Partielle Differentialgleichungen Kapitel 8

Die Wellengleichung in mehr Dimensionen

8.1 Kirchhoff für Raumdimension 3

Das Anfangswertproblem für die Wellengleichung auf dem ganzen Raum $\mathbb{R}^3$ ist

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 \Delta u(x,t) = f(x,t) & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^3, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{8.1}$$

Bemerkung 8.0.1 *Wir versuchen anzugeben, wie man zu einer Lösungsformel kommt und betrachten dazu erst den radialsymmetrischen Fall: $u(x_1, x_2, x_3, t) = U(|x|, t)$. Weil in 3 Dimensionen $\Delta u(|x|) = r^{-2}\partial_r r^2 \partial_r u(r)_{|r=|x|}$ gilt, wird die Differentialgleichung wie folgt*

$$\left(\partial_t^2 - c^2 \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r \right) U(r,t) = 0.$$

Setzen wir $V(r,t) = r\ U(r,t)$ so folgt mit Hilfe von

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2}\partial_r r^2 \partial_r \frac{1}{r} V(r,t) &= \frac{1}{r^2}\partial_r r^2 \left(\frac{1}{r} V_r(r,t) - \frac{1}{r^2} V(r,t) \right) = \\ &= \frac{1}{r^2}\partial_r \left(r V_r(r,t) - V(r,t) \right) = \frac{1}{r} V_{rr}(r,t), \end{aligned}$$

dass

$$\left(\partial_t^2 - c^2 \partial_r^2 \right) V(r,t) = 0.$$

Die Lösungen dieser letzten Gleichung haben die Form

$$V(r,t) = \Phi(r - ct) + \Psi(r + ct),$$

und man findet

$$U(r,t) = \frac{1}{r}\Phi(r - ct) + \frac{1}{r}\Psi(r + ct).$$

Es bedeutet, dass wir formell Lösungen von $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$ finden, die wie folgt sind:

$$u(x,t) = \frac{1}{|x|}\Phi(|x| - ct) + \frac{1}{|x|}\Psi(|x| + ct).$$

Diese Funktionen erinnern uns an die mit Hilfe von charakteristischen Kurven definierten Lösungen in einer Raumdimension. Eine Funktion $u(x,t) = \frac{1}{|x|}\Phi(|x| - ct)$ *wäre eine radialsymmetrische Welle, die sich mit Geschwindigkeit* c *nach außen bewegt. Analog einer Raumdimension könnte man eine Distribution als generalisierte Lösung ansetzen:*

$$u(x,t) = \frac{1}{|x|}\delta(|x| - ct) = \frac{1}{ct}\delta(|x| - ct).$$

Als Distribution in $\mathbb{R}^3$ *mit* t *als Parameter wäre das:*

$$F_{u(\cdot,t)}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{ct}\delta(|x| - ct)\,\varphi(x)dx =$$
$$= \frac{1}{ct}\int_{|x|=ct} \varphi(x)d\sigma_x = ct\int_{|z|=1} \varphi(ctz)\,d\sigma_z =: ct\int_{\omega\in\mathbb{S}^2} \varphi(ct\omega)\,d\omega.$$

Für $\omega \in \mathbb{S}^2$ *schreiben wir weiter* $|\omega| = 1$. *Es gilt*

$$\lim_{t\downarrow 0} F_{u(\cdot,t)}(\varphi) = 0$$

und

$$\lim_{t\downarrow 0} \partial_t F_{u(\cdot,t)}(\varphi) = \lim_{t\downarrow 0} \int\limits_{|\omega|=1} \big(c\,\varphi(ct\omega) + c^2t\;\omega\cdot\nabla\varphi(ct\omega)\big)\,d\omega = 4\pi c\;\varphi(0).$$

Ähnlich wäre $u(x,t) = \frac{1}{|x|}\delta(|x-y| - ct)$ *eine Welle, die in* y *startet. Wie in einer Dimension kann man vermuten, dass*

$$u(x,t) = \text{„}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi c^2 t}\delta(|x-y| - ct)\,v_0(y)dy\text{“} = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|y-x|=ct} v_0(y)d\sigma_y$$

eine Lösung wäre für $f = u_0 = 0$ *von (8.1).*

Das folgende Theorem sagt, dass diese Bemerkung tätsächlich eine Lösung zu den Anfangswert v_0 gibt. Man kann sogar für den u_0-abhängigen Teil eine verwandte Formel finden.

