Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **SS 2013**

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 0
Version 3

- Wird in den Übungen in der Woche vom 15. April besprochen und gibt keine Punkte.

Aufgabe 1: Entscheiden Sie bei folgenden Mengen jeweils, ob der Rand folgende Regularität besitzt: C^0, C^1.

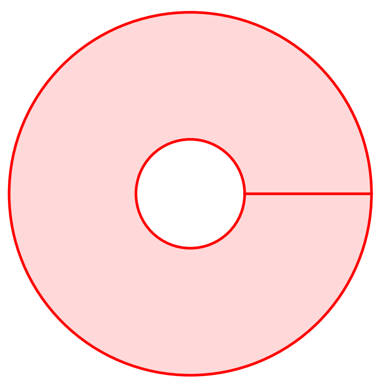
1. $\Omega = \left\{ (x,y) \in (-1,1)^2 \,\middle|\, y < \sqrt{|x|} \right\}$
2. $\Omega = \{ (x,y) \in (-1,1)^2 \mid y < |x| \}$
3. $\Omega = B_1(0) \backslash \{0\}$
4. $\Omega = \left\{ (x,y) \in (-1,1) \times \mathbb{R} \,\middle|\, y < \tan\left(x\frac{\pi}{2}\right) \right\}$
5. $\Omega = B_2(0) \backslash \partial B_1(0)$
6. Die Menge $\Omega = \{ (s+t^2, t^3) \mid s \in \mathbb{R}_+, t \in \mathbb{R} \}$, welche rechts von der Kurve $t \mapsto (t^2, t^3)$ liegt.

Aufgabe 2: Gegeben seien die folgenden Funktionen $u_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

$$u_0(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$u_1(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$u_2(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$u_3(x) = x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Es gilt $u_i \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$. Überlegen Sie, ob sich die Funktionen so fortsetzen lassen, dass die Fortsetzung in $C^1(\mathbb{R})$ oder $C^0(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 3: Überlegen Sie sich ein beschränktes Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $u \in C^1(\Omega)$ mit $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$, $\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$, so dass u nicht zu einer Funktion in $C^0(\bar{\Omega})$ fortgesetzt werden kann. Gibt es so eine Funktion auf $B_1(0)$? Wann kann man so eine Funktion nur finden?



Aufgabe 4: Sei Ω ein beschränktes Gebiet.

1. Geben sie alle Inklusionen zwischen den Mengen $C^0(\bar{\Omega}), C^{0,1}(\bar{\Omega}), C^{1,0}(\bar{\Omega})$ an.
2. Geben sie alle Inklusionen zwischen den Mengen $C^0(\Omega), C^{0,1}(\Omega), C^{1,0}(\Omega), C^{1,0}_c(\Omega)$ an.
3. In welcher wichtigen Eigenschaft unterscheiden sich $(C^1(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^1})$ und $(C^1(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^0})$?

Aufgabe 5: Sei Ω ein beschränktes Gebiet. Der Raum $C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$ ist mit der Norm

$$\|u\|_{C^{0,\beta}} := \|u\|_{C^0} + [u]_{C^{0,\gamma}}$$

ein Banachraum. Dabei ist

$$[u]_{C^{0,\gamma}} := \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma}$$

Sei $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ und $\{u_n\} \subset C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$ in der dazugehörigen Norm beschränkt.

1. Zeigen Sie, dass es ein $C > 0$ gibt, so dass $\|u\|_{C^{0,\alpha}} \leq C$.
2. Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Arzelà-Ascoli, dass es eine geeignete Teilfolge von $\{u_n\}$ gibt, die in $C^0(\bar{\Omega})$ konvergiert.
3. Zeigen Sie nun, dass die Hölder-Seminorm von $u_n - u_m$

   $$[u_n - u_m]_{C^{0,\alpha}} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|(u_n(x)-u_m(x)) - (u_n(y)-u_m(y))|}{|x-y|^\alpha}$$

   für eine geeignete Teilfolge gegen Null geht.

   Man kann eine Fallunterscheidung $|x-y| < \delta$ und $|x-y| \geq \delta$ machen. Dann kann in dem einen Fall δ ausreichend klein gewählt werden und im anderen Fall die gleichmäßige Konvergenz der Teilfolge genutzt werden.
4. Zeigen Sie nun, dass für jede Menge A gilt: Falls A in $C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$ beschränkt ist, dann ist A in $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ präkompakt.