Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **SS 2013**

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 10

- Abgabe in den Übungsgruppen oder bis Mittwoch 14 Uhr in den Briefkasten im Container neben der Physik.

Aufgabe 1 (10 Pkt.): *Küchenmathematik*
Geflügel aus der Gattung Galliformes, das im Ofen zubereitet wird, heiße gar, sobald es an jedem Punkt in seinem Inneren eine Temperatur von mindestens 80 Grad Celsius hat. Messungen in verschiedenen Haushalten haben ergeben, dass ein Hähnchen von 1.5 kg in einem auf 200 Grad Celsius vorgeheizten Backofen nach genau einer Stunde gar ist. Wie lange braucht man, um einen Truthahn von 6 kg zu garen?
Hinweis: Nehmen Sie an, dass ein Truthahn ein skaliertes Hähnchen ist.

Aufgabe 2 (0 Pkt.): Betrachten Sie

$$\begin{cases} \left(\partial_t - \partial_x^2\right) u\,(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}^+, \\ u\,(x,0) = u_0\,(x) & \text{für } x \in (0,1)\,, \\ u\,(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \{0,1\} \times \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

für $u_0 \in C_0\,[0,1]$. Zeigen Sie, dass für die Lösung $u\,(x,t)$ die folgenden Abschätzungen gelten:

1. $\|u\,(\cdot,t)\|_{L^\infty(0,1)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(0,1)}$.
   Hinweis: Maximumprinzip.
2. $\|u\,(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)} \leq e^{-\pi^2 t}\,\|u_0\|_{L^2(0,1)}$.
   Hinweis: Betrachten Sie $\partial_t \int_0^1 u(x,t)^2 dx$. Verwenden Sie, dass für $w \in C^2\,[0,1] \cap C_0\,[0,1]$ gilt: $\int_0^1 w'\,(x)^2\,dx \geq \pi^2 \int_0^1 w\,(x)^2\,dx$.
3. $\|u\,(\cdot,t)\|_{L^\infty(0,1)} \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,\|u_0\|_{L^1(0,1)}$.
   Hinweis: Maximumprinzip.

Aufgabe 3 (0 Pkt.): Geben Sie ähnliche Abschätzungen an für

$$\begin{cases} \left(\partial_t - \partial_x^2\right) u\,(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}^+, \\ u\,(x,0) = u_0\,(x) & \text{für } x \in (0,1)\,, \\ \partial_x u\,(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \{0,1\} \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Aufgabe 4 (10 Pkt.): Wir betrachten $A := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+; \|x\| < 1 + t\}$ wie auf Blatt 8.

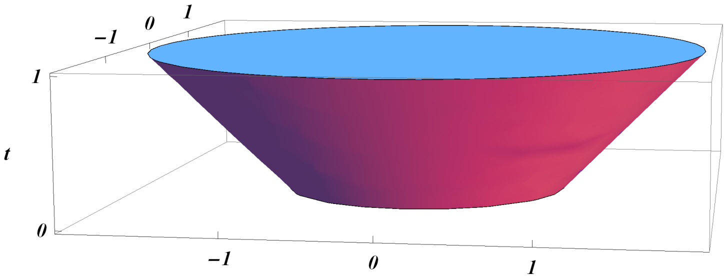

Abbildung 1: Skizze zu A

Zeigen Sie, dass das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u - \Delta u = f & \text{für } (x,t) \in A, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in B_1(0), \\ u(x,t) = 0 & \text{für } \|x\| = t+1. \end{cases} \tag{1}$$

höchstens eine klassische Lösung hat.