  $R_2 > 0$  mit  $B_{R_2}(x_2) \subset \Omega$ . Setze

$$t_3 = \inf \{t \in [0, 1]; \gamma(t) \in B_{R_2/2}(x_2)\} \text{ und } x_3 = \gamma(t_3).$$

Es gilt  $t_3 < t_2$  und  $u(x_3) > 0$ . Weil  $u$  stetig ist, gilt  $u(x) > 0$  in einer Umgebung von  $x_3$  und

$$R_3 = \sup \{r \in [0, R_2/2]; u(x) > 0 \text{ auf } B_r(x_3)\}$$

ist derart, dass es  $x_4 \in \partial B_{R_3}(x_3)$  gibt mit  $u(x_4) = 0$ . Für  $x \in B_{R_3}(x_3)$  gilt  $u(x) > 0$ . Um zu verhindern, dass es mehrere Stellen auf  $\partial B_{R_3}(x_3)$  gibt, wo  $u(x) = 0$  gilt, brauchen wir noch einen Schritt. Setze  $x_5 = \frac{1}{2}(x_3 + x_4)$  und  $R = \frac{1}{2}R_3$ . ■

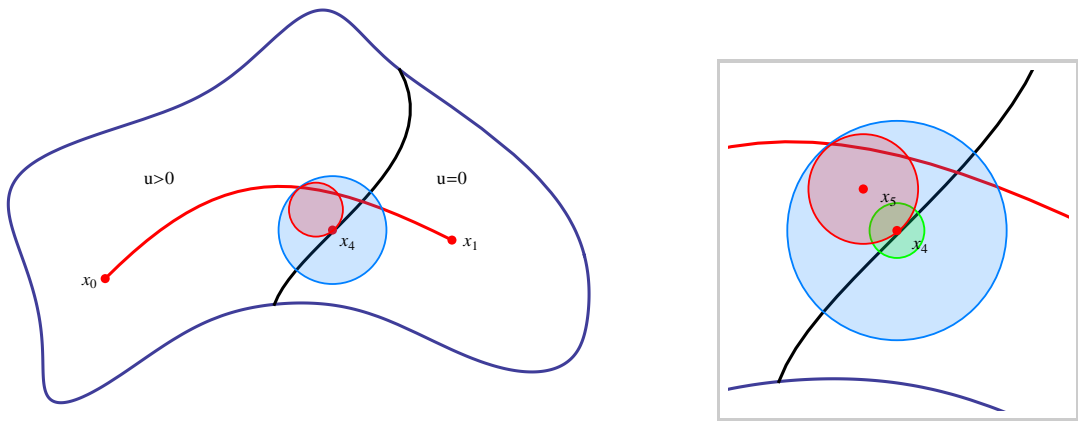


Abbildung 13.1: Die Konstruktion in Lemma 13.3 mit Detailansicht.

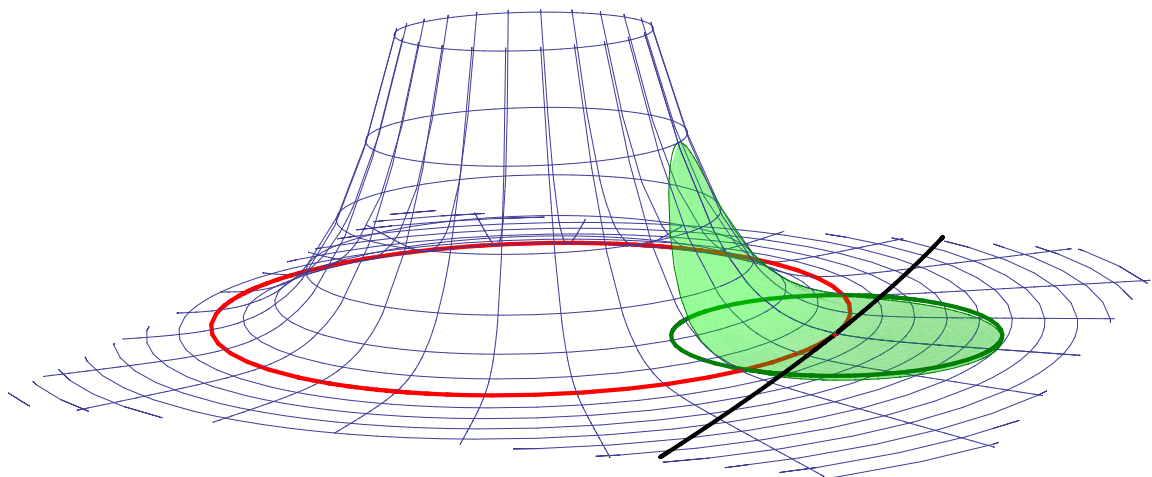


Abbildung 13.2: Die Hilfsfunktion aus dem Beweis zu Theorem 13.1. Die Funktion  $v$  ist mit dem blauen Gitter dargestellt; die Einschränkung von  $v$  auf  $B_{R/2}(x_4)$  ist grün.

**Beweis von Theorem 13.1.** Sei  $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  eine Lösung von (13.1) mit  $0 \leq f \in C(\bar{\Omega})$ . Wegen des schwachen Maximum-Prinzips gilt  $u \geq 0$  auf  $\Omega$ . Wir nehmen



an, es gibt  $x_0, x_1 \in \Omega$  mit  $u(x_0) > 0$  und  $u(x_1) = 0$ . Wir nehmen  $x_4, x_5$  und  $R$  wie in Lemma 13.3 und definieren  $r = \frac{1}{2}R$  und

$$v(x) = \frac{e^{-\alpha|x-x_5|^2} - e^{-\alpha r^2}}{1 - e^{-\alpha r^2}},$$

wobei wir momentan  $\alpha$  noch nicht festlegen. Wir werden für  $u - \varepsilon v$  einen Widerspruch erzeugen auf  $B_r(x_4)$ .