Theorem 8.1 (Die Formel von Kirchhoff[1]) *Sei* $f = 0$, $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ *und* $v_0 \in C^2(\mathbb{R}^3)$. *Dann hat (8.1) eine Lösung in* $C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$, *nämlich*

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|y-x|=ct} v_0(y)d\sigma_y + \partial_t\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|y-x|=ct} u_0(y)d\sigma_y\right) \tag{8.2}$$

Bemerkung 8.1.1 *Betrachtet man wiederum das Einflussgebiet und das Abhängigkeitsgebiet wie auch in einer Dimension, dann bekommt man zwei Kegelränder, die schematisch (die Bodenplatte soll* $\mathbb{R}^3$ *darstellen) in Abbildung 8.1 dargestellt sind.*

Bemerkung 8.1.2 *Die Formel in (8.2) kann man auch wie folgt schreiben:*

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2}\int_{|y-x|=ct} \big(tv_0(y) + u_0(y) + \nabla u_0(y)\cdot(y-x)\big)\,d\sigma_y$$

Beweis. Wir zeigen erst, dass die Anfangsbedingungen erfüllt sind. Weil v_0 stetig differenzierbar und u_0 zweimal stetig differenzierbar ist, folgt

[1] Gustav Robert Kirchhoff, Königsberg 1824 – Berlin 1887.

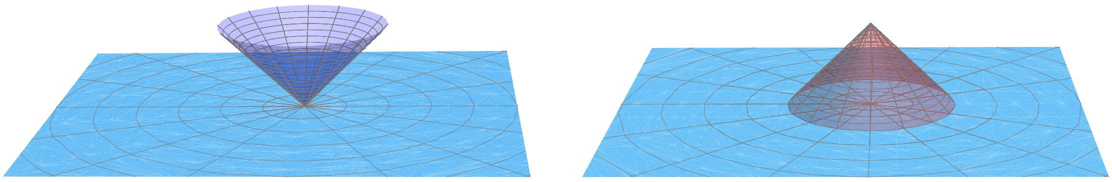

Abbildung 8.1: *Einfluss- und Abhängigkeitsgebiet in 3 Dimensionen. Nach oben die Zeit; in blau das dreidimensionale(!)* $\mathbb{R}^3$ *für* $t = 0$. *Nur der Rand des Kegels zählt.*

- für die erste Randwertbedingung:

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y = \lim_{t\downarrow 0} \frac{t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} v_0(x+ct\omega) d\omega = 0,$$

$$\lim_{t\downarrow 0} \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) = \lim_{t\downarrow 0} \partial_t \left(\frac{t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} u_0(x+ct\omega) d\omega \right) =$$
$$= \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \left(u_0(x+ct\omega) + ct\omega \cdot \nabla u_0(x+ct\omega) \right) d\omega = u_0(x);$$

- für die zweite Randwertbedingung:

$$\lim_{t\downarrow 0} \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y \right) = v_0(x)$$

und

$$\lim_{t\downarrow 0} \partial_t^2 \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) =$$
$$= \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \left(2c\omega \cdot \nabla u_0(x+ct\omega) + ct \sum_{i,j=1}^{3} \omega_i \omega_j \partial_{x_i} \partial_{x_i} u_0(x+ct\omega) \right) d\omega =$$
$$= \lim_{t\downarrow 0} \frac{2c}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \omega \cdot \nabla u_0(x+ct\omega) d\omega = \frac{2c}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \omega \cdot \nabla u_0(x) d\omega = 0.$$

Beim letzten Schritt haben wir benutzt, dass für $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\int_{|\omega|=1} \omega \cdot \vec{v} d\omega = 0.$$

Bevor wir zeigen können, dass die Differentialgleichung erfüllt ist, brauchen wir das folgende Lemma. ■

Lemma 8.2 *Sei* $u \in C^2\left(\overline{B_R(0)}\right)$ *mit* $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ *und* $n > 2$. *Dann gilt*

$$\frac{1}{(n-2)\,\omega_n} \int_{|y|<R} \frac{-\Delta u(y)}{|y|^{n-2}} dy =$$
$$= u(0) - \frac{1}{(n-2)\,\omega_n R^{n-2}} \int_{|y|=R} \nabla u(y) \cdot \nu \; d\sigma_y - \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{|y|=R} u(y) \; d\sigma_y.$$

Bemerkung 8.2.1 *Für $n = 3$ folgt*

$$\int_{|y|<R} \frac{-\Delta u\left(y\right)}{4\pi\left|y\right|} dy = u(0) - \frac{1}{4\pi R}\int_{|y|=R} \nabla u(y)\cdot\nu\ d\sigma_y - \frac{1}{4\pi R^2}\int_{|y|=R} u(y)\ d\sigma_y.$$

