Nachklausur PDGL vom 01.10.2013

1. Sei $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < 1\}$ und sei $x \mapsto u(x)$ eine radialsymmetrische Lösung von

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \left(|\nabla u(x)|^2 \nabla u(x) \right) = 1 & \text{in } B_1(0), \\ u(x) = 0 & \text{auf } \partial B_1(0). \end{cases}$$

   Radialsymmetrisch bedeutet, dass man die Lösung wie folgt schreiben kann: $u(x) = U(|x|)$. Welche gewöhnliche Differentialgleichung erfüllt $r \mapsto U(r)$?

2. Betrachte die Differentialgleichung

$$u_t(x,t) + u_x(x,t)\, u(x,t) = u(x,t) \tag{1}$$

   mit Nebenbedingung

$$u(x,0) = -x. \tag{2}$$

   a) Berechnen Sie die Lösung von (1-2) in einer Umgebung der x-Achse.

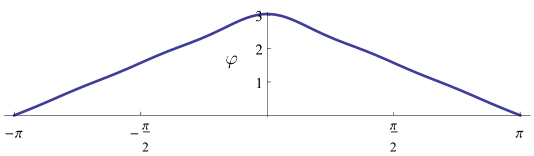
   b) Zeigen Sie, dass diese Lösung als klassische Lösung existiert für $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, \log 2)$.

3. Die Skizzen mit Höhenlinien zeigen Lösungen von

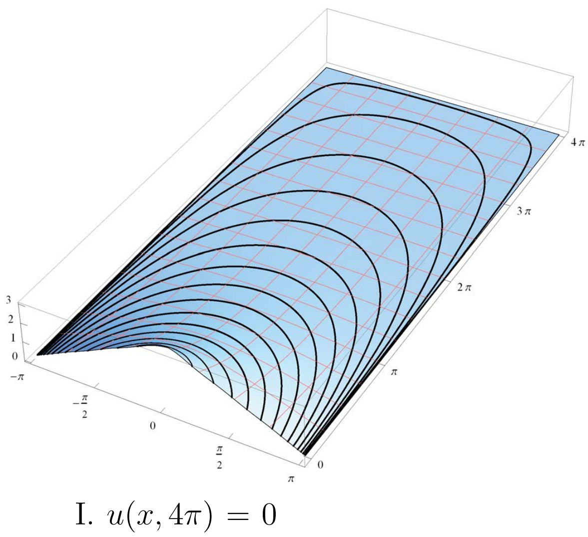
$$\text{a) } u_{xx} - u_{yy} = 0, \qquad \text{b) } u_{xx} - u_y = 0 \qquad \text{und c) } u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

   die jeweils die drei folgenden Randbedingungen[1] erfüllen:

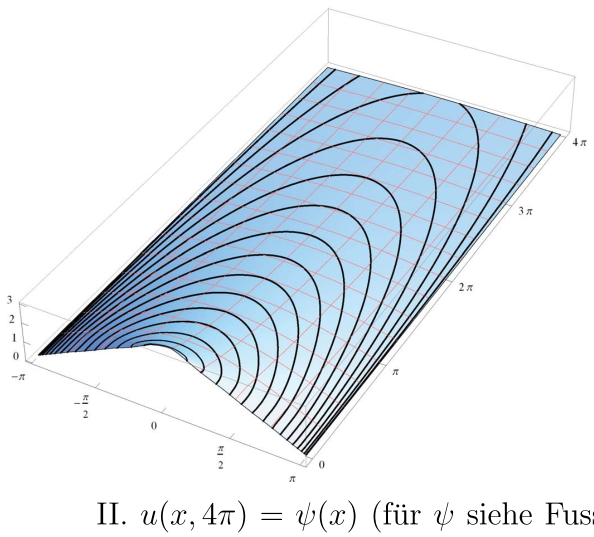
$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) & \text{für } x \in [-\pi, \pi], \\ u(-\pi, y) = 0 & \text{für } y \in [0, 4\pi], \\ u(\pi, y) = 0 & \text{für } y \in [0, 4\pi]. \end{cases}$$



   Bestimmen Sie zu jedem Bild plus Randbedingung die dazu passende Gleichung und begrÃijnden Sie Ihre Auswahl.