Für  $v$  gilt:

- $v(x) > 0$  für  $|x - x_5| < r$  und  $v(x) < 0$  für  $|x - x_5| > r$ ;
- $(-\Delta + c(x))v(x) < 0$  für  $|x - x_5| > r$  und genügend großes  $\alpha$ , denn

$$\begin{aligned} (-\Delta + c(x))v(x) &= \frac{-\nabla \left( -2\alpha(x - x_5) e^{-\alpha|x-x_5|^2} \right) + c(x) \left( e^{-\alpha|x-x_5|^2} - e^{-\alpha r^2} \right)}{1 - e^{-\alpha r^2}} = \\ &= \frac{(2n\alpha - 4\alpha^2|x - x_5|^2) e^{-\alpha|x-x_5|^2} + c(x) \left( e^{-\alpha|x-x_5|^2} - e^{-\alpha r^2} \right)}{1 - e^{-\alpha r^2}} \leq \\ &\leq \frac{(-4\alpha^2 r^2 + 2n\alpha + c(x)) e^{-\alpha|x-x_5|^2} - c(x) e^{-\alpha r^2}}{1 - e^{-\alpha r^2}}. \end{aligned}$$

Man wähle  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  so, dass  $-4\alpha^2 r^2 + 2n\alpha + c(x) < 0$ .

Wir müssen als nächstes  $\varepsilon$  vernünftig wählen: Für  $x \in \partial B_r(x_4) \cap \overline{B_R(x_5)}$  gilt  $u(x) > 0$ , und weil  $\partial B_r(x_4) \cap \overline{B_R(x_5)}$  kompakt ist und  $u$  stetig, kann man  $\varepsilon > 0$  derart wählen, dass

$$\varepsilon v(x) < u(x) \text{ für } x \in \partial B_r(x_4) \cap \overline{B_R(x_5)}. \quad (13.2)$$

Da  $v(x) \leq 0$  und  $u(x) \geq 0$  für  $x \in \partial B_r(x_4) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B_R(x_5))$  und beide Funktionen nicht gleichzeitig 0 sind, folgt

$$u(x) - \varepsilon v(x) > 0 \text{ für } x \in \partial B_r(x_4) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B_R(x_5)). \quad (13.3)$$

Kombiniert man (13.2) und (13.3), so findet man

$$u(x) - \varepsilon v(x) > 0 \text{ für } x \in \partial B_r(x_4).$$

Weil auch

$$(-\Delta + c(\cdot))(u - \varepsilon v) > 0 \text{ auf } B_r(x_4)$$

liefert das schwache Maximum-Prinzip, dass

$$u(x) - \varepsilon v(x) \geq 0 \text{ für } x \in \overline{B_r(x_4)}.$$

Sei nun  $\nu$  der auswärtige Normalenvektor in  $x_4$  an  $B_{2r}(x_5)$ . Weil  $u \in C^1(\Omega)$ , existiert  $(\partial_\nu u)(x_4)$ . Es folgt

$$(\partial_\nu u)(x_4) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{u(x_4 + t\nu) - u(x_4)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{u(x_4 + t\nu) - 0}{t} \geq 0.$$

Weil  $u(x_4) = \varepsilon v(x_4) = 0$  und  $u(x) \geq \varepsilon v(x)$  gilt, folgt auch

$$(\partial_\nu u)(x_4) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{u(x_4) - u(x_4 - t\nu)}{t} \leq \lim_{t \downarrow 0} \frac{0 - \varepsilon v(x_4 - t\nu)}{t} < 0$$

und das gibt einen Widerspruch. ■

## 13.2 Existenz und Perturbation

In diesem Abschnitt betrachten wir für  $\lambda \geq 0$ :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + \lambda u(x) = f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (13.4)$$

**Theorem 13.4** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^3$ . Dann gibt es für jedes  $f \in C(\bar{\Omega})$  und jedes  $\lambda \geq 0$  eine Lösung  $u_\lambda \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  von (13.4).

Wenn  $0 \leq f \in C(\bar{\Omega})$  und  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$ , dann

$$0 \leq u_{\lambda_2}(x) \leq u_{\lambda_1}(x) \text{ für alle } x \in \Omega.$$

**Beweis.** Wenn wir für jedes  $f \in C(\bar{\Omega})$  mit  $f \geq 0$  eine Lösung  $u_\lambda$  von (13.4) finden, kann man auch für beliebige  $f \in C(\bar{\Omega})$  eine Lösung finden. Denn sei  $f \in C(\bar{\Omega})$ , dann gilt  $f^+ := \frac{1}{2}(|f| + f) \in C(\bar{\Omega})$  und  $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f) \in C(\bar{\Omega})$  und  $f^+, f^- \geq 0$ . Wenn  $u_1, u_2$  Lösungen von (13.4) mit rechts  $f^+$  beziehungsweise  $f^-$ , dann ist  $u = u_1 - u_2$  eine Lösung von (13.4) mit  $f$ . Wir dürfen also annehmen, dass  $f \geq 0$  gilt.

