Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **SS 2013**

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 1

- Abgabe in den Übungsgruppen oder bis Mittwoch 14 Uhr in den Briefkasten im Container neben der Physik.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Zeigen Sie, dass für Polarkoordinaten, also $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$, gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte): Zeigen Sie, dass für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die nur von $\|x\|$ abhängen, für die also ein $\tilde{f}$ mit $f(x) = \tilde{f}(\|x\|)$ existiert, folgendes gilt:

$$\Delta f(x) = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r} r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r}\tilde{f}(r) \text{ für } r = \|x\|.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte):

1. Zu welcher Differentialgleichung wird

   $$u_{xx} - u_{yy} = f,$$

   wenn die Substitution $s = x + y$, $t = x - y$ durchgeführt wird?
2. Zeigen Sie, dass jedes Paar von Funktionen $g, h \in C^2(\mathbb{R})$ durch

   $$u(x, y) = g(x - y) + h(x + y) \tag{1}$$

   eine Lösung liefert zu

   $$u_{xx} - u_{yy} = 0. \tag{2}$$
3. Zeigen Sie, dass sich jede klassische Lösung von (2) schreiben lässt wie in (1).

Aufgabe 4 (0 Punkte):

1. Zeigen Sie für $f \in C^{0,\alpha}([0,1];\mathbb{R})$ und $g \in C^{0,\beta}([0,1];\mathbb{R})$:
   a) $f + g \in C^{0,\min(\alpha,\beta)}([0,1];\mathbb{R})$;
   b) $f.g \in C^{0,\min(\alpha,\beta)}([0,1];\mathbb{R})$.
2. Ergänzen Sie: Wenn $f \in C^{1,\alpha}([0,1];\mathbb{R})$ und $g \in C^{1,\beta}([0,1];\mathbb{R})$, dann gilt
   a) $f + g \in C^{1,\cdots\cdots}([0,1];\mathbb{R})$;
   b) $f.g \in C^{1,\cdots\cdots}([0,1];\mathbb{R})$.
3. Zeigen Sie: Wenn $f \in C^{0,\alpha}([0,1];\mathbb{R})$ und $g \in C^{0,\beta}(f[0,1];\mathbb{R})$, dann gilt $g \circ f \in C^{0,\alpha\beta}([0,1];\mathbb{R})$.
4. Ergänzen Sie: Wenn $f \in C^{1,\alpha}([0,1];\mathbb{R})$ und $g \in C^{1,\beta}(f[0,1];\mathbb{R})$, dann gilt $g \circ f \in C^{1,\cdots\cdots}([0,1];\mathbb{R})$.