Beweis. Man braucht Gauß,

$$\int_\Omega v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \left(v\ \nabla u - \nabla v\ u\right) d\sigma_x + \int_\Omega \left(\Delta v\right)\ u\ dx,$$

die Tatsache, dass $y \mapsto |y|^{2-n}$ harmonisch außerhalb 0 ist,

$$\Delta\left|y\right|^{2-n} = \nabla\cdot\nabla\left|y\right|^{2-n} = \nabla\cdot\left(\left(2-n\right)\left|y\right|^{-n} y\right) = \left(2-n\right)\left(-n\left|y\right|^{-n-2} y\cdot y + n\left|y\right|^{-n}\right) = 0$$

und, dass $y \mapsto |y|^{2-n}$ integrierbar ist bei 0:

$$\begin{aligned}
&\int_{|y|<R} \frac{-\Delta u\left(y\right)}{\left|y\right|^{n-2}} dy = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\varepsilon<|y|<R} \frac{-\Delta u\left(y\right)}{\left|y\right|^{n-2}} dy = \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\left(\int_{|y|=R} - \int_{|y|=\varepsilon}\right)\left(-\left|y\right|^{2-n}\nabla u\left(y\right) + u\left(y\right)\nabla\left|y\right|^{2-n}\right)\cdot\nu d\sigma_y + \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \int_{\varepsilon<|y|<R} -\Delta\left|y\right|^{2-n}\ u\left(y\right) dy\right) = \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\left(\int_{|y|=R} - \int_{|y|=\varepsilon}\right)\left(-\left|y\right|^{2-n}\nabla u\left(y\right)\cdot\nu + u\left(y\right)\left(2-n\right)\left|y\right|^{-n} y\cdot\frac{y}{\left|y\right|}\right) d\sigma_y\right) = \\
&= \int_{|y|=R}\left(-R^{2-n}\nabla u\left(y\right)\cdot\nu + u\left(y\right)\left(2-n\right)R^{1-n}\right) d\sigma_y\ + \\
&\qquad\qquad + \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|y|=\varepsilon}\left(\varepsilon^{2-n}\nabla u\left(y\right)\cdot\nu + u\left(y\right)\left(n-2\right)\varepsilon^{1-n}\right) d\sigma_y = \\
&= \frac{-1}{R^{n-2}}\int_{|y|=R}\nabla u\left(y\right)\cdot\nu d\sigma_y - \frac{n-2}{R^{n-1}}\int_{|y|=R} u\left(y\right) d\sigma_y + \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathcal{O}\left(\varepsilon\right) + \left(n-2\right)\omega_n u(0).
\end{aligned}$$

Beim letzten Schritt ist verwendet worden, dass der Flächeninhalt von $\partial B_\varepsilon(0)$ gleich $\omega_n\varepsilon^{n-1}$ ist. ■

Fortsetzung des Beweises von Theorem 8.1. .

Wir zeigen nun, dass die Differentialgleichung erfüllt ist und fangen an mit dem Teil, der zu v_0 gehört:

$$\begin{aligned}
&c^2\Delta_x\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y = \Delta_x\frac{c^2 t}{4\pi}\int_{|\omega|=1} v_0(x+ct\omega) d\omega = \\
&= \frac{c^2 t}{4\pi}\int_{|\omega|=1}\Delta_x v_0(x+ct\omega) d\omega = \frac{c^2 t}{4\pi}\int_{|\omega|=1}\left(\Delta v_0\right)(x+ct\omega) d\omega = \\
&= \frac{1}{4\pi t}\int_{|z|=ct}\Delta v_0(x+z) d\sigma_z = \int_{|z|=ct}\frac{c}{4\pi\left|z\right|}\Delta v_0(x+z) d\sigma_z = \\
&= \partial_t\int_{r=0}^{ct}\int_{|z|=r}\frac{1}{4\pi\left|z\right|}\Delta v_0(x+z) dr d\sigma_z = \partial_t\int_{|z|<ct}\frac{1}{4\pi\left|z\right|}\Delta v_0(x+z) dz = \\
&= \partial_t\left(-v_0(x) + \frac{1}{4\pi ct}\int_{|z|=ct}\nabla v_0(x+z)\cdot\nu\ d\sigma_z + \frac{1}{4\pi c^2 t^2}\int_{|z|=ct} v_0(x+z)\ d\sigma_z\right) = (*).
\end{aligned}$$

Beim letzten Schritt ist das Lemma verwendet worden. Es folgt weiter, dass

$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{1}{4\pi}\partial_t \left(\int_{|z|=ct} \frac{1}{|z|} \nabla v_0(x+z)\cdot \nu \; d\sigma_z + \int_{|z|=ct} \frac{1}{|z|^2} v_0(x+z)\; d\sigma_z \right) \\
&= \partial_t \left(\frac{1}{4\pi} \int_{|z|=ct} \frac{1}{|z|^2} \nu \cdot \nabla \left(|z|\, v_0(x+z)\right)\; d\sigma_z \right) \\
&= \partial_t^2 \left(\frac{1}{4\pi c} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\varepsilon<|z|<ct} \frac{1}{|z|^2} \nu \cdot \nabla \left(|z|\, v_0(x+z)\right)\; dz \right) \\
&= \partial_t^2 \left(\frac{1}{4\pi c} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{|\omega|=1} \left(\int_{\varepsilon<r<ct} \frac{1}{r^2} \partial_r \left(r\; v_0(x+r\omega)\right)\; r^2 dr \right) d\omega \right) \\
&= \partial_t^2 \left(\frac{1}{4\pi c} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{|\omega|=1} \left(ct\; v_0(x+ct\omega) - \varepsilon\; v_0(x+\varepsilon\omega)\right) d\omega \right) \\
&= \partial_t^2 \left(\frac{t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} v_0(x+ct\omega) d\omega \right) \\
&= \partial_t^2 \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y \right).
\end{aligned}$$