Wir definieren nun  $\mathcal{G}_\Omega : C(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega})$  als den Lösungsoperator für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (13.5)$$

Genauer gesagt, ist  $\mathcal{G}_\Omega f$  für  $f \in C(\bar{\Omega})$  eine Lösung von (13.5) in  $W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ . Wegen Korollar 12.10 gilt  $\|\mathcal{G}_\Omega f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$  und  $A_\lambda : C(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega})$ , definiert durch

$$A_\lambda u = \mathcal{G}_\Omega (f - \lambda u),$$

ist für  $|\lambda| C_\Omega < 1$  mit  $C_\Omega$  aus Korollar 12.10 eine Kontraktion. Für solche  $\lambda$  liefert der Fixpunktsatz von Banach eine Funktion  $u_\lambda \in C(\bar{\Omega})$  mit

$$A_\lambda u_\lambda = u_\lambda.$$

Es gilt  $u_\lambda = \mathcal{G}_\Omega (f - \lambda u_\lambda)$  und somit ist  $u_\lambda$  eine Lösung in  $W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  von (13.4). Wenn  $\lambda \geq 0$ , besagt Proposition 13.2, dass  $u_\lambda \geq 0$ . Dies bedeutet, dass es eine Lösung  $u_\lambda \geq 0$  gibt für  $\lambda \in [0, C_\Omega^{-1})$  und außerdem folgt

$$-\Delta u_\lambda = f - \lambda u_\lambda \leq f \text{ in } \Omega.$$

Es gilt

$$-\Delta (u_\lambda - u_0) = f - \lambda u_\lambda - f = -\lambda u_\lambda \leq 0 \quad (13.6)$$

und durch das Maximum-Prinzip folgt dann  $u_\lambda \leq u_0$ .

- Fassen wir zusammen: Für  $\lambda \in [0, C_\Omega^{-1})$  hat (13.4) eine Lösung  $u_\lambda$ . Weil  $A_\lambda$  eine Kontraktion ist, ist die Lösung  $u_\lambda$  eindeutig. Wegen des Maximum-Prinzips gilt  $0 \leq u_\lambda \leq u_0$ .

Weil  $0 \leq u_\lambda \leq u_0$ , gilt auch

$$\|u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

und wir können für  $\lambda \in [0, C_\Omega^{-1})$  unser Argument wiederholen mit  $\mathcal{G}_{\Omega,\lambda} : C(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega})$  als den Lösungsoperator für

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (13.7)$$

Man zeigt so, dass es eine Lösung gibt für alle  $\lambda \in [0, 2C_\Omega^{-1}]$  usw.

Ähnlich wie in (13.6) findet man für  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$ , dass

$$-\Delta(u_{\lambda_2} - u_{\lambda_1}) + \lambda_1(u_{\lambda_2} - u_{\lambda_1}) = (\lambda_1 - \lambda_2)u_{\lambda_2} \leq 0$$

und aufgrund des Maximum-Prinzips folgt  $0 \leq u_{\lambda_2} \leq u_{\lambda_1}$  in  $\Omega$ . ■

### 13.3 Schwach harmonisch ist harmonisch

**Theorem 13.5 (Das Weylsche Lemma<sup>1</sup>)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und sei  $u \in L_{lok}^1(\Omega)$  derart, dass

$$\int_{\Omega} u \Delta \varphi \, dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (13.8)$$

Dann gibt es eine Funktion  $u^* \in C^\infty(\Omega)$  mit  $\Delta u^* = 0$  und  $u = u^*$  fast überall.

**Beweis.** Wir definieren eine harmonische Funktion  $u_\varepsilon^*$  und zeigen, dass sie auf

$$\Omega_{2\varepsilon} = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > 2\varepsilon\}$$

mit  $u$  fast überall übereinstimmt.

Sei  $\chi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$  mit  $0 \leq \chi_\varepsilon \leq 1$  derart, dass

$$\chi_\varepsilon(r) = \chi_\varepsilon(-r) = \begin{cases} 1 & \text{für } |r| \leq \frac{1}{2}\varepsilon, \\ \dots & \text{für } \frac{1}{2}\varepsilon < |r| < \varepsilon, \\ 0 & \text{für } |r| \geq \varepsilon, \end{cases}$$

und sei

$$F_{n,\varepsilon}(x) = \chi_\varepsilon(|x|)F_n(x)$$

mit  $F_n$  die Fundamentallösung zu  $-\Delta$  auf  $\mathbb{R}^n$ . Wir definieren auch

$$H_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \leq \frac{1}{2}\varepsilon, \\ \Delta F_{n,\varepsilon}(x) & \text{für } \frac{1}{2}\varepsilon < |x| < \varepsilon, \\ 0 & \text{für } |x| \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (13.9)$$

Weil  $\Delta F_n(x) = 0$  für  $x \neq 0$  und  $\chi_\varepsilon$  wie oben definiert ist, folgt  $\Delta F_{n,\varepsilon}(x) = 0$  für  $0 < |x| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$  und auch für  $|x| \geq \varepsilon$ . Es folgt, dass  $H_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Bemerke, dass  $H_\varepsilon$  radialsymmetrisch ist.

Wir setzen nun

$$u_\varepsilon^*(x) = \int_{\Omega} H_\varepsilon(x-y)u(y) \, dy.$$

Weil der Träger von  $y \mapsto H_\varepsilon(x-y)$  in  $\overline{B_\varepsilon(x)}$  liegt,  $H_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  gilt und weil  $u$  lokal integrierbar ist, folgt  $u_\varepsilon^* \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  und

$$\partial_x^\alpha u_\varepsilon^*(x) = \int_{\Omega} \partial_x^\alpha H_\varepsilon(x-y)u(y) \, dy.$$

Für  $x \in \Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$  gilt, dass der Träger von  $y \mapsto H_\varepsilon(x-y)$  innerhalb von  $\Omega$  liegt. Dann folgt aus der Annahme (13.8), dass

$$\Delta u_\varepsilon^*(x) = \int_{\Omega} \Delta H_\varepsilon(x-y)u(y) \, dy = 0.$$

<sup>1</sup>Hermann Klaus Hugo Weyl, Elmshorn 1885 – Zürich 1955.

