Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

SS 2013

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 6

- Abgabe in den Übungsgruppen oder bis Mittwoch (29. Mai) um 14 Uhr in den Briefkasten im Container neben der Physik.

Aufgabe 1 (0 Pkt.): Raten Sie eine Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{für } x \in (0,1), t > 0, \\ u(x,0) = 0 & \text{für } x \in (0,1), \\ u_t(x,0) = \sin(\pi x) & \text{für } x \in (0,1), \\ u(0,t) = 0 & \text{für } t > 0, \\ u(1,t) = 0 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

Aufgabe 2 (0 Pkt.): Bestimmen Sie die Bereiche, wo die Differentialgleichung $u_{xx} + yu_{yy} = f$ mit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ elliptisch/parabolisch/hyperbolisch ist.

Aufgabe 3 (5 Pkt.): Zeigen Sie, dass man jede Gleichung

$$\left(a\partial_x^2 + 2b\partial_x\partial_y + c\partial_y^2\right) u = f$$

mit $ac > b^2$ mittels einer Koordinatentransformation $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $M \in GL(2)$, auf die Form

$$\Delta U = F$$

bringen kann.
Hinweis: Man benutzt, dass man die Koeffizientenmatrix auf Diagonalform bringen kann und skaliert dann die Eigenwerte auf 1.

Aufgabe 4 (5 Pkt.): Sei $n > 2$. Zeigen Sie, dass eine klassische Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B_1(0) \subset \mathbb{R}^n \\ u = \varphi & \text{auf } \partial B_1(0) \end{cases}$$

die folgende Eigenschaft hat: Für $x \in B_1(0)$ gilt

$$u(x) = \int_{B_1(0)} G(x,y) f(y)\, dy - \int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y) \varphi(y)\, d\sigma_y$$

mit $\omega_n = \int_{B_1(0)} 1 dy$ und

$$G(x,y) = \frac{1}{(n-2)\, n\omega_n} \left(\left\| x\, \|y\| - \frac{y}{\|y\|} \right\|^{2-n} - \|x-y\|^{2-n} \right).$$

Aufgabe 5 (10 Pkt.): Für $x \in (0,1)$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)\pi x) = 1.$$

1. Ist diese Konvergenz gleichmäßig auf $\mathbb{R}$?

2. Es sei

$$c_{k,\ell} = \frac{16}{(2k+1)(2\ell+1)\pi^4} \left(\frac{1}{(2k+1)^2 + \frac{1}{4}(2\ell+1)^2} \right)$$

   und

$$u_{n,m}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{m} c_{k,\ell} \sin((2k+1)\pi x) \sin\left(\left(\ell + \frac{1}{2}\right)\pi y\right).$$

   Zeigen Sie, dass $u_{n,m}$ gleichmäßig konvergiert auf $\mathbb{R}^2$. (Was macht man mit dem doppelten Index?)

3. Zeigen Sie, dass für $\Omega = (0,1) \times (0,2)$ gilt

$$\begin{cases} \lim\limits_{n,m\to\infty} \Delta u_{n,m} = -1 & \text{in } \Omega, \\ \lim\limits_{n,m\to\infty} u_{n,m} = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

   Bemerkung: Könnte man also zeigen, dass man oben Limes und Ableitungen vertauschen kann, wäre $u := \lim_{m,n\to\infty} u_{m,n}$ Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$