Prof. Guido Sweers
Matthias Erven **SS 2011**

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 10

Diese Hausaufgaben werden am Mittwoch, den 22. Juni (!) um 13 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1: (5 Punkte) *Küchenmathematik*
Geflügel aus der Gattung Galliformes, das im Ofen zubereitet wird, heiße gar, sobald es an jedem Punkt in seinem Inneren eine Temperatur von mindestens 100 Grad Celsius hat. Messungen in verschiedenen Haushalten haben ergeben, dass ein Hähnchen von 1.5 kg in einem auf 200 Grad Celsius vorgeheizten Backofen nach genau einer Stunde gar ist. Wie lange braucht man, um einen Truthahn von 6 kg zu garen?
Hinweis: Nehmen Sie an, dass ein Truthahn ein skaliertes Hähnchen ist.

Aufgabe 2: (5 Punkte) Die Besselfunktion J_n ist für $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+n)!} \left(\tfrac{1}{2}t\right)^{2k+n}.$$

Zeigen Sie, dass die in Beispiel 8.12 angegebenen Funktionen $\varphi_{n,m,0}$ und $\varphi_{n,m,1}$ tatsächlich Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf der Kreisscheibe sind, dass sie also

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x) & \text{für } x \in B_1(0), \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial B_1(0) \end{cases}$$

mit geeignetem λ lösen.

Aufgabe 3: (5 Punkte) Betrachten Sie

$$\begin{cases} \left(\partial_t - \partial_x^2\right) u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in (0,1), \\ u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \{0,1\} \times \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

für $u_0 \in C_0[0,1]$. Zeigen Sie, dass für die Lösung $u(x,t)$ die folgenden Abschätzungen gelten:

a) $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(0,1)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(0,1)}$.
Hinweis: Maximumprinzip.

b) $\|u(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)} \leq e^{-\pi^2 t} \|u_0\|_{L^2(0,1)}$.
Hinweis: Betrachten Sie $\partial_t \int_0^1 u(x,t)^2 dx$. Verwenden Sie, dass für $w \in C^2[0,1] \cap C_0[0,1]$ gilt: $\int_0^1 w'(x)^2\,dx \geq \pi^2 \int_0^1 w(x)^2\,dx$.

c) * $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(0,1)} \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \|u_0\|_{L^1(0,1)}$.
Hinweis: Maximumprinzip.

(bitte wenden)

*unbewertete Zusatzaufgabe

Aufgabe 4: (5 Punkte) Geben Sie ähnliche Abschätzungen[†] an für

$$\begin{cases} \left(\partial_t - \partial_x^2\right) u\left(x,t\right) = 0 & \text{für } \ (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}^+, \\ u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right) & \text{für } x \in (0,1)\,, \\ \partial_x u\left(x,t\right) = 0 & \text{für } \ (x,t) \in \{0,1\} \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

- **Anmeldung zur Klausur**
  Um an der Klausur am 19. Juli teilzunehmen, melden Sie sich bitte bis spätestens Dienstag, den 12. Juli um 12 Uhr an, indem Sie eines oder mehrere der Formulare auf der Vorlesungswebseite herunterladen und ausgefüllt in den Übungsbriefkasten einwerfen.

- **nächstes Übungsblatt**
  Das nächste Übungsblatt wird am Mittwoch, den 22. Juni veröffentlicht.

[†]Eine richtige Abschätzung gibt 3 Punkte, zwei geben 5 Punkte.