Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

SS 2011

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 11

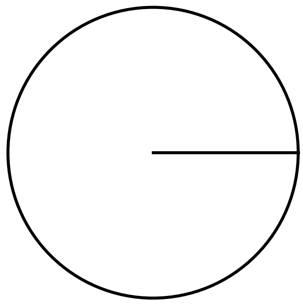
Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 30. Juni um 13 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1: (5 Punkte) Wir setzen $\Omega := B_1(0,0) \setminus ([0,1) \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^2$ und definieren darauf u in Polarkoordinaten durch

$$u\,(r\cos\varphi, r\sin\varphi) := \sqrt{r}\sin\left(\tfrac{\varphi}{2}\right).$$

a) Zeigen Sie, dass u das folgende Randwertproblem löst:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } [0,1] \times \{0\} \\ u\,(\cos\varphi, \sin\varphi) = \sin\left(\tfrac{\varphi}{2}\right) & \text{für } \varphi \in (0, 2\pi) \end{cases}$$



b) In welchen Räumen $C^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ liegt u?

Aufgabe 2: (5 Punkte) Finden Sie eine Fundamentallösung zum biharmonischen Operator (Bi-Laplace-Operator) in Raumdimension $n \in \mathbb{N}^+$, d.h. eine Funktion $F_n : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, für die

$$\Delta^2 F_n = \delta_0$$

im Sinne von Distributionen gilt. Es genügt, wenn Sie den Nachweis für Schwartz-Distributionen und $n > 4$ erbringen.
Hinweis: Schauen Sie sich radialsymmetrische Lösungen von $\Delta^2 F = 0$ für $r > 0$ an.

Aufgabe 3: a) **(5 Punkte)** Es seien u und v superharmonische Funktionen auf Ω. Zeigen Sie, dass w, definiert durch

$$w(x) := \min\left(u(x), v(x)\right),$$

auch superharmonisch ist auf Ω.

b) **(5 Punkte)** Geben Sie ein Beispiel an zweier superharmonischer Funktionen u und v derart, dass

$$z(x) := \max\left(u(x), v(x)\right)$$

nicht superharmonisch ist auf Ω.