Die Funktion  $u_\varepsilon^*$  ist harmonisch auf  $\Omega_\varepsilon$ .

Sei  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\delta)$  und setze

$$\psi(x) = \int_{\Omega} F_{n,\varepsilon}(x-y)\varphi(y)dy$$

Es gilt, dass  $\psi \in C_0^\infty(\Omega_{\delta-\varepsilon}) \subset C_0^\infty(\Omega)$  und

$$\Delta\psi(x) = -\varphi(x) + \int_{\Omega_\delta} H_\varepsilon(x-y)\varphi(y)dy.$$

Wir finden

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} u(x)\Delta\psi(x) dx = \int_{\Omega} u(x) \left( -\varphi(x) + \int_{\Omega} H_\varepsilon(x-y)\varphi(y)dy \right) dx = \\ &= - \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx + \int_{\Omega} \varphi(y) \int_{\Omega} H_\varepsilon(x-y)u(x)dx dy = \\ &= - \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx + \int_{\Omega} \varphi(y) \int_{\Omega} H_\varepsilon(y-x)u(x)dx dy = \\ &= - \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx + \int_{\Omega} \varphi(y)u_\varepsilon^*(y)dy = \int_{\Omega} (u_\varepsilon^*(x) - u(x)) \varphi(x)dx. \end{aligned}$$

Weil dies für beliebige  $\varepsilon < \delta$  und  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\delta)$  gilt, folgt für  $\varepsilon < \delta$ :

$$u = u_\varepsilon^* \text{ fast überall auf } \Omega_\delta.$$

Dann gilt für  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 < \delta$ , dass  $u_{\varepsilon_1}^* = u = u_{\varepsilon_2}^*$  fast überall auf  $\Omega_\delta$ . Weil diese  $u_{\varepsilon_i}^*$  harmonisch sind auf  $\Omega_\delta$  sind sie stetig und es folgt  $u_{\varepsilon_1}^* = u_{\varepsilon_2}^*$  auf  $\Omega_\delta$ . Man kann  $\Omega$  auffüllen mit  $\Omega_{1/n}$ , das heißt  $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \Omega_{1/n}$  und so ist  $u^* = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{1/n}^*$  eine wohldefinierte harmonische Funktion auf  $\Omega$  und es gilt  $u = u^*$  fast überall auf  $\Omega$ . ■

Wir haben superharmonische Funktionen auf  $\Omega$  definiert durch  $u \in C(\Omega)$  so, dass für alle  $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$

$$u(x) \geq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma_y. \quad (13.10)$$

Man möchte auch eine schwache Version wie in (13.8) für superharmonische Funktionen bereit haben. Die gibt es, wie wir im nächsten Lemma zeigen werden.

**Lemma 13.6** Sei  $u \in C(\Omega)$ . Wenn

$$\int_{\Omega} u (-\Delta\varphi) dx \geq 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \varphi \geq 0, \quad (13.11)$$

dann ist  $u$  superharmonisch auf  $\Omega$ .

**Bemerkung 13.6.1** Selbstverständlich können wir nicht erwarten, dass eine Funktion  $u \in C(\Omega)$ , die (13.11) erfüllt in Analogie zum Weylschen Lemma, fast überall mit einer stark superharmonischen Funktion übereinstimmt. Mit „stark superharmonisch“ ist gemeint, dass  $u \in W_{lok}^{2,p}(\Omega)$  und  $-\Delta u \geq 0$  gilt. Umgekehrt, wenn  $u \in W_{lok}^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$  die Gleichung  $-\Delta u \geq 0$  erfüllt, folgt (13.11) durch partielle Integration.

**Beweis.** Wir werden (13.10) zeigen für  $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ . Sei  $\psi_\varepsilon$  der Mollifier aus (5.14) und definiere

$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_{B_r(x_0)} \psi_\varepsilon(x-y) G_{B_r(x_0)}(y, x_0) dy.$$

Hier ist  $G_{B_r(x_0)}(y, x)$  die Greensche Funktion auf  $B_r(x_0)$ . Für genügend kleines  $\varepsilon > 0$  folgt  $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ . Auch gilt  $\varphi_\varepsilon \geq 0$ . Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} u(x) (-\Delta \varphi_\varepsilon(x)) dx = \int_{\Omega} u(x) \left( -\Delta_x \int_{B_r(x_0)} \psi_\varepsilon(x-y) G_{B_r(x_0)}(y, x_0) dy \right) dx = \\ &= \int_{\Omega} u(x) \left( \int_{B_r(x_0)} (-\Delta \psi_\varepsilon)(x-y) G_{B_r(x_0)}(y, x_0) dy \right) dx = \\ &= \int_{\Omega} u(x) \left( \psi_\varepsilon(x-x_0) - \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} \psi_\varepsilon(x-y) d\sigma_y \right) dx = \\ &= \int_{\Omega} \psi_\varepsilon(x-x_0) u(x) dx - \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} \left( \int_{\Omega} \psi_\varepsilon(x-y) u(x) dx \right) d\sigma_y. \end{aligned} \quad (13.12)$$

Weil  $u \in C(\Omega)$  gilt

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Omega} \psi_\varepsilon(x-y) u(x) dx = u(y)$$

und aus (13.12) folgt

$$0 \leq u(x_0) - \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y) d\sigma_y.$$

Weil  $x_0 \in \Omega$  beliebig ist, ist so (13.10) bewiesen.  $\blacksquare$

## 13.4 Existenz zwischen Ober- und Unterlösung

In diesem Abschnitt betrachten wir das semilineare Problem

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (13.13)$$

wobei  $f \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$  lokal Lipschitz-stetig in  $u$  ist:

Es gebe also für jedes  $M > 0$  eine Zahl  $L_M \in \mathbb{R}$  mit

$$|f(x, u_1) - f(x, u_2)| \leq L_M |u_1 - u_2| \quad \text{für } x \in \bar{\Omega} \text{ und } |u_1|, |u_2| \leq M. \quad (13.14)$$

Wir werden die Existenz einer Lösung beweisen mit Hilfe einer Methode, die das Maximum-Prinzip und die damit induzierte Ordnung verwendet. Dafür brauchen wir die folgenden Definitionen.

**Definition 13.7** Eine Funktion  $\bar{u} \in C(\bar{\Omega})$  heißt eine Oberlösung, wenn  $\bar{u}(x) \geq 0$  für  $x \in \partial\Omega$  und

$$\int (\bar{u}(x) (-\Delta \varphi(x)) - f(x, \bar{u}) \varphi(x)) dx \geq 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \varphi \geq 0. \quad (13.15)$$

Eine Funktion  $\underline{u} \in C(\bar{\Omega})$  heißt eine Unterlösung, wenn  $\underline{u}(x) \leq 0$  für  $x \in \partial\Omega$  und

$$\int (\underline{u}(x) (-\Delta \varphi(x)) - f(x, \underline{u}) \varphi(x)) dx \leq 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \varphi \geq 0. \quad (13.16)$$

**Bemerkung 13.7.1** Wenn  $\bar{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  oder  $\bar{u} \in W^{2,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , dann gilt  $-\Delta \bar{u} \geq f$  auf  $\Omega$ . Solche  $\bar{u}$  nennt man starke Oberlösung.

**Lemma 13.8** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt mit  $\partial\Omega \in C^3$ . Wenn  $u \in C(\bar{\Omega})$  sowohl Ober- als auch Unterlösung zu (13.13) ist, ist  $u$  eine Lösung.

**Beweis.** Sei  $w \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  für genügend großes  $p$  die Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta w(x) = f(x, u(x)) & \text{für } x \in \Omega, \\ w(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (13.17)$$

Diese existiert, weil  $x \mapsto f(x, u(x)) \in C(\bar{\Omega})$ .

Für  $u - w$  folgt

$$\int (u(x) - w(x)) (-\Delta \varphi(x)) dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \varphi \geq 0. \quad (13.18)$$

Wenn diese Gleichung gilt für alle  $0 \leq \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , dann gilt sie auch für  $0 \geq \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Für beliebige  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  gibt es  $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega)$  mit  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  und  $\varphi_1, \varphi_2 \geq 0$ : Man nehme für  $\varepsilon$  die Distanz zwischen  $\partial\Omega$  und dem Träger von  $\varphi$ , definiere  $\chi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$  mit  $0 \leq \chi_\varepsilon \leq 1$  durch

$$\chi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \bar{\Omega}_\varepsilon, \\ \dots & \text{für } x \in \bar{\Omega}_{\varepsilon/2} \setminus \Omega_\varepsilon, \\ 0 & \text{für } x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_{\varepsilon/2}, \end{cases}$$

und setze  $\varphi_1 = \|\varphi\|_\infty \chi_\varepsilon$  und  $\varphi_2 = \varphi_1 - \varphi$ . Das heißt, dass (13.18) gilt für beliebige  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  und aus dem Weylschen Lemma folgt, dass  $u - w$  ist harmonisch auf  $\Omega$ . Wegen der Randbedingung  $u - w = 0$  folgt  $u = w$  auf  $\bar{\Omega}$ . ■

**Theorem 13.9** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^3$ . Nehme an  $f \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$  erfüllt (13.14). Wenn es eine Oberlösung  $\bar{u}$  und eine Unterlösung  $\underline{u}$  gibt mit

$$\bar{u}(x) \geq \underline{u}(x) \text{ für alle } x \in \Omega,$$

dann gibt es eine Lösung  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  mit

$$\bar{u}(x) \geq u(x) \geq \underline{u}(x) \text{ für alle } x \in \Omega.$$

**Beweis.** Statt dieses Problem für  $f$  zu betrachten, verwendet man

$$\tilde{f}(x, u) := \begin{cases} f(x, \bar{u}(x)) & \text{für } u > \bar{u}(x), \\ f(x, u) & \text{für } \bar{u}(x) \geq u \geq \underline{u}(x), \\ f(x, \underline{u}(x)) & \text{für } \underline{u}(x) > u, \end{cases}$$

und betrachtet

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \tilde{f}(x, u(x)) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (13.19)$$

Für die Funktion  $\tilde{f}$  gilt sogar mit  $L = L_M$  und  $M = \max(\|\bar{u}\|_\infty, \|\underline{u}\|_\infty)$ , dass

$$\left| \tilde{f}(x, u_1) - \tilde{f}(x, u_2) \right| \leq L |u_1 - u_2| \text{ für } x \in \bar{\Omega} \text{ und } u_1, u_2 \in \mathbb{R}. \quad (13.20)$$

Das Randwertproblem (13.19) kann man auch schreiben als

$$\begin{cases} (-\Delta + L) u(x) = \tilde{f}(x, u(x)) + Lu(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (13.21)$$

Sei  $\mathcal{G}_{\Omega,L}$  der Lösungsoperator für

$$\begin{cases} (-\Delta + L)u = g & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (13.22)$$

Theorem 13.4 sichert die Existenz eines solchen Operators. Dann können wir (13.21) auch schreiben als

$$u(x) = \mathcal{G}_{\Omega,L} \left( \tilde{f}(\cdot, u(\cdot)) + Lu(\cdot) \right) (x).$$

Wir möchten einen Fixpunktsatz anwenden für

$$T : C(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega}) \quad \text{mit} \quad Tu = \mathcal{G}_{\Omega,L} \left( \tilde{f}(\cdot, u) + Lu \right).$$

Dazu zeigen wir einige Hilfsresultate.

