Prof. Guido Sweers
Matthias Erven **SS 2011**

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 5

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 12.5.2011 um 13 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1: (5 Punkte) Sei M eine reelle $n\times n$-Matrix. Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$p(t) = \det(M - tI) =: \sum_{k=0}^{n} a_k t^k.$$

Seien $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ die Eigenwerte von M, aufgeführt mit der algebraischen Vielfachheit. Zeigen Sie, dass:

a) $a_n = (-1)^n$ und $a_0 = \det(M) = \prod_{k=1}^n \lambda_i$.
b) $(-1)^{n-1} a_{n-1} = \mathrm{Spur}(M) := \sum_{k=1}^n M_{kk} = \sum_{k=1}^n \lambda_i$.

Hinweis: Verwenden Sie, dass man jede Matrix auf eine Standardform transformieren kann und dass $\det(AB) = \det A \det B$.

Aufgabe 2: (10 Punkte) Sei $n > 2$. Zeigen Sie, dass eine klassische Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B_1(0) \subset \mathbb{R}^n \\ u = \varphi & \text{auf } \partial B_1(0) \end{cases}$$

die folgende Eigenschaft hat: Für $x \in B_1(0)$ gilt

$$u(x) = \int_{B_1(0)} G(x,y) f(y)\, dy - \int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y) \varphi(y)\, d\sigma_y$$

mit $\omega_n = \int_{B_1(0)} 1 dy$ und

$$G(x,y) = \frac{1}{(n-2)\, n\omega_n} \left(\left\| x\,\|y\| - \frac{y}{\|y\|} \right\|^{2-n} - \|x-y\|^{2-n} \right).$$

Aufgabe 3: (5 Punkte) Bestimmen Sie die Bereiche, wo die Differentialgleichung $u_{xx} + y u_{yy} = f$ mit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ elliptisch/parabolisch/hyperbolisch ist.

Aufgabe 4: a) Zu welchen Typ gehört die folgende partielle Differentialgleichung?

$$u_{xx} + 3u_{yy} - 2u_x + 24u_y + 5u = f.$$

b) Zeigen Sie, dass man durch $u(x,y) = v(x,y)\, e^{\alpha x + \beta y}$ und neue Koordinaten diese Gleichung vereinfachen kann zu

$$w_{ss} + w_{tt} + cw = \tilde{f}.$$

bitte wenden

Aufgabe 5: Für $x \in (0,1)$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\,\pi} \sin\left((2k+1)\,\pi x\right) = 1.$$

a) Ist diese Konvergenz gleichmäßig auf $\mathbb{R}$?

b) Es sei

$$c_{k,\ell} = \frac{16}{(2k+1)\,(2\ell+1)\,\pi^4} \left(\frac{1}{(2k+1)^2 + \frac{1}{4}\,(2\ell+1)^2} \right)$$

und

$$u_{n,m}\,(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{m} c_{k,\ell} \sin\left((2k+1)\,\pi x\right) \sin\left(\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \pi y\right).$$

Zeigen Sie, dass $u_{n,m}$ gleichmäßig konvergiert auf $\mathbb{R}^2$. (Was macht man mit dem doppelten Index?)

c) Zeigen Sie, dass für $\Omega = (0,1) \times (0,2)$ gilt

$$\begin{cases} \lim\limits_{n,m\to\infty} \Delta u_{n,m} = -1 & \text{in } \Omega, \\ \lim\limits_{n,m\to\infty} u_{n,m} = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Bemerkung: Könnte man also zeigen, dass man oben Limes und Ableitungen vertauschen kann, wäre $u := \lim_{m,n\to\infty} u_{m,n}$ Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Hinweis: Lösungen zu den Aufgaben 4 und 5 können ebenfalls eingereicht werden und werden korrigiert, jedoch nicht bewertet.