Für den zweiten Teil können wir uns nun kurz fassen:

$$\begin{aligned}
c^2\Delta_x \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) &= \partial_t c^2 \Delta_x \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) \\
&= \partial_t^2 \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right).
\end{aligned}$$

Der Beweis ist komplett. ■

Auch hier kann man für f das Prinzip von Duhamel verwenden. Da dieses Prinzip in jeder Dimension gilt, betrachten wir gleich die allgemeine Version.

8.2 Ergebnisse für beliebige Dimensionen

Proposition 8.3 (Prinzip von Duhamel) *Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, $u_0 = v_0 = 0$. Wenn für jedes $s \geq 0$ die Funktion*

$$(x,t) \mapsto U(x,t;s) \in C^2\left(\{(x,t,s)\,; x\in\mathbb{R}^n \text{ und } 0 \leq s \leq t < \infty\}\right)$$

eine Lösung ist von

$$\begin{cases} U_{tt}(x,t;s) - c^2\Delta U(x,t;s) = 0 & \text{für } x\in\mathbb{R}^n \text{ und } t>s, \\ U(x,t;s) = 0 & \text{für } x\in\mathbb{R}^n \text{ und } t=s, \\ U_t(x,t;s) = f(x,s) & \text{für } x\in\mathbb{R}^n \text{ und } t=s, \end{cases} \tag{8.3}$$

dann ist

$$u(x,t) = \int_0^t U(x,t;s)\, ds. \tag{8.4}$$

eine Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2\Delta u(x,t) = f(x,t) & \text{für } x\in\mathbb{R}^n \text{ und } t>0, \\ u(x,0) = 0 & \text{für } x\in\mathbb{R}^n, \\ u_t(x,0) = 0 & \text{für } x\in\mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{8.5}$$

Beweis. Ähnlich wie in einer Dimension zeigt man:

$$\partial_t^2 \int_0^t U(x,t;s)\,ds = \partial_t \left(U(x,t;s)_{s=t} + \int_0^t \partial_t U(x,t;s)\,ds \right) = \partial_t \int_0^t \partial_t U(x,t;s)\,ds =$$
$$= \left(\partial_t U(x,t;s)\right)_{s=t} + \int_0^t \partial_t^2 U(x,t;s)\,ds = f(x,s) + \int_0^t c^2 \Delta U(x,t;s)\,ds.$$

■

Die Ableitung der Kirchhoffschen Formel mag rätselhaft erscheinen. Wenn man hinterher zeigen kann, dass das Ergebnis stimmt, soll uns das eigentlich keine Sorgen bereiten. Trotzdem ist es vernünftig, dieser Ableitung etwas Beachtung zu geben. Die Idee ist wie folgt gekommen. Die Δ-Differentialoperator ist drehungsinvariant:

$$\Delta(u \circ R) = (\Delta u) \circ R \text{ für beliebige Drehungen } R,$$

denn sei M eine orthogonale Matrix, so findet man $MM^T = I$ und

$$\Delta(u(Mx)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j,k=1}^n M_{ji} M_{ki} (\partial_k \partial_j u)(Mx) = \sum_{j,k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n M_{ji} M_{ki} \right) (\partial_k \partial_j u)(Mx) =$$
$$= \sum_{j,k=1}^n \left(MM^T\right)_{jk} (\partial_k \partial_j u)(Mx) = \sum_{k=1}^n \left(\partial_k^2 u\right)(Mx) = (\Delta u)(Mx).$$

Proposition 8.4 (Euler - Poisson - Darboux[2]) *Wenn $(t,x) \mapsto u(t,x)$ eine Lösung ist von*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 \Delta u(x,t) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t > 0, \\ u(x,t) = g(x) \text{ und } u_t(x,t) = h(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{8.6}$$

dann ist

$$U(r,t) := \frac{\int_{\partial B_r(x)} u(y,t)\,d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(x)} 1 d\sigma_y} \tag{8.7}$$

mit

$$G(r) := \frac{\int_{\partial B_r(x)} g(y)\,d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(x)} 1 d\sigma_y} \text{ und } H(r) := \frac{\int_{\partial B_r(x)} h(y)\,d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(x)} 1 d\sigma_y} \tag{8.8}$$

eine Lösung von

$$\begin{cases} U_{tt}(r,t) - c^2 r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r U(r,t) = 0 & \text{für } r > 0 \text{ und } t > 0, \\ U(r,t) = G(r) \text{ und } U_t(r,t) = H(r) & \text{für } r > 0. \end{cases} \tag{8.9}$$

Bemerkung 8.4.1 *Die Differentialgleichung in (8.9) nennt man die Euler-Poisson-Darboux Gleichung.*

Diese Proposition liefert uns auch die Eindeutigkeit der Lösung in Raumdimension 3.

Theorem 8.5 *Das Anfangswertproblem für die Wellengleichung in (8.1) hat höchstens eine Lösung in $C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$.*

[2] • Leonhard Euler, Basel 1707 – St. Petersburg 1783. • Siméon Denis Poisson, 1781 – 1840, hat sich nie weit von Paris entfernt. Die folgende Aussage wird ihm zugeschrieben: *La vie n'est bonne qu'à deux choses: à faire des mathématiques et à les professer.* Siehe Seite 87 für ein Bild. • Jean Gaston Darboux, Nîmes 1842 – Paris 1917.

Beweis. Wenn (8.1) zwei Lösungen hat, sagen wir u_1 und u_2, dann löst $w = u_1 - u_2$ das Randwertproblem mit $f = u_0 = v_0 = 0$. Nehmen wir an, es gibt $w\left(\tilde{x}, \tilde{t}\right) \neq 0$. Ohne Verlust der Allgemeinheit nehmen wir $\tilde{x} = 0$. Weil Δ invariant unter orthogonalen Abbildungen ist, folgt $U_{tt} - c^2 r^{-2}\partial_r r^2 \partial_r U = 0$ für

$$U(r,t) = \frac{\int_{\partial B_r(0)} w\,(y,t)\, d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(0)} 1 d\sigma_y}.$$

Setzen wir

$$V\,(r,t) = rU(r,t)$$

so folgt

$$r^{-2}\partial_r r^2 \partial_r U = r^{-2}\partial_r r^2 \partial_r r^{-1} V = r^{-2}\partial_r\left(-V + r\partial_r V\right) = r^{-1}\partial_r^2 V$$

und weiter, dass $V\,(r,t)$ eine Lösung der Wellengleichung in einer Dimension ist mit $V\,(r,0) = V_t(r,0) = 0$ für $r > 0$ und $V\,(0,t) = 0$. Diese Lösung ist eindeutig und daher gilt $V\,(r,t) = 0$ für alle $r, t > 0$ und auch $U(r,t) = 0$ für alle $r, t > 0$. Dann findet man

$$w\left(0, \tilde{t}\right) = \frac{1}{4\pi}\int_{M \in SO(3)} w\left(M0, \tilde{t}\right) d\sigma = \frac{1}{4\pi} U(0, \tilde{t}) = 0,$$

und dies ist ein Widerspruch. ∎

8.3 Poisson für Raumdimension 2

Eine Lösungsformel wie die von Kirchhoff lässt sich in 2 Dimensionen nicht direkt herleiten. Wenn man die Formel in drei Dimensionen verwendet für Funktionen die in einer Richtung konstant sind, bekommt man eine Formel für das zweidimensionale Problem. Anders gesagt, statt

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 \Delta u(x,t) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \text{ und } t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ und } u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{8.10}$$

betrachten wir das ähnliche Problem in $\mathbb{R}^3$ mit $\tilde{u}_0(x_1, x_2, x_3) = u_0(x_1, x_2)$ und $\tilde{v}_0(x_1, x_2, x_3) = v_0(x_1, x_2)$. Die Kirchhoffsche Formel gibt uns eine Lösung $\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, t)$, nämlich

$$\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int\limits_{\substack{|y-x|=ct \\ y \in \mathbb{R}^3}} \tilde{v}_0(y) d\sigma_y + \partial_t\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int\limits_{\substack{|y-x|=ct \\ y \in \mathbb{R}^3}} \tilde{u}_0(y) d\sigma_y\right).$$

Weil $\tilde{u}_0$ und $\tilde{v}_0$ jedoch nicht von x_3 abhängen, hängt auch $\tilde{u}$ nicht von x_3 ab. Es folgt außerdem, dass

$$\int_{|y-x|=ct,\ y \in \mathbb{R}^3} \tilde{u}_0(y_1, y_2, y_3) d\sigma_y = \int_{|y-(x_1,x_2,0)|=ct,\ y \in \mathbb{R}^3} u_0(y_1, y_2) d\sigma_y =$$

$$= 2\int_{|z| \le ct,\ z \in \mathbb{R}^2} u_0(x+z)\sqrt{1 + |\nabla w(z)|^2} dz. \tag{8.11}$$

Hier beschreibt w die Höhe y_3 der Sphäre als Funktion von (z_1, z_2), das heißt

$$(y_1, y_2, y_3) = \gamma(z_1, z_2) := (x_1 + z_1, x_1 + z_2, w(z_1, z_2)) \text{ mit } w(z_1, z_2) = \pm\sqrt{c^2t^2 - z_1^2 - z_2^2}.$$