**Behauptung 13.10** *Sei  $u \in C(\bar{\Omega})$ . Dann gilt folgendes:*

- Wenn  $u$  eine Oberlösung ist, dann gilt  $Tu \leq u$ .
- Wenn  $u$  eine Unterlösung ist, dann gilt  $Tu \geq u$ .

Man findet mit partieller Integration, dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Tu(x) (-\Delta\varphi(x)) dx &= \int_{\Omega} Tu(x) (-\Delta + L)\varphi(x) dx - L \int_{\Omega} Tu(x)\varphi(x) dx = \\ &= \int_{\Omega} ((-\Delta + L)Tu(x))\varphi(x) dx - L \int_{\Omega} Tu(x)\varphi(x) dx = \\ &= \int_{\Omega} \left( \tilde{f}(x, u(x)) + Lu(x) \right) \varphi(x) dx - L \int_{\Omega} Tu(x)\varphi(x) dx = \\ &= \int_{\Omega} \tilde{f}(x, u(x))\varphi(x) dx + L \int_{\Omega} (u(x) - Tu(x))\varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Weil  $u$  eine Oberlösung ist, gilt (13.15) und man findet also

$$\int_{\Omega} (Tu(x) - u(x)) (-\Delta\varphi(x)) dx \leq L \int_{\Omega} (u(x) - Tu(x))\varphi(x) dx.$$

Nehmen wir an:  $Tu(x) - u(x)$  hat ein positives Maximum in  $x_0$ . Dann gilt in eine Umgebung  $B_r(x_0)$  von  $x_0$  für alle  $\varphi \in C_0^\infty(B_r(x_0))$  mit  $\varphi \geq 0$ , dass

$$\int_{B_r(x_0)} (Tu(x) - u(x)) (-\Delta\varphi(x)) dx \leq L \int_{B_r(x_0)} (u(x) - Tu(x))\varphi(x) dx \leq 0.$$

Wegen Lemma 13.6 ist  $Tu - u$  subharmonisch auf  $B_r(x_0)$  und wird somit maximal auf dem Rand  $\partial B_r(x_0)$ . Dann ist  $Tu - u$  konstant, wo  $Tu - u \geq 0$  gilt, und weil  $Tu - u \leq 0$  auf  $\partial\Omega$  ist, folgt, dass diese Konstante nur 0 sein kann. Wir haben einen Widerspruch. Ähnliche Argumente zeigen die Behauptung für eine Unterlösung.  $\square$

**Behauptung 13.11** *Seien  $u_1, u_2 \in C(\bar{\Omega})$ . Dann gilt folgendes:*

- Wenn  $u_1 \leq u_2$  dann gilt  $Tu_1 \leq Tu_2$ .

Wegen (13.20) gilt für  $u_1 \leq u_2$ , dass

$$\left( \tilde{f}(\cdot, u_1) + Lu_1 \right) - \left( \tilde{f}(\cdot, u_2) + Lu_2 \right) \leq L|u_1 - u_2| + L(u_1 - u_2) = 0. \quad (13.23)$$

Aus Proposition 13.2 folgt dann, dass

$$\begin{aligned} Tu_1 - Tu_2 &= \mathcal{G}_{\Omega, L} \left( \tilde{f}(\cdot, u_1) + Lu_1 \right) - \mathcal{G}_{\Omega, L} \left( \tilde{f}(\cdot, u_2) + Lu_2 \right) = \\ &= \mathcal{G}_{\Omega, L} \left( \left( \tilde{f}(\cdot, u_1) + Lu_1 \right) - \left( \tilde{f}(\cdot, u_2) + Lu_2 \right) \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Die Ordnung bleibt erhalten. □

**Behauptung 13.12** Sei  $u \in C(\bar{\Omega})$ . Dann gilt folgendes:

- Wenn  $u$  eine Oberlösung ist, dann ist  $Tu$  eine starke Oberlösung.
- Wenn  $u$  eine Unterlösung ist, dann ist  $Tu$  eine starke Unterlösung.

Sei  $u$  eine Oberlösung. Dann gilt  $Tu \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  für alle  $p \in (1, \infty)$ . Weil  $u \geq Tu$  gilt, und weil

$$s \mapsto \tilde{f}(x, s) + Ls$$

eine monoton wachsende Funktion ist, folgt, dass

$$(-\Delta + L)Tu = \tilde{f}(\cdot, u) + Lu \geq \tilde{f}(\cdot, Tu) + LTu.$$

Also ist  $Tu$  eine starke Oberlösung. □

Diese drei Behauptungen zeigen, dass man mit

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_0 = u \\ \underline{u}_{n+1} := T\underline{u}_n \end{array} \right. \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_0 = \bar{u} \\ \bar{u}_{n+1} := T\bar{u}_n \end{array} \right.$$

Folgen von Unter- und Oberlösungen  $\{\underline{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  und  $\{\bar{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  findet mit

$$u = \underline{u}_0 \leq \underline{u}_1 \leq \underline{u}_2 \leq \cdots \leq \bar{u}_2 \leq \bar{u}_1 \leq \bar{u}_0 = \bar{u}.$$

