

Partielle Differentialgleichungen Übungsblatt 9

Diese Hausaufgaben werden am Donnerstag, den 9.6.2011 um 13 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

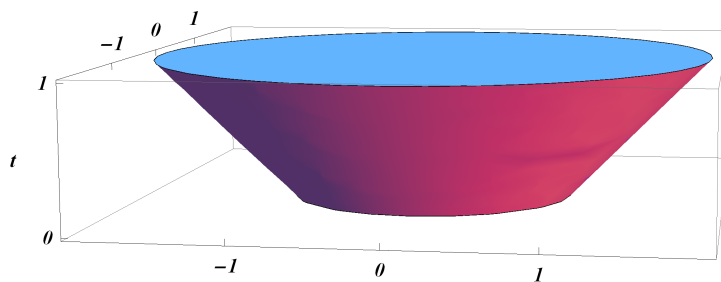
Aufgabe 1: (10 Punkte) Für $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ sei

$$u(x, t) := \frac{x}{t\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Zeigen Sie, dass u das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

erfüllt. Auch $u(x, t) = 0$ ist eine Lösung. Wieso ist dies kein Widerspruch zur Eindeutigkeit von Lösungen (Korollar 8.2)?



Skizze zu G .

Aufgabe 2: (10 Punkte) Wir betrachten $G := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+; \|x\| < 1 + t\}$ und

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u - \Delta u = f & \text{für } (x, t) \in G, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in B_1(0), \\ u(x, t) = 0 & \text{für } \|x\| = t + 1. \end{cases} \quad (1)$$

Zeigen Sie, dass (1) höchstens eine klassische Lösung hat.

(bitte wenden)

Aufgabe 3: (0 Punkte)

- a) Sei $\Omega(t) := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1+t\}$ und sei v stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass für

$$F(t) = \int_{\Omega(t)} v(x, t) dx$$

gilt

$$F'(t) = \int_{\partial\Omega(t)} v(x, t) d\sigma_x + \int_{\Omega(t)} v_t(x, t) dx.$$

- b) Es sei G wie in Aufgabe 2 und u eine klassische Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u - c^2 \Delta u = f & \text{für } (x, t) \in G, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in B_1(0), \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in B_1(0), \\ u(x, t) = 0 & \text{für } \|x\| = t + 1. \end{cases} \quad (2)$$

Wir setzen $E(t) := \int_{\Omega(t)} (u_t^2(x, t) + c^2 |\nabla u(x, t)|^2) dx$. Zeigen Sie, dass im Fall $f=0$

$$E'(t) = (1 - c^2) \int_{\partial\Omega(t)} u_t(x, t)^2 d\sigma_x$$

gilt.

- c) Zeigen Sie, dass (2) für $c > 1$ höchstens eine klassische Lösung hat.
d) Unter welcher Bedingung gilt das auch für $c < 1$? Wie kann man dies physikalisch interpretieren?