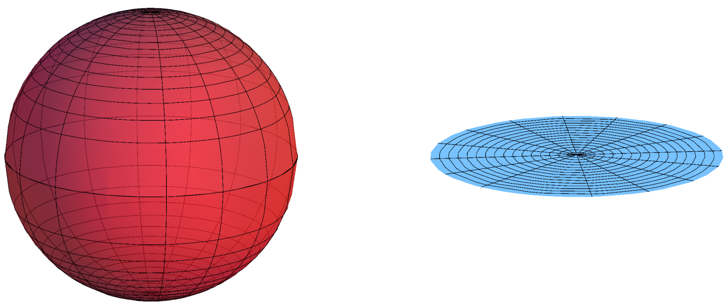

Abbildung 8.2: *Statt über die Sphäre $\partial B_{ct}(x_1, x_2, 0)$ in $\mathbb{R}^3$ integriert man über eine Scheibe $B_{ct}(x_1, x_2)$ in $\mathbb{R}^2$.*

Die 2 in (8.11) folgt, weil man zwei Hälften hat. Der Faktor $\sqrt{1 + |\nabla w(z)|^2}$ folgt aus der Parametrisierung γ durch

$$\sqrt{\det\begin{pmatrix} \frac{\partial\gamma}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial z_1} & \frac{\partial\gamma}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial z_2} \\ \frac{\partial\gamma}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial z_1} & \frac{\partial\gamma}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial z_2} \end{pmatrix}} = \sqrt{\det\begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial w}{\partial z_1}\frac{\partial w}{\partial z_1} & \frac{\partial w}{\partial z_1}\frac{\partial w}{\partial z_2} \\ \frac{\partial w}{\partial z_2}\frac{\partial w}{\partial z_1} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z_2}\frac{\partial w}{\partial z_2} \end{pmatrix}} = \sqrt{1 + |\nabla w(z)|^2}.$$

Mit

$$\sqrt{1 + |\nabla w(z)|^2} = \sqrt{1 + \frac{|z|^2}{c^2t^2 - |z|^2}} = \frac{ct}{\sqrt{c^2t^2 - |z|^2}}$$

findet man:

Theorem 8.6 (Die Formel von Poisson) *Sei $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$ und $v_0 \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Die Lösung von (8.10) ist für $x \in \mathbb{R}^2$ und $t > 0$*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi c}\int_{|y-x|\le ct} \frac{v_0(y)}{\sqrt{c^2t^2 - |y-x|^2}}dy + \partial_t\left(\frac{1}{2\pi c}\int_{|y-x|\le ct} \frac{u_0(y)}{\sqrt{c^2t^2 - |y-x|^2}}dy\right). \tag{8.12}$$

Bemerkung 8.6.1 *Betrachtet man wiederum das Einflussgebiet und das Abhängigkeitsgebiet wie auch in einer Dimension, dann bekommt man in Dimension 2 zwei gefüllte Kegel die in Abbildung 8.3 dargestellt sind.*

Bemerkung 8.6.2 *Wenn man auch für eine rechte Seite $f(x,t)$ lösen möchte, kann man wiederum das Prinzip von Duhamel verwenden.*

Bemerkung 8.6.3 *Diese Idee in der Dimension abzusteigen wird Hadamard zugeschrieben.*

Lemma 8.7 *Man kann die Formel in (8.12) wie folgt umschreiben:*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi ct}\int_{|y-x|\le ct} \frac{tv_0(y) + u_0(y) + \nabla u_0(y)\cdot(y-x)}{\sqrt{c^2t^2 - |y-x|^2}}dy.$$

Beweis. Wir brauchen nur die zweite Hälfte von (8.12) zu betrachten und benutzen da die Substitution $y = x + ctr\omega$ mit $r \in (0,1)$ und $\omega \in \mathbb{R}^2$ mit $|\omega| = 1$. Mit $dy = c^2t^2 r dr d\omega$ folgt

$$\partial_t \left(\frac{1}{2\pi c} \int_{|y-x|\le ct} \frac{u_0(y)}{\sqrt{c^2t^2 - |y-x|^2}} dy \right) = \partial_t \left(\frac{1}{2\pi} \int_{|\omega|=1} \int_{r=0}^{1} \frac{t\, u_0(x+ctr\omega)}{\sqrt{1-r^2}} r dr d\omega \right)$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega|=1} \int_{r=0}^{1} \frac{u_0(x+ctr\omega) + t\, cr\omega \cdot \nabla u_0(x+ctr\omega)}{\sqrt{1-r^2}} r dr d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi ct} \int_{|y-x|\le ct} \frac{u_0(y) + (y-x)\cdot \nabla u_0(y)}{\sqrt{c^2t^2 - |y-x|^2}} dy.$$

