Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **SS 2013**

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 13

- Dieses Blatt wird nicht mehr in den Übungen besprochen.

Aufgabe 1 (0 Pkt.): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet. Dann gilt

1. u ist harmonisch genau dann, wenn u subharmonisch und superharmonisch ist.
2. Wenn u subharmonisch ist, dann gilt das starke Maximumprinzip.
3. Wenn u superharmonisch und v subharmonisch ist, sowie $u \geq v$ auf $\partial\Omega$, dann gilt $u < v$ in Ω oder u ist harmonisch.

Aufgabe 2 (0 Pkt.): Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

$$u \text{ subharmonisch} \Leftrightarrow -\Delta u \leq 0$$

Aufgabe 3 (0 Pkt.): Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $u \in C^0(\mathbb{R}^2)$, die subharmonisch ist, auf keiner Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ harmonisch ist und

1. nach unten unbeschränkt ist.
2. nach unten beschränkt und nicht konvex ist.

Aufgabe 4 (0 Pkt.): Sei

$$Lu = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq k}} a_\alpha D^\alpha u$$

ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{R}$. Sei $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ eine Grundlösung von L, das heißt im Sinne von Distributionen gelte $Lv = \delta$. Zeigen Sie, dass für jedes $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Funktion

$$u(x) := (v * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} v(x-y)f(y)dy$$

eine Lösung des Problems $Lu = f$ im Sinne von Distributionen ist.

Aufgabe 5 (0 Pkt.): Sei $\Omega = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Sei u eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega \\ u(x_1,x_2) = x_1 x_2 & \text{für } (x_1,x_2) \in \partial\Omega \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass die Lösung eindeutig ist.
2. Zeigen Sie, dass $u(x_1,x_2) \geq x_1 x_2$ auf Ω.
3. Können Sie sagen, ob das Maximum bzw. Minimum der Lösung auf dem Rand liegt? *Hinweis: Betrachten Sie dazu die Funktion* $\bar{u}(x_1,x_2) = 2x_1 - x_1^2$.

Aufgabe 6 (0 Pkt.): Eine Funktion $u \in C^4(\Omega)$ heißt biharmonisch, wenn $\Delta^2 u = 0$. Zeigen Sie, dass wenn $u \in C^4(\Omega)$, harmonisch ist, dass

$$x \mapsto |x|^2 u(x)$$

biharmonisch ist.