

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 8

Diese Hausaufgaben werden am Freitag, den 3.6.2011 um 9 Uhr (!) eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1: (6 Punkte) Leiten Sie eine explizite Formel für die Lösung von

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

her, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

Hinweis: Versuchen Sie es mit $u(x, t) = e^{\alpha t}v(x, t)$.

Aufgabe 2: (6 Punkte) Finden Sie alle nichtnegativen klassischen Lösungen des Randwertproblems

$$\begin{cases} u_t(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = 0 & \text{für } x \in (0, \ell), t > 0, \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 & \text{für } t > 0, \end{cases}$$

die die Form $u(x, t) = X(x)T(t)$ haben.

Aufgabe 3: (8 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit glattem Rand. Für eine Lösung u des Anfangs-/ Randwertproblems

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = g_A & \text{auf } \Omega \times \{t = 0\} \\ u = g_R & \text{auf } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (1)$$

definieren wir die Energie

$$E(t) = \int_{\Omega} u^2(x, t) dx$$

- Seien $f = 0$ und $g_R = 0$. Zeigen Sie, dass $t \mapsto E(t)$ dann fallend ist. Wie lässt sich dieses Ergebnis physikalisch interpretieren?
- Folgern Sie daraus, dass das Anfangs-/ Randwertproblem (1) höchstens eine Lösung in $C^2(\overline{\Omega} \times [0, \infty))$ haben kann.

Hinweis:

Das nächste Übungsblatt wird bereits am Mittwoch, den 1.6.2011 veröffentlicht.