Prof. Guido Sweers
Matthias Erven **SS 2011**

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 3

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 28.4.2011 um 13 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1: (6 Punkte) Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Randwertprobleme

a) $\begin{cases} u_x(x,y) + 2u_y(x,y) = x^2, \\ u(1,y) = y \text{ für } y \in \mathbb{R}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} xu_x(x,y) + yu_y(x,y) = 1, \\ u(x,y) = y \text{ für } x^2+y^2 = 1; \end{cases}$

Aufgabe 2: (6 Punkte) Wir betrachten die physikalisch relevante Lösung von

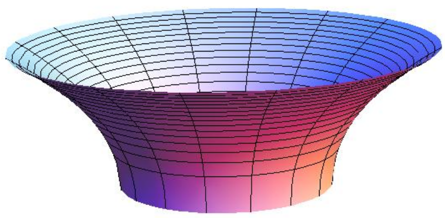
$$u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) = 0$$

zu den Anfangswerten

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > 1, \\ 1 & \text{für } |x| \le 1. \end{cases}$$

Fertigen Sie eine Skizze an, aus der die charakteristischen Kurven, mögliche Stoßwellen und Verdünnungswellen abzulesen sind.

Aufgabe 3: (8 Punkte)
Die partielle Differentialgleichung für eine Minimalfläche ist



$$\nabla.\left(\frac{\nabla u\,(x,y)}{\sqrt{1+|\nabla u\,(x.y)|^2}}\right) = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass diese Gleichung für radialsymmetrische Funktionen zur folgenden Gleichung wird:
$$\partial_r\left(\frac{U_r(r)}{\sqrt{1+|U_r\,(r)|^2}}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{U_r(r)}{\sqrt{1+|U_r\,(r)|^2}}\right) = 0.$$

b) Sei $h > 0$. Berechnen Sie wenn möglich eine Lösung für
$$\begin{cases} \nabla.\left(\frac{\nabla u(x,y)}{\sqrt{1+|\nabla u(x.y)|^2}}\right) = 0 & \text{für } 1 < x^2+y^2 < 4 \\ u\,(x,y) = 0 & \text{für } x^2+y^2 = 1, \\ u\,(x,y) = h & \text{für } x^2+y^2 = 4. \end{cases}$$

c) Welchen Wert darf h maximal annehmen, damit eine Lösung $(x,y) \mapsto u\,(x,y)$ existiert?

bitte wenden

Aufgabe 4:

a) Die Differentialgleichung der schwingenden Saite $u_{tt} = cu_{xx}$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ und mit Randwertbedingungen $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$ hat Lösungen der Form

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Diese Lösungen nennt man Eigenschwingungen. Berechnen Sie alle solche Lösungen. Diese Lösungen sind periodisch in der Zeit. Welche Perioden treten auf?

b) Auch die Differentialgleichung des schwingenden Balkens $u_{tt} = \sigma u_{xxxx}$ mit $\sigma \in \mathbb{R}^+$ und mit Randwertbedingungen $u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(\ell,t) = u_{xx}(\ell,t) = 0$ hat Lösungen der Form

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Berechnen Sie auch alle solche Lösungen. Welche Perioden treten hier auf?

c) Beide Probleme haben in Wirklichkeit einen Reibungsterm:

$$u_{tt} = cu_{xx} - \varepsilon u_t \text{ und } u_{tt} = \sigma u_{xxxx} - \varepsilon u_t$$

Berechnen Sie auch hier die Lösungen der Form $X(x)T(t)$.

Hinweis: Eine Lösung zu Aufgabe 4 kann ebenfalls eingereicht werden und wird korrigiert, jedoch nicht bewertet.