Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

SS 2011

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 4

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 5.5.2011 um 13 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1: Sei $p \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Gleichung

$$xu_x + yu_y = pu \text{ für } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Berechnen Sie die charakteristischen Kurven.

b) Sei nun $p = 4$. Berechnen Sie explizit eine Lösung, für die $u(x,y) = 1$ gilt auf dem Kreis $\{(x,y); x^2 + y^2 = 1\}$.

c) Finden Sie für $p = 2$ zwei Lösungen, für die $u(x,0) = x^2$ gilt für $x > 0$. Warum gibt es hier keine eindeutige Lösung?

Aufgabe 2: (10 Punkte) Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} x^2 u_x + y^2 u_y = u^2, \\ u(x, 2x) = x^2 \text{ für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

a) Gilt die Transversalitätsbedingung?

b) Skizzieren Sie die Kurve, auf der die Randwerte festgelegt sind, und die beiden charakteristischen Kurven, die in $(1,2)$ und $(2,4)$ beginnen.

c) Finden Sie eine Lösung $(x,y) \mapsto u(x,y)$.

d) Ist die Lösung aus c) für alle x und y definiert?

Aufgabe 3: Lösen Sie die Gleichung

$$uu_x + u_y = 1$$

unter der Bedingung, dass $u(x,x) = \frac{1}{2}x$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4: (10 Punkte) Finden Sie alle Lösungen von

$$\begin{cases} u_{xy} = 0, & \\ u(t,t) = t & \text{für } t \in \mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \nabla u(t,t) = 0 & \text{für } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Hinweis: Lösungen zu den Aufgaben 1 und 3 können ebenfalls eingereicht werden und werden korrigiert, jedoch nicht bewertet.