Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

SS 2013

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 11

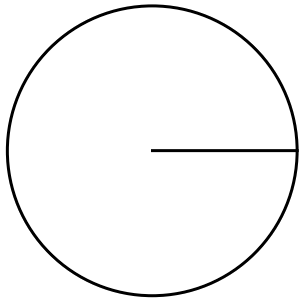
- Abgabe in den Übungsgruppen oder bis Mittwoch 14 Uhr in den Briefkasten im Container neben der Physik.

Aufgabe 1 (10 Pkt.): Wir setzen $\Omega := B_1(0,0) \setminus ([0,1) \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^2$ und definieren darauf u in Polarkoordinaten durch

$$u\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) := \sqrt{r}\sin\left(\tfrac{\varphi}{2}\right).$$

1. Zeigen Sie, dass u das folgende Randwertproblem löst:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } [0,1] \times \{0\} \\ u\left(\cos\varphi, \sin\varphi\right) = \sin\left(\tfrac{\varphi}{2}\right) & \text{für } \varphi \in (0, 2\pi) \end{cases}$$



2. In welchen Räumen $C^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ liegt u?

Aufgabe 2 (10 Pkt.): Finden Sie eine Fundamentallösung zum biharmonischen Operator (Bi-Laplace-Operator) in Raumdimension $n \in \mathbb{N}^+$, d.h. eine Funktion $F_n : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, für die

$$\Delta^2 F_n = \delta_0$$

im Sinne von Distributionen gilt. Es genügt, wenn Sie den Nachweis für Schwartz-Distributionen und $n > 4$ erbringen.
Hinweis: Schauen Sie sich radialsymmetrische Lösungen von $\Delta^2 F = 0$ für $r > 0$ an.

Aufgabe 3 (0 Pkt.):

1. Es seien u und v superharmonische Funktionen auf Ω. Zeigen Sie, dass w, definiert durch
$$w(x) := \min\left(u(x), v(x)\right),$$
auch superharmonisch ist auf Ω.

2. Geben Sie ein Beispiel an zweier superharmonischer Funktionen u und v derart, dass
$$z(x) := \max\left(u(x), v(x)\right)$$
nicht superharmonisch ist auf Ω.