Prof. Guido Sweers **SS 2013**
Jan M. Krämer

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 9

- Abgabe in den Übungsgruppen oder bis Mittwoch 14 Uhr in den Briefkasten im Container neben der Physik.

Aufgabe 1 (0 Pkt.): Leiten Sie eine explizite Formel für die Lösung von

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

her, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.
Hinweis: Versuchen Sie es mit $u(x,t) = e^{\alpha t} v(x,t)$.

Aufgabe 2 (10 Pkt.): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit glattem Rand. Für eine Lösung u des Anfangs-/ Randwertproblems

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = g_A & \text{auf } \Omega \times \{t = 0\} \\ u = g_R & \text{auf } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{1}$$

definieren wir die Energie

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega u^2(x,t)\, dx.$$

1. Seien $f = 0$ und $g_R = 0$. Zeigen Sie, dass $t \mapsto E(t)$ dann fallend ist. Wie lässt sich dieses Ergebnis physikalisch interpretieren?
2. Folgern Sie daraus, dass das Anfangs-/ Randwertproblem (1) höchstens eine Lösung in $C^2(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ haben kann.

Aufgabe 3 (0 Pkt.): Finden Sie alle nichtnegativen klassischen Lösungen des Randwertproblems

$$\begin{cases} u_t(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0 & \text{für } x \in (0,\ell), t > 0, \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 & \text{für } t > 0, \end{cases}$$

die die Form $u(x,t) = X(x)T(t)$ haben.

Aufgabe 4 (10 Pkt.): Für $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ sei

$$u(x,t) := \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Dies löst das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \lim_{t \downarrow 0} u(x,t) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Ist das ein Widerspruch zur Eindeutigkeit von Lösungen?
2. Gilt $\|u(\cdot,t) - 0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0$ für $t \downarrow 0$? $\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |v(x)|$.
3. Gilt $\|u(\cdot,t) - 0\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0$ für $t \downarrow 0$? $\|v\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |v(x)|\, dx$.
4. Bestimmen Sie ein $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, so dass die von $x \mapsto u(x,t)$ erzeugte Distribution $F_{u(\cdot,t)} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$,

   $$F_{u(\cdot,t)}(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\varphi(x) dx$$

   gegen F konvergiert, das heißt

   $$\forall_{\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})} \quad \lim_{t \downarrow 0} F_{u(\cdot,t)}(\varphi) = F(\varphi).$$