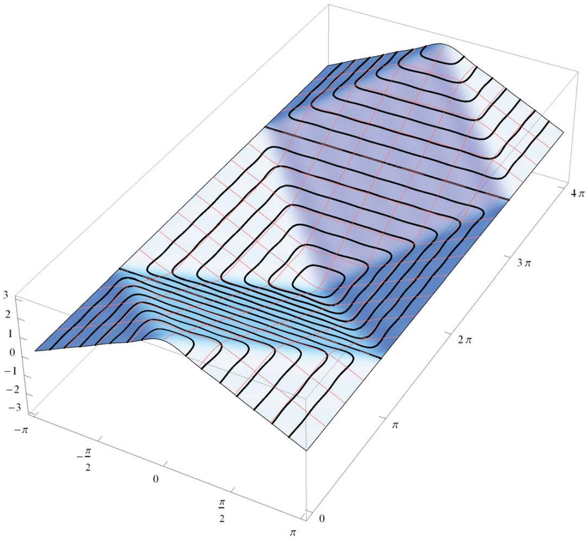
I. $u(x, 4\pi) = 0$



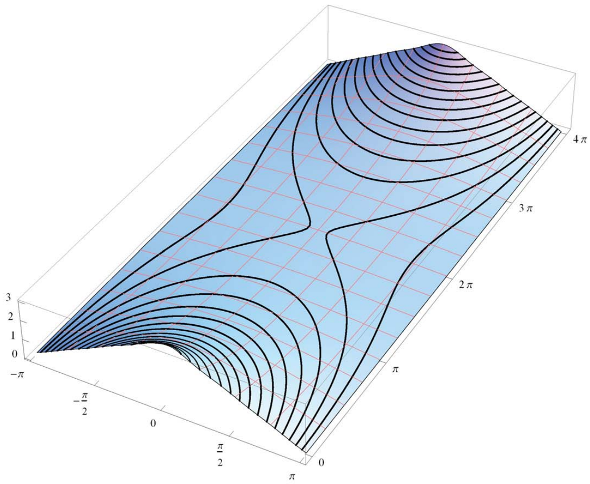
II. $u(x, 4\pi) = \psi(x)$ (für ψ siehe Fussnote[2])

[1] Verwendet sind die Funktionen $\varphi(x) = \frac{8}{\pi}\left(\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{9}\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{1}{25}\cos\left(\frac{5}{2}x\right) + \frac{1}{49}\cos\left(\frac{7}{2}x\right) + \frac{1}{81}\cos\left(\frac{9}{2}x\right) + \frac{1}{121}\cos\left(\frac{11}{2}x\right)\right)$

[2] und $\psi(x) = \frac{8}{\pi}\left(\left(e^{-\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{9}e^{-9\pi}\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{1}{25}e^{-25\pi}\cos\left(\frac{5}{2}x\right) + \frac{1}{49}e^{-49\pi}\cos\left(\frac{7}{2}x\right) + \frac{1}{81}e^{-81\pi}\cos\left(\frac{9}{2}x\right) + \frac{1}{121}e^{-121\pi}\cos\left(\frac{11}{2}x\right)\right)\right)$.



III. $u(x,4\pi)=\varphi(x)$



IV. $u(x,4\pi)=\varphi(x)$

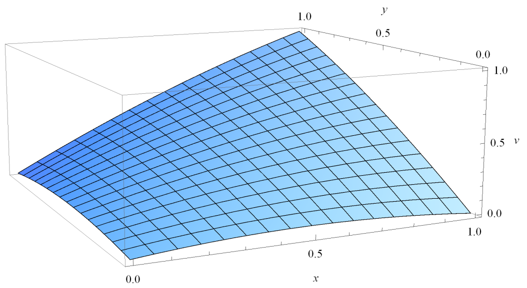
4. Sei $\Omega=\{(x,y)\,;0<x<1 \text{ und } 0<y<1\}$. Zeigen Sie, dass für die Lösung u von

$$\begin{cases} -\Delta u\,(x,y)=1 & \text{für } (x,y)\in\Omega, \\ u\,(x,y)=xy & \text{für } (x,y)\in\partial\Omega, \end{cases}$$

gilt, dass $\min\limits_{(x,y)\in\overline{\Omega}} u\,(x,y)=0$ und $\max\limits_{(x,y)\in\overline{\Omega}} u\,(x,y)=1$.

Hinweis: Die Funktion $v\,(x,y)=xy+\frac{1}{4}x\,(1-x)+\frac{1}{4}y\,(1-y)$ hat die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{cases} -\Delta v\,(x,y)=1 & \textit{für } (x,y)\in\Omega, \\ v\,(x,y)\geq xy & \textit{für } (x,y)\in\partial\Omega, \\ \min\limits_{(x,y)\in\overline{\Omega}} v\,(x,y)=0 & \textit{und} \quad \max\limits_{(x,y)\in\overline{\Omega}} v\,(x,y)=1. \end{cases}$$



---

5. Richtig oder Falsch? Sei $\Psi\,(t,x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$.

   a) Sei $u_0\in C_0^\infty\,(\mathbb{R})$. Man findet eine Lösung von

$$\begin{cases} u_t\,(t,x)-u_{xx}\,(t,x)=0 & \text{für } (t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}, \\ u\,(0,x)=u_0\,(x) & \text{für } x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

   durch $u\,(t,x)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\Psi\,(t,x-y)\,u_0\,(y)\,dy$.

b) Sei $u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Man findet eine Lösung von

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 & \text{für } (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

durch $u(t,x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \Psi(t, x_1 - y_1)\, \Psi(t, x_2 - y_2)\, u_0(y)\, dy.$

Begründen Sie Ihre Antworten.

6. Richtig oder Falsch? Sei $\Psi(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } |x| < t, \\ 0 & \text{für } |x| > t. \end{cases}$

a) Sei $v_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Man findet eine Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0 & \text{für } (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

durch $u(t,x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Psi(t, x - y)\, v_0(y)\, dy.$

b) Sei $v_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Man findet eine Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 & \text{für } (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2, \\ u(0,x) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^2, \\ u_t(0,x) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

durch $u(t,x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \Psi(t, x_1 - y_1)\, \Psi(t, x_2 - y_2)\, v_0(y)\, dy$

Begründen Sie Ihre Antworten.

7. Sei $f(x) = x(1 - x^2)$ und definiere $F_\varepsilon \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ durch

$$F_\varepsilon(\varphi) = \int_{-1}^{1} f(x)\, \frac{\varphi(\varepsilon x)}{\varepsilon}\, dx$$

Man kann zeigen, dass $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} F_\varepsilon = c\, \delta_0'$ im Sinne von Distributionen. Berechnen Sie c.

8. Erklären Sie die Kriterien von Hadamard anhand eines Beispiels mit einer partiellen Differentialgleichung.