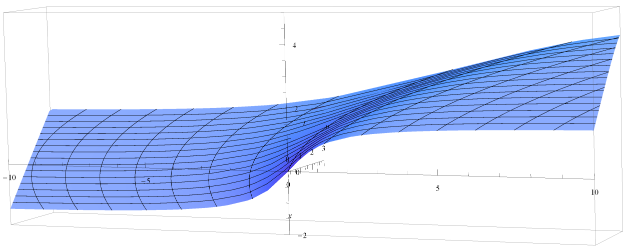
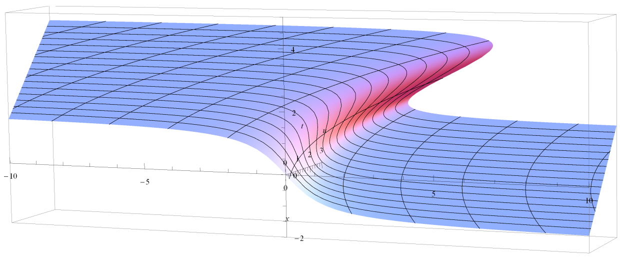
Klausur PDGL vom 26.07.2013

1. Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und sei $x \mapsto u(x)$ eine Lösung von
$$\begin{cases} \nabla \cdot \left(\dfrac{\nabla u(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}} \right) = f(x) & \text{in } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$
Welches Randwertproblem erfüllt $v(x) = \frac{1}{2} u(2x)$?

2. Betrachte die Differentialgleichung
$$u_t(x,t) + u_x(x,t)\, u(x,t) = 1 \tag{1}$$
mit Nebenbedingung
$$u(x,0) = \arctan(x). \tag{2}$$
   a) Zeigen Sie, dass
   $$u\left(s + t \arctan(s) + \tfrac{1}{2}t^2, t\right) = t + \arctan(s)$$
   eine Lösung von (1),(2) für $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$ definiert.

   b) Wenn man (2) ersetzt durch
   $$u(x,0) = -\arctan(x) \tag{3}$$
   liefert
   $$u\left(s - t \arctan(s) + \tfrac{1}{2}t^2, t\right) = t - \arctan(s)$$
   dann eine Lösung von (1),(3) für $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$?

3. Sei $B = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Für die Funktion $u \in C^2\left(\bar{B}\right)$ gelte $\Delta u = 0$ und
$$u(x_1,x_2) = x_1^2 \quad \text{für } (x_1,x_2) \in \partial B.$$
Bestimmen Sie $u(0,0)$.

   Hinweis:
$$\left\{ \int_0^{2\pi} \cos(\varphi)^n \, d\varphi \right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{ 2\pi, 0, \pi, 0, \frac{3\pi}{4}, 0, \frac{5\pi}{8}, 0, \frac{35\pi}{64}, 0, \frac{63\pi}{128}, 0, \frac{231\pi}{512}, 0, \frac{429\pi}{1024}, 0, \frac{6435\pi}{16384}, \ldots \right\}.$$

4. Zu welchem Typ partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung gehört
$$u_t + u_{tt} - 3u_{xt} + u_{xx} = f \ ?$$
Begründen Sie Ihre Antwort.

5. Wenn man versucht eine Lösung von

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \tag{4}$$

mittels $u(x,t) = U\left(x/\sqrt{t}\right)$ zu finden, dann folgt

$$U\left(x/\sqrt{t}\right) = c_1 \int_{-\infty}^{x/\sqrt{t}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi + c_2.$$

   a) Berechnen Sie $\lim_{t\downarrow 0} U\left(x/\sqrt{t}\right)$.

   b) Geben Sie eine Lösung von (4) für $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$ an, die fast überall den Anfangswert $u(x,0) = \operatorname{sign}(x-1)$ erfüllt.

   Hinweis: Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi = \sqrt{4\pi}$.

6. Wir definieren für $t > 0$ die regulären Distributionen $F_t \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ durch

$$F_t(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} \varphi(x)\, dx \quad \text{für } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

   Bestimmen Sie die Distribution $F_0 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ derart, dass

$$F_0(\varphi) = \lim_{t\downarrow 0} F_t(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

7. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = \max\left(1 - |x|^2, 0\right) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(0,x) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

   Stimmt es, dass für die Lösung nach Kirchhoff gilt, dass

$$u(x,t) = 0 \text{ für } |x|^2 + (t-3)^2 \leq 1\ ?$$

   Begründen Sie Ihre Antwort.

8. Erklären Sie die Kriterien von Hadamard anhand eines Beispiels mit einer partiellen Differentialgleichung.