Diese Funktionen sind gleichgradig gleichmäßig stetig und beschränkt. Wegen des Satzes von Arzela-Ascoli gibt es konvergente Teilfolgen von  $\{\underline{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  und  $\{\bar{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Weil diese Funktionen geordnet sind konvergieren sogar die Folgen selbst. Für  $\underline{u}_\infty(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{u}_k(x)$  und ähnlich für  $\bar{u}_\infty(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{u}_k(x)$  gilt

$$\underline{u}_\infty = \mathcal{G}_{\Omega, L} \left( \tilde{f}(\cdot, \underline{u}_\infty) + L\underline{u}_\infty \right) \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}).$$

Dann ist  $\bar{u}_\infty(\underline{u}_\infty)$  eine Lösung von (13.19). Weil  $\underline{u}(x) \leq \underline{u}_\infty(x) \leq \bar{u}_\infty(x) \leq \bar{u}(x)$ , folgt

$$\tilde{f}(x, \underline{u}_\infty(x)) = f(x, \underline{u}_\infty(x))$$

und  $\bar{u}_\infty(\underline{u}_\infty)$  ist dann sogar eine Lösung von (13.13). Es ist übrigens nicht unbedingt so, dass  $\underline{u}_\infty = \bar{u}_\infty$ . ■



## 13.5 Variationelle Methoden

Auch in diesem Abschnitt betrachten wir das semilineare Problem

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (13.24)$$

Wenn  $f$  bestimmte Eigenschaften hat, kann man zeigen, dass

$$J(u) = \int \left( \frac{1}{2} \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) - F(x, u(x)) \right) dx$$

mit

$$F(x, u(x)) = \int_{v=0}^{u(x)} f(x, v) dv$$

ein Minimum in  $W_0^{1,2}(\Omega)$  besitzt. Wenn  $u_{\min}$  diese minimierende Funktion ist und  $F$  genügend nett ist (zum Beispiel falls  $f$  stetig ist und eine passende Wachstumsbedingung erfüllt), dann folgt

$$\partial_t J(u + t\varphi)|_{t=0} = 0.$$

Weil

$$\partial_t J(u + t\varphi) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{J(u + t\varphi) - J(t\varphi)}{t} = \int (\nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) - f(x, u(x)) \varphi(x)) dx, \quad (13.25)$$

folgt, dass  $u$  eine schwache Lösung ist.

Für zum Beispiel  $f(u) = 1 - u^3$  findet man

$$J(u) = \int \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - u + \frac{1}{4} u^4 \right) dx$$

und man kann sehen, dass  $J$  ein Infimum hat. Das gibt Hoffnung, dass  $J$  sogar ein Minimum hat.  $J$  hat ein Infimum, wenn  $J(u) \geq c$  gilt für alle  $u$  die in Betracht kommen;  $J$  hat ein Minimum, wenn  $J(u) \geq J(u_0)$  für alle  $u$  die in Betracht kommen.

Oft kann man nicht nur eine Lösung als Minimum des Funktionals finden, sondern sind auch Sattelpunkte möglich. In einem Sattelpunkt kann man auch (13.25) und eine schwache Lösung erwarten.

**Beispiel 13.13** *Wir betrachten*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = u(x)^3 & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (13.26)$$

Dann nimmt man

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - \frac{1}{4} u(x)^4 \right) dx.$$

Wenn

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \text{ für alle } u \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad (13.27)$$

dann folgt, dass

$$J(u) \geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{4} \|u\|_{L^4(\Omega)}^4 \geq \frac{1}{4} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \left( 2 - C^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

und dass  $F$  für  $u = 0$  ein lokales Minimum hat. Die Tatsache, dass  $u = 0$  eine Lösung ist, ist nicht besonders überraschend. Wenn man aber bemerkt, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} J(tu) = -\infty$  für  $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$ , dann kann man auch noch einen Sattelpunkt erwarten. Ein Sattelpunkt für eine Funktion  $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$  in endlichen Dimensionen ist relativ klar definiert. Hier haben wir jedoch eine Funktion  $J : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , und  $W_0^{1,2}(\Omega)$  ist ein unendlich dimensionaler Raum. Ambrosetti und Rabinowitz haben gezeigt, dass für derartige Probleme tatsächlich ein Sattelpunkt existieren kann. Dieses Ergebnis ist bekannt geworden als das Mountain-Pass Lemma<sup>2</sup>. Wir sparen die Details und geben nur die wichtigsten Bedingungen:

Wenn es  $e \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gibt und  $\varepsilon, \delta > 0$  mit

- $J(0) = 0$ ,
- $J(u) \geq \varepsilon > 0$  für alle  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  mit  $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \delta$ ,
- $J(e) < 0$  mit  $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} > \delta$ ,

dann definiert man

$$m := \inf \left\{ \sup_{t>0} J(\gamma(t)) ; \gamma \in C([0, 1]; W_0^{1,2}(\Omega)) \text{ mit } u(0) = 0 \text{ und } u(1) = e \right\}.$$

Diese Zahl  $m$  ist die Passhöhe;  $\gamma$  ist eine Kurve in  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , die 0 und  $e$  verbindet. Anschließend betrachtet man eine Folge  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $J(u_n) \rightarrow m$ . Dann muss man noch zeigen, dass  $u_n$  konvergiert und dazu braucht man noch einige Bedingungen, deren Beschreibung hier zu weit führen würde.

Übrigens braucht man für (13.27) noch einen Sobolev-Einbettungssatz. Die Bedingung dazu ist  $1 - \frac{n}{2} > -\frac{n}{4}$  und ist nur erfüllt, wenn  $n < 4$ .

