Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **SS 2013**

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 3

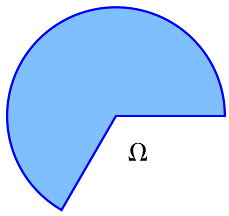
- Aufgrund des Feiertages ist die Abgabe bis Donnerstag, den 2. Mai um 14 Uhr möglich.

Aufgabe 1 (5 Pkt.): Zeigen Sie, dass $v(t,x) = t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ für $x \in \mathbb{R}^3$ und $t > 0$ eine Lösung ist von $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) v = 0$.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Auf $\Omega := \left\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,;0 < r < 1 \text{ und } 0 < \varphi < \frac{4}{3}\pi\right\}$ sei $U : \Omega \to \mathbb{R}$ durch Polarkoordinaten folgendermaßen definiert:

$$U(r\cos\varphi, r\sin\varphi) := u(r,\varphi) := \left(r^{\frac{3}{4}} - r^{-\frac{3}{4}}\right)\sin(\tfrac{3}{4}\varphi)$$



1. Zeigen Sie, dass U in Ω die Differentialgleichung $-\Delta U = 0$ erfüllt:
2. Zeigen Sie folgendes Randverhalten:

$$\lim_{r\uparrow 1} u(r,\varphi) = 0 \qquad \text{für } \varphi \in \left(0, \tfrac{4}{3}\pi\right)$$
$$\lim_{\varphi\downarrow 0} u(r,\varphi) = \lim_{\varphi\uparrow\frac{4}{3}\pi} u(r,\varphi) = 0 \qquad \text{für } r \in (0,1)$$

Aufgabe 3 (5 Pkt.): In der Vorlesung wurde gezeigt, dass harmonische Funktionen eine Mittelwerteigenschaft besitzen. Daraus folgt, dass eine nicht-konstante harmonische Funktion ihre Extrema nur auf dem Rand des Gebietes annehmen kann. Wie verhält dies sich mit U aus Aufgabe 2?

Aufgabe 4 (5 Pkt.): Die partielle Differentialgleichung für eine Minimalfläche ist

$$\nabla.\left(\frac{\nabla u(x,y)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x.y)|^2}}\right) = 0.$$

1. Zeigen Sie, dass diese Gleichung für radialsymmetrische Funktionen zur folgenden Gleichung wird:
$$\partial_r\left(\frac{U_r(r)}{\sqrt{1+|U_r(r)|^2}}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{U_r(r)}{\sqrt{1+|U_r(r)|^2}}\right) = 0.$$
2. Sei $h > 0$. Berechnen Sie wenn möglich eine radialsymmetrische Lösung für
$$\begin{cases} \nabla.\left(\frac{\nabla u(x,y)}{\sqrt{1+|\nabla u(x.y)|^2}}\right) = 0 & \text{für } 1 < x^2+y^2 < 4 \\ u(x,y) = 0 & \text{für } x^2+y^2 = 1, \\ u(x,y) = h & \text{für } x^2+y^2 = 4. \end{cases}$$
3. Welchen Wert darf h maximal annehmen, damit eine radialsymmetrische Lösung $(x,y) \mapsto u(x,y)$ existiert?

Aufgabe 5 (0 Punkte): Eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -u'' &= \lambda u + \sin(\pi x) \quad x \in (0,1) \\ u(0) &= 0, u(1) = 0 \end{aligned}$$

kann man mithilfe der Greenschen Funktion $G(x, y)$ als

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y) \sin(\pi y) dy$$

schreiben, falls die Greensche Funktion existiert. Dabei ist

$$G(x,y) = \frac{\sin((1-\max(x,y))\mu) \sin(\mu \min(x,y))}{\mu \sin(\mu)}$$

für $\lambda > 0$, $\mu = \sqrt{\lambda}$. Im Fall $\lambda < 0, \mu = \sqrt{-\lambda}$ ist

$$G(x,y) = \frac{\sinh((1-\max(x,y))\mu) \sinh(\mu \min(x,y))}{\mu \sinh(\mu)}$$

Wir betrachten das Problem bezüglich der Kriterien von Hadamard.

1. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ hat diese Gleichung mindestens eine Lösung?

   Hinweis: Im Fall $\lambda = \pi^2$ kann man annehmen, dass es eine Lösung u gibt. Dann führt partielles integrieren von $u'' \sin(\pi x)$ auf einen Widerspruch.

2. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ hat diese Gleichung genau eine Lösung?

3. Zeigen Sie, dass die Lösungen in einer Umgebung von λ_0 stetig von λ abhängen, falls es für λ_0 genau eine Lösung gibt.