Prof. Guido Sweers **SS 2013**
Jan M. Krämer

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 4

- Abgabe in den Übungsgruppen oder bis Mittwoch 14 Uhr in den Briefkasten im Container neben der Physik.

Aufgabe 1 (5 Pkt.): Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Randwertprobleme

a) $\begin{cases} u_x(x,y) + 2u_y(x,y) = x^2, \\ u(1,y) = y \text{ für } y \in \mathbb{R}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} xu_x(x,y) + yu_y(x,y) = 1, \\ u(x,y) = y \text{ für } x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$

Aufgabe 2 (5 Pkt.): Wir betrachten die physikalisch relevante Lösung von

$$u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) = 0$$

zu den Anfangswerten

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > 1, \\ 1 & \text{für } |x| \leq 1. \end{cases}$$

Fertigen Sie eine Skizze an, aus der die charakteristischen Kurven, mögliche Stoßwellen und Verdünnungswellen abzulesen sind.

Aufgabe 3 (5 Pkt.): Lösen Sie die Gleichung

$$uu_x + u_y = 1$$

unter der Bedingung, dass $u(x,x) = \frac{1}{2}x$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (5 Pkt.):

1. Die Differentialgleichung der schwingenden Saite $u_{tt} = cu_{xx}$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ und mit Randwertbedingungen $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$ hat Lösungen der Form

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Diese Lösungen nennt man Eigenschwingungen. Berechnen Sie alle solche Lösungen. Diese Lösungen sind periodisch in der Zeit. Welche Perioden treten auf?

2. Auch die Differentialgleichung des schwingenden Balkens $u_{tt} = \sigma u_{xxxx}$ mit $\sigma \in \mathbb{R}^+$ und mit Randwertbedingungen $u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(\ell,t) = u_{xx}(\ell,t) = 0$ hat Lösungen der Form

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Berechnen Sie auch alle solche Lösungen. Welche Perioden treten hier auf?

3. Beide Probleme haben in Wirklichkeit einen Reibungsterm:

$$u_{tt} = cu_{xx} - \varepsilon u_t \text{ und } u_{tt} = \sigma u_{xxxx} - \varepsilon u_t$$

Berechnen Sie auch hier die Lösungen der Form $X(x)T(t)$.