Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **SS 2013**

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 5

- Abgabe in den Übungsgruppen oder bis Mittwoch 14 Uhr in den Briefkasten im Container neben der Physik.

Aufgabe 1 (0 Pkt.): Sei $p \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Gleichung

$$xu_x + yu_y = pu \text{ für } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Berechnen Sie die charakteristischen Kurven.
2. Sei nun $p = 4$. Berechnen Sie explizit eine Lösung, für die $u(x,y) = 1$ gilt auf dem Kreis $\{(x,y); x^2 + y^2 = 1\}$.
3. Finden Sie für $p = 2$ zwei Lösungen, für die $u(x,0) = x^2$ gilt für $x > 0$. Warum gibt es hier keine eindeutige Lösung?

Aufgabe 2 (5 Pkt.): Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} x^2 u_x + y^2 u_y = u^2, \\ u(x,2x) = x^2 \text{ für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Gilt die Transversalitätsbedingung?
2. Skizzieren Sie die Kurve, auf der die Randwerte festgelegt sind, und die beiden charakteristischen Kurven, die in $(1,2)$ und $(2,4)$ beginnen.
3. Finden Sie eine Lösung $(x,y) \mapsto u(x,y)$.
4. Ist diese Lösung für alle x und y definiert?

Aufgabe 3 (5 Pkt.): Finden Sie alle Lösungen von

$$\begin{cases} u_{xy} = 0, & \\ u(t,t) = t & \text{für } t \in \mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \nabla u(t,t) = 0 & \text{für } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aufgabe 4 (10 Pkt.):

1. Beweisen Sie Lemma 5.7 Teil 1:

   $$L(\xi,\eta) = a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 + d\xi + e\eta + f, \quad (a,b,c) \neq (0,0,0).$$

   Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ derart, dass $\{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ L(\xi,\eta) = \lambda\}$ eine Ellipse ist, genau dann, wenn $b^2 < ac$ ist.
2. Zu welcher Klasse gehört folgende Dgl?

   $$u_{xy} + u_{yt} + u_{xt} = f$$
3. Zu welcher Klasse gehört folgende Dgl?

   $$u_{xx} - u_{yy} + u_t = f$$