Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

SS 2013

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 7

- Abgabe in den Übungsgruppen oder bis Mittwoch 14 Uhr in den Briefkasten im Container neben der Physik.

Aufgabe 1 (5 Pkt.):

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t) & \text{für } x \in (0,l) \text{ und } t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in (0,l), \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in (0,l), \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

1. Berechnen Sie eine distributionelle Lösung.

   Hinweis: Bestimmen Sie Fortsetzungen von u_0, v_0 auf $\mathbb{R}$, die $4l$-periodisch in x-Richtung sind.

2. Welche Kompatibilitätsbedingungen müssen erfüllt sein, damit man eine C^2-Lösung erhält?

Aufgabe 2 (5 Pkt.): Finden Sie eine Funktion $f \in L^1_{lok}(\mathbb{R}^2)$ derart, dass

$$F_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\varphi(x)dx$$

so ist, dass im Sinne von Distributionen gilt:

$$-\Delta F_f = \delta \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^2).$$

Aufgabe 3 (5 Pkt.): Wir nehmen $u_0, v_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Sei u die Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Die kinetische Energie, beziehungsweise potentielle Energie, am Zeitpunkt t sind definiert durch

$$K(t) = \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{2} \left(u_t(x,t)^2\right) dx \text{ und } P(t) = \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{2} \left(u_x(x,t)^2\right) dx.$$

Zeigen Sie:

1. $K(t) + P(t)$ ist konstant.
2. Es gibt $t_0 \in \mathbb{R}^+$ mit $K(t) = P(t)$ für alle $t \geq t_0$.

Aufgabe 4 (5 Pkt.): Man definiert $\left(\text{v.p.}\frac{1}{x}\right)$ für passende Funktionen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\left(\text{v.p.}\frac{1}{x}\right)(\varphi) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right).$$

1. Zeigen Sie, dass $\left(\text{v.p.}\frac{1}{x}\right)(\varphi)$ wohldefiniert ist für $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
2. Zeigen Sie, dass $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\psi(x) = \exp(-x^2)$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ liegt und dass

$$\left(\text{v.p.}\frac{1}{x}\right)(\psi) = 0.$$

3. Ist die Abbildung $\left(\text{v.p.}\frac{1}{x}\right) : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ stetig?
   Hinweis: $\varphi(x) = \varphi(0)\,\psi(x) + (\varphi(x) - \varphi(0))\,\psi(x) + \varphi(x)\,(1 - \psi(x))$.