Prof. Guido Sweers | **Partielle Differentialgleichungen** | SoSe 2016
Jan M. Krämer | **Blatt 0** |

Dieses Blatt gibt keine Punkte und wird in den Übungen am 18. und 19. April besprochen.

Aufgabe 1: Geben Sie Beispiele für eine Funktion $u : [0,1] \to \mathbb{R}$, so dass

(a) $u|_{(0,1)} \in C^1((0,1)) \cap C^0([0,1])$ und $u \notin C^1([0,1])$.

(b) $u \notin C^1([0,1])$ mit $u^2 \in C^1([0,1])$.

(c) $u|_{(0,1)} \in C^2((0,1))$, $u \in C^1([0,1])$ und $u \notin C^2([0,1])$.

(d) $u \in C_0^\infty((0,1))$, $u \not\equiv 0$.

Aufgabe 2: Beweisen Sie, dass für $f \in C([0,1])$ das Randwertproblem

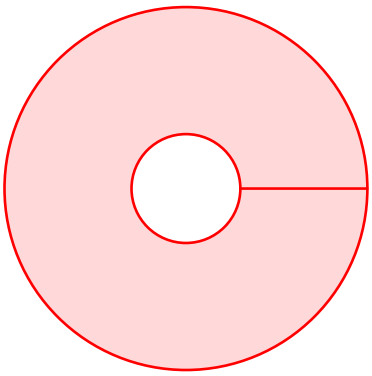
$$\begin{cases} u''(x) = f(x) & \text{für } x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

in $C^2([0,1])$ höchstens eine Lösung hat.

Hinweis: Falls das Problem zwei Lösungen u_1 und u_2 besitzt, dann betrachten Sie das passende Randwertproblem für $u_1 - u_2$.

Aufgabe 3: Sei Ω ein beschränktes Gebiet und $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit

$$\sup_{x \in \Omega} |\nabla f(x)| < \infty.$$



(a) Finden Sie ein geeignetes Ω und eine Funktion f, so dass f nicht stetig auf den Rand fortgesetzt werden kann.

(b) Sei $\Omega = B_1(0)$. Beweisen Sie, dass es eine stetige Funktion $g : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $g_{|B_1(0)} \equiv f$.

Aufgabe 4: Berechnen Sie:

(a) $\displaystyle\int_{0<x<y<1} \frac{x}{y}\, d(x,y)$

(b) $\displaystyle\int_{x^2+y^2\le 1} (2x^2 + y^2)\, d(x,y)$

Aufgabe 5: Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^n)$ und $g \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^m)$. Bestimmen Sie jeweils, wie n und m gewählt werden müssen, damit der Ausdruck wohldefiniert ist.

(a) $g(x) = \operatorname{div} \operatorname{grad} f(x)$

(b) $g(x) = \operatorname{grad} \operatorname{div} f(x)$

(c) $g(x) = \operatorname{rot} \operatorname{grad} f(x)$

(d) $g(x) = \operatorname{div} \operatorname{rot} f(x)$

Aufgabe 6: Sei $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$. Sei $v : Q \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar auf Q und $u : Q \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

(a) Berechnen Sie $\vec{n}$ auf den 4 Seiten von ∂Q.

(b) Füