

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 7

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 26.5.2011 um 13 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1: (5 Punkte) Finden Sie eine Funktion $f \in L^1_{lok}(\mathbb{R}^2)$ derart, dass

$$F_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \varphi(x) dx$$

so ist, dass im Sinne von Distributionen gilt:

$$-\Delta F_f = \delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2).$$

Aufgabe 2: (10 Punkte) Wir nehmen $u_0, v_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Sei u die Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Die kinetische Energie, beziehungsweise potentielle Energie, am Zeitpunkt t sind definiert durch

$$K(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} (u_t(x, t))^2 dx \text{ und } P(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} (u_x(x, t))^2 dx.$$

Zeigen Sie:

- a) $K(t) + P(t)$ ist konstant.
- b) Es gibt $t_0 \in \mathbb{R}^+$ mit $K(t) = P(t)$ für alle $t \geq t_0$.

Aufgabe 3: (5 Punkte) Zeigen Sie, dass für $u_0, v_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ die Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

die folgende Abschätzung erfüllt: $|u(x, t)| \leq \frac{C(u_0, v_0)}{t}$ für $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$.

Aufgabe 4: (0 Punkte) Man definiert $(\text{v.p.} \frac{1}{x})$ für passende Funktionen $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\left(\text{v.p.} \frac{1}{x} \right) (\varphi) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right).$$

- a) Zeigen Sie, dass $(\text{v.p.} \frac{1}{x}) (\varphi)$ wohldefiniert ist für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
- b) Zeigen Sie, dass $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\psi(x) = \exp(-x^2)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ liegt und dass

$$\left(\text{v.p.} \frac{1}{x} \right) (\psi) = 0.$$

- c) Ist die Abbildung $(\text{v.p.} \frac{1}{x}) : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ stetig?

Hinweis: $\varphi(x) = \varphi(0) \psi(x) + (\varphi(x) - \varphi(0)) \psi(x) + \varphi(x) (1 - \psi(x))$.