Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

SS 2013

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 12

- Abgabe in den Übungsgruppen oder bis Mittwoch 14 Uhr in den Briefkasten im Container neben der Physik.

Aufgabe 1 (10 Pkt.): Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ eine Viertelkugel mit Radius 1,

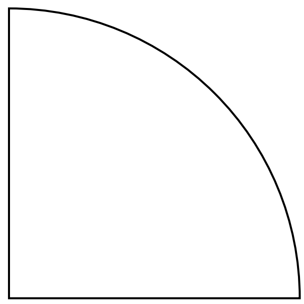
$$D := \{(x_1, x_2) \in B_1(0,0); x_1 > 0, x_2 > 0\}.$$

Bestimmen Sie die Green-Funktion zur Poisson-Gleichung auf D mit Dirichlet-Randwerten, also die Funktion $G(x,y)$, für die

$$u(x) := \int_D G(x,y) f(y)\, dy$$

(für genügend glattes f) das folgende Randwertproblem löst:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } D \\ u = 0 & \text{auf } \partial D \end{cases}$$



Aufgabe 2 (0 Pkt.): Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ und sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ superharmonisch und nicht konstant. Zeigen Sie, dass u kein Minimum innerhalb von Ω haben kann.

Aufgabe 3 (5 Pkt.): Sei $R > 0$ und u harmonisch und nichtnegativ auf $B_{R+1}(0) \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$). Sei $0 < r < R$. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in B_r(0)$ gilt:

$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{n-2} \frac{R-r}{R+r} u(0) \leq u(x) \leq \left(\frac{R}{R-r}\right)^{n-2} \frac{R+r}{R-r} u(0)$$

Hinweis: Nutzen sie die Darstellungsformel für Lösungen auf einer Kugel.

Aufgabe 4 (5 Pkt.): Zeigen Sie oder bringen Sie ein Gegenbeispiel ($n \geq 2$):
Wenn u harmonisch ist auf $\mathbb{R}^n$ und wenn $u(x) \geq 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$, dann ist u konstant.

Aufgabe 5 (0 Pkt.): Zeigen Sie, dass die Funktion u, definiert durch $u(x) = 1 - \|x\|$ superharmonisch auf $B_1(0) \subset R^n$ ($n \geq 2$) ist.