Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

SS 2013

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 8

- Abgabe in den Übungsgruppen oder bis Mittwoch 14 Uhr in den Briefkasten im Container neben der Physik.

Aufgabe 1 (10 Pkt.): Betrachte die Funktionen

$$u_1(x,t) = \max\left(t^2 - x^2, 0\right) \text{ und } u_2(x,t) = \max\left(t - |x|, 0\right)$$

Ist u_1 bzw. u_2 eine (distributionelle) Lösung der Wellengleichung $u_{tt} - u_{xx} = 0$?
Ergänzen Sie die Anfangsbedingungen:

$$u_1(x,0) = \text{..............} \qquad u_2(x,0) = \text{..............}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_1(x,0) = \text{..............} \qquad \frac{\partial}{\partial t}u_2(x,0) = \text{..............}$$

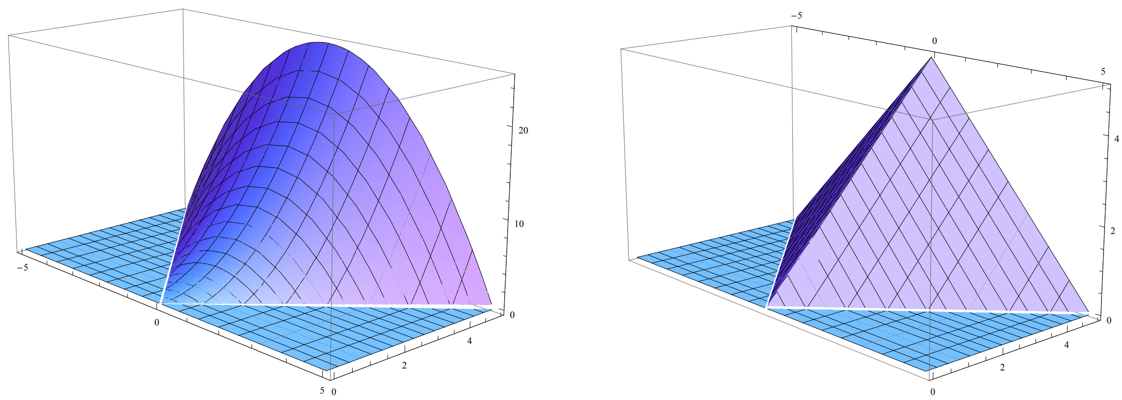

Abbildung 1: Skizze der beiden Funktionen

Aufgabe 2 (0 Pkt.): Zeigen Sie, dass für $u_0, v_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ die Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

die folgende Abschätzung erfüllt:

$$|u(x,t)| \leq \frac{C(u_0, v_0)}{t} \text{ für } (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+.$$

Aufgabe 3: Wir betrachten $A := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+; \|x\| < 1+t\}$.

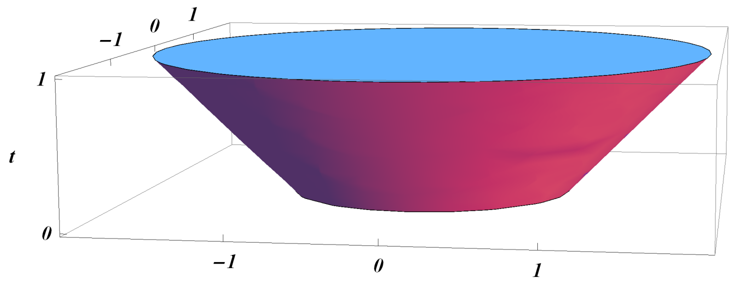

Abbildung 2: Skizze zu A

1. Sei
$$A(t) := \{x \in \mathbb{R}^n; (x,t) \in A\} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1+t\}$$
und sei v stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass für
$$g(t) = \int_{A(t)} v(x,t)\,dx$$
gilt
$$g'(t) = \int_{\partial A(t)} v(x,t)\,d\sigma_x + \int_{A(t)} v_t(x,t)\,dx.$$

2. **(5 Pkt.)** Sei u eine klassische Lösung der Wellengleichung
$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u - c^2 \Delta u = f & \text{für } (x,t) \in A, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in A(0), \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in A(0), \\ u(x,t) = 0 & \text{für } \|x\| = t+1 \text{ mit } t > 0. \end{cases} \tag{1}$$
Wir setzen $E(t) := \int_{A(t)} \left(u_t^2(x,t) + c^2 |\nabla u(x,t)|^2\right) dx$. Zeigen Sie, dass im Fall $f = 0$ folgendes gilt:
$$E'(t) = \left(1 - c^2\right) \int_{\partial A(t)} u_t(x,t)^2\, d\sigma_x.$$

3. **(5 Pkt.)** Zeigen Sie, dass (1) für $c > 1$ höchstens eine klassische Lösung hat.

4. Geben Sie ein zusätzliche Randbedingung so, dass man auch für $c < 1$ höchstens eine Lösung findet.