Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

SS 2011

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 12

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 7. Juli um 13 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1: (5 Punkte) Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ eine Viertelkugel mit Radius 1,

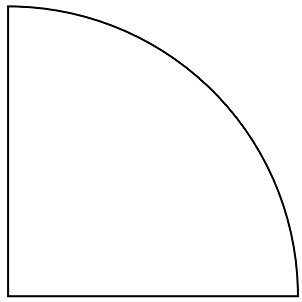
$$D := \{(x_1, x_2) \in B_1(0,0); x_1 > 0, x_2 > 0\}.$$

Bestimmen Sie die Green-Funktion zur Poisson-Gleichung auf D mit Dirichlet-Randwerten, also die Funktion $G(x,y)$, für die

$$u(x) := \int_D G(x,y) f(y)\, dy$$

(für genügend glattes f) das folgende Randwertproblem löst:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } D \\ u = 0 & \text{auf } \partial D \end{cases}$$



Aufgabe 2: (5 Punkte) Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ und sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ superharmonisch und nicht konstant. Zeigen Sie, dass u kein Minimum innerhalb von Ω haben kann.

Aufgabe 3: (5 Punkte) Sei $R > 0$ und u harmonisch und nichtnegativ auf $B_{R+1}(0) \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$). Sei $0 < r < R$. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in B_r(0)$ gilt:

$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{n-2} \frac{R-r}{R+r} u(0) \leq u(x) \leq \left(\frac{R}{R-r}\right)^{n-2} \frac{R+r}{R-r} u(0)$$

Aufgabe 4: (5 Punkte) Zeigen Sie oder bringen Sie ein Gegenbeispiel ($n \geq 2$):

Wenn u harmonisch ist auf $\mathbb{R}^n$ und wenn $u(x) \geq 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$, dann ist u konstant.

Aufgabe 5: (0 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion u, definiert durch $u(x) = 1 - \|x\|$ superharmonisch auf $B_1(0) \subset R^n$ ($n \geq 2$) ist.