■

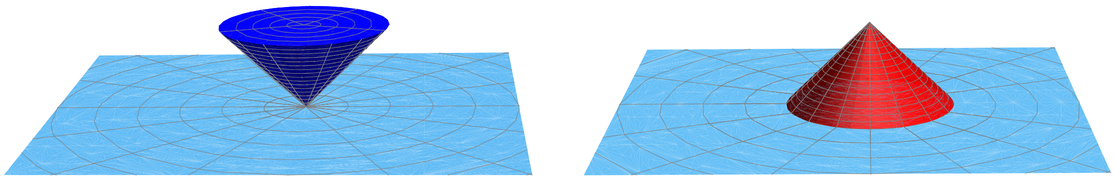

Abbildung 8.3: *Einfluss- und Abhängigkeitsgebiet in 2 Dimensionen; die Zeit nach oben und in blau $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Im Gegensatz zu 3 Dimensionen ist der Kegel nun gefüllt.*

Die Eindeutigkeit der Lösung in zwei Raumdimensionen folgt aus der Eindeutigkeit in drei Raumdimensionen.

8.4 Raumdimensionen 4 und höher

Wir betrachten erst die ungeraden Raumdimensionen. Wenn wir da Existenz, Eindeutigkeit oder sogar eine explizite Formel für eine Lösung gefunden haben, können wir mit dem Absteigetrick von Hadamard auch die geraden Raumdimensionen angehen.

Wir definieren für eine Funktion $(x,t) \mapsto u(x,t)$ die (8.6) erfüllt, wie in (8.7) die Funktion $(r,t) \mapsto U(r,t)$. Ähnlich werden auch G und H wie in (8.8) definiert.

Lemma 8.8 *Sei $n \ge 3$ ungerade. Wenn $(r,t) \mapsto U(r,t)$ eine $\frac{1}{2}(n+1)$-mal differenzierbare Lösung ist von*

$$\begin{cases} U_{tt}(r,t) - c^2 r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r U(r,t) = 0 & \text{für } r > 0 \text{ und } t > 0, \\ U(r,t) = G(r) \text{ und } U_t(r,t) = H(r) & \text{für } r > 0, \end{cases} \tag{8.13}$$

dann ist $(r,t) \mapsto \tilde{U}(r,t)$, definiert durch

$$\tilde{U}(r,t) = \left(r^{-1}\partial_r\right)^{\frac{n-3}{2}} \left(r^{n-2} U(r,t)\right)$$

eine Lösung von

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt}(r,t) - c^2 \partial_r^2 \tilde{U}(r,t) = 0 & \text{für } r > 0 \text{ und } t > 0, \\ \tilde{U}(r,t) = \tilde{G}(r) \text{ und } \tilde{U}_t(r,t) = \tilde{H}(r) & \text{für } r > 0, \end{cases} \tag{8.14}$$

für $\tilde{G}(r) = \left(r^{-1}\partial_r\right)^{\frac{n-3}{2}} \left(r^{n-2} G(r)\right)$ und $\tilde{H}(r) = \left(r^{-1}\partial_r\right)^{\frac{n-3}{2}} \left(r^{n-2} H(r)\right)$.

Beweis. Schreibe $k = \frac{1}{2}(n-3)$. Man zeigt mit vollständiger Induktion nach k, dass

$$\partial_r^2 \left(r^{-1}\partial_r\right)^k r^{2k+1} f(r) = \left(r^{-1}\partial_r\right)^{k+1} r^{2k+2}\partial_r f(r).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} c^2\partial_r^2 \tilde{U}(r,t) &= c^2\partial_r^2 \left(r^{-1}\partial_r\right)^{\frac{n-3}{2}} \left(r^{n-2}U(r,t)\right) = \\ &= c^2 \left(r^{-1}\partial_r\right)^{\frac{n-3}{2}} \left(r^{-1}\partial_r\right) r^{n-1}\partial_r U(r,t) = \\ &= \left(r^{-1}\partial_r\right)^{\frac{n-3}{2}} r^{n-2} \left(c^2 r^{1-n}\partial_r r^{n-1}\partial_r U(r,t)\right) = \\ &= \partial_t^2 \left(r^{-1}\partial_r\right)^{\frac{n-3}{2}} \left(r^{n-2}U(r,t)\right) = \partial_t^2 \tilde{U}(r,t). \end{aligned}$$

Die zugehörige Anfangsbedingungen kontrolliert man sofort. ■

Man kann nun wieder raten, wie die Lösungsformel in ungeraden Dimensionen sein wird für die Wellengleichung:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2\Delta u(x,t) = 0 & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{8.15}$$

Verwendet man den Absteigetrick von Hadamard, dann findet man auch eine Formel für gerade Raumdimensionen.

Die Eindeutigkeit einer solchen Lösung kann man mit Hilfe von Lemma 8.8 wie in Theorem 8.5 beweisen.