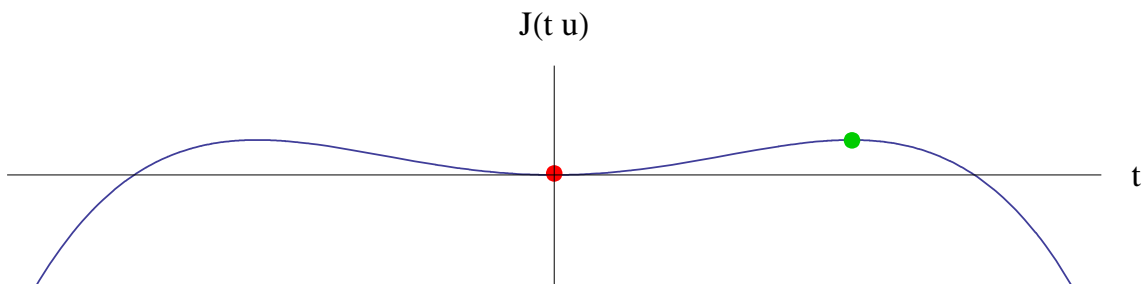


Abbildung 13.3: Lokales Minimum (rot) und ein zweiter stationärer Punkt (grün) in Dimension 1.

<sup>2</sup>Ambrosetti, Antonio; Rabinowitz, Paul H. Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Functional Analysis 14 (1973), 349–381.

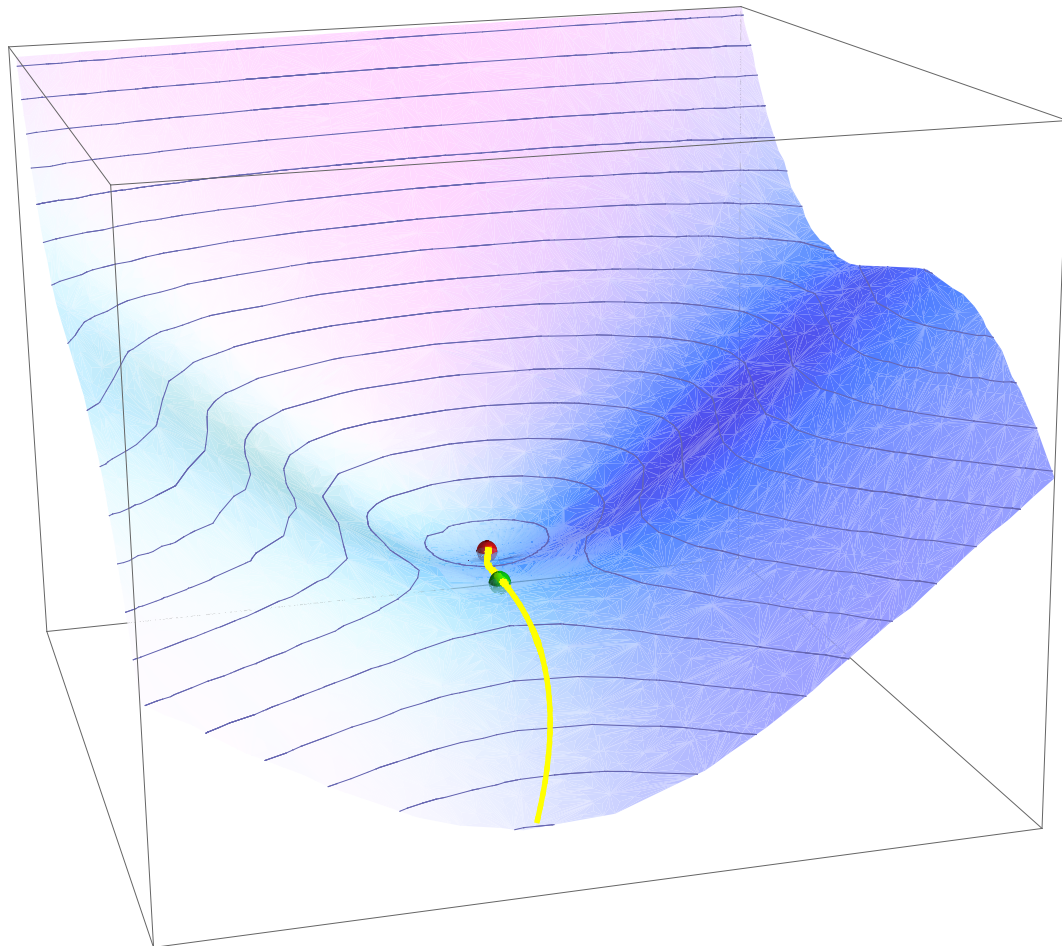


Abbildung 13.4: Lokales Minimum (rot) und ein zweiter stationärer Punkt (grün) in Dimension 2. Man sucht diesen Punkt (= Funktion für das obige Beispiel) indem man alle Wege vom roten Punkt in die Tiefe betrachtet. Auf jedem Weg  $\gamma$  gibt es ein Maximum  $m_\gamma$ . Schlussendlich nimmt man das Infimum von  $m_\gamma$  über alle Wege  $\gamma$  und versucht zu zeigen, dass dieses Infimum angenommen wird.



# Literaturverzeichnis

- [1] Strauss, Walter A.: Partielle Differentialgleichungen. Vieweg, 1995
- [2] DiBenedetto, Emmanuele: Partial differential equations. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1995.
- [3] Evans, Lawrence C.: Partial differential equations. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [4] Pinchover, Yehuda; Rubinstein, Jacob: An introduction to partial differential equations. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [5] Grunau, Hans-Christoph: Partielle Differentialgleichungen, Skript zur Vorlesung 2008/09.
- [6] Gilbarg, David und Trudinger, Neil S.: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, 1983.