Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **SS 2013**

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 2
Version 2

- Abgabe in den Übungsgruppen oder bis Mittwoch 14 Uhr in den Briefkasten im Container neben der Physik.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $\sigma \in \mathbb{R}$. Welche Differentialgleichung erfüllt eine Funktion $u \in C^4(\overline{\Omega})$ mit

$$\int_\Omega (\Delta u \Delta \varphi - \sigma (u_{xx}\varphi_{yy} + u_{yy}\varphi_{xx} - 2u_{xy}\varphi_{xy}))\, d(x,y) = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)?$$

Aufgabe 2 (5 Punkte): Sei $u(x) = |x|^{-a}$ und $x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Für welche $a \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}$ ist u schwach differenzierbar auf $B_1(0)$?
Hinweis: Teilen Sie dazu die Integrale über $B_1(0)$ auf in Integrale über $B_1(0)\backslash B_\varepsilon(0)$ und $B_\varepsilon(0)$. Nutzen Sie, dass

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega \backslash B_\varepsilon(0)} f(x)dx = \int_\Omega f(x)dx$$

für integrierbare Funktionen.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Für $b, c, f \in C^\infty$ kann man die gewöhnliche DGL

$$u''(x) + b(x)\,u'(x) + c(x)\,u(x) = f(x)$$

vereinfachen zu

$$\tilde{u}''(x) + \tilde{c}(x)\,\tilde{u}(x) = \tilde{f}(x)\,. \tag{1}$$

1. Zeigen Sie, das dies funktioniert.
   Hinweis: Lösen Sie
   $$\begin{cases} A'(x) = \frac{1}{2}b(x)\,A(x)\,, \\ A(0) = 1 \end{cases}$$
   und setzen Sie $\tilde{u}(x) = A(x)\,u(x)$ in (1) ein.
2. Sie $v \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Zeigen Sie, dass man mit obigem Ansatz die Dgl
   $$\Delta u(x,y) + v(x,y) \cdot \nabla u(x,y) + c(x,y)\,u(x,y) = f(x,y)$$
   genau dann in die Form
   $$\Delta \tilde{u}(x,y) + \tilde{c}(x,y)\,\tilde{u}(x,y) = \tilde{f}(x,y) \tag{2}$$
   bringen kann, wenn es ein $A(x,y)$ gibt, so dass
   $$\nabla(\ln(A(x,y))) = \frac{1}{2}v(x,y). \tag{3}$$
3. Zeigen Sie, dass für $v \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ (3) äquivalent ist zu der Bedingung
   $$\partial_y v_1(x,y) = \partial_x v_2(x,y).$$

Aufgabe 4 (5 Punkte): Es ist bereits bekannt, dass $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}} & \text{falls } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{falls } \|x\| \geq 1 \end{cases},$$

beliebig oft differenzierbar ist. Man definiere nun für $\varepsilon > 0$ die Funktion $\Psi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\Psi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\tilde{x})\, d\tilde{x} \right)^{-1} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

1. Zeigen Sie für alle $\varepsilon > 0$:
$$\int_{\mathbb{R}^n} \Psi_\varepsilon(x)\, dx = 1$$

Sei nun $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig mit kompaktem Träger. Man definiere für $\varepsilon > 0$ die Funktion $u_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$u_\varepsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\Psi_\varepsilon(x-y)\, dy.$$

2. Zeigen Sie, dass u_ε stetig differenzierbar ist.
3. Zeigen Sie, dass $\|u_\varepsilon - u\|_\infty \to 0$ für $\varepsilon \downarrow 0$.

Hinweis: u_ε wird als Friedrichscher Glätter bezeichnet.