Theorem 8.9 *Sei $n \in \mathbb{N}$, $m = \left[\frac{n}{2}\right]$, $f = 0$, $u_0 \in C^{m+2}(\mathbb{R}^n)$ und $v_0 \in C^{m+1}(\mathbb{R})$.*

- *Wenn n ungerade ist, hat (8.15) die folgende Lösung:*

$$u(x,t) = C_n \left(\left(t^{-1}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{c^{n-1}t} \int\limits_{|y-x|=ct} v_0(y)d\sigma_y + \partial_t \left(t^{-1}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{1}{c^{n-1}t} \int\limits_{|y-x|=ct} u_0(y)d\sigma_y \right)\right).$$

  Es gilt $C_n = \frac{1}{\omega_n (n-2)(n-4)\dots 5\ 3\ 1}$.

- *Wenn n gerade ist, hat (8.15) die folgende Lösung:*

$$\begin{aligned} u(x,t) = D_n \Bigg(&\left(t^{-1}\partial_t\right)^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{c^{n-1}} \int\limits_{|y-x|\le ct} \frac{v_0(y)}{\sqrt{c^2t^2 - |y-x|^2}} d\sigma_y + \\ &+ \partial_t \left(t^{-1}\partial_t\right)^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{c^{n-1}} \left(\int\limits_{|y-x|\le ct} \frac{u_0(y)}{\sqrt{c^2t^2 - |y-x|^2}} d\sigma_y \right)\Bigg). \end{aligned}$$

  Es gilt $D_n = \frac{1}{\omega_n n (n-2)(n-4)\dots 4\ 2}$.

Wie vorher $\omega_n = \int_{\partial B_1(0)} 1 d\sigma$.

Die Beweise dieser Formeln sind ähnlich wie die für die Formeln von Kirchhoff (8.2) und Poisson (8.12).

8.5 Gebiete mit Rand

Eine natürliche Frage ist was passiert wenn man die Wellengleichung nicht auf ganz $\mathbb{R}^n$ sondern nur auf ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ lösen möchte. Man kann zeigen, dass das folgende Anfangs/Randwertproblem sinnvoll ist im Sinne von Hadamard:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2\Delta u(x,t) = f(x,t) & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \Omega, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x,t) = \varphi(x,t) & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{8.16}$$

Nur in einigen einfachen Fälle, wie zum Beispiel beim Halbraum $\Omega = \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^+$, kann man einen expliziten Formel für die Lösung herleiten. Für allgemeinere Gebiete gibt es kaum derartige explizite Formel und müssen wir andere mathematische Werkzeuge anwenden. Aber auch ohne solchen Formeln kann man die Fragen von Hadamard zu ein solches Problem angehen und für (8.16) Existenz, Eindeutigkeit und Robustheit zeigen.

Theorem 8.10 *Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$. Dann hat (8.16) höchstens eine Lösung in $C^2\left(\bar{\Omega} \times [0,\infty)\right)$.*

Beweis. Wenn es zwei Lösungen gäbe, sagen wir u_1 und u_2, dann wäre $u = u_1 - u_2$ eine Lösung von (8.16) mit $f = u_0 = v_0 = \varphi = 0$. Betrachte die Funktion

$$E(t) = \tfrac{1}{2}\int_\Omega \left(u_t(x,t)^2 + c^2\left|\nabla u(x,t)\right|^2\right) dx.$$

Man nennt diese Funktion die Energie. Es gilt

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_\Omega \left(u_t(x,t)\, u_{tt}(x,t) + c^2\nabla u(x,t)\cdot\nabla u_t(x,t)\right) dx = \\ &= \int_\Omega \left(u_t(x,t)\, u_{tt}(x,t) + c^2\nabla u(x,t)\cdot\nabla u_t(x,t)\right) dx = \\ &= \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u(x,t)\;\; u_t(x,t)\, d\sigma_x + \int_\Omega u_t(x,t)\left(u_{tt}(x,t) - c^2\Delta u(x,t)\right) dx = 0. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt verwenden man, dass $u_{tt}(x,t) - c^2\Delta u(x,t) = 0$ und dass aus $u(x,t) = 0$ für $(x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+$ folgt $u_t = 0$ auf $\partial\Omega \times \mathbb{R}^+$. Also gilt

$$E(t) = E(0) = \tfrac{1}{2}\int_\Omega \left(u_t(x,0)^2 + c^2\left|\nabla u(x,0)\right|^2\right) dx = 0.$$

Hier verwendet man $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$. Weil in $E(t)$ die Summe zweier Quadraten ist, folgt $u_t(x,t) = 0 = \nabla u(x,t)$ für alle $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$. Wenn alle Ableitungen 0 sind, ist die Funktion konstant. Weil u am Rand 0 ist, gilt $u = 0$ auf $\Omega \times \mathbb{R}^+$. Es gibt also nur eine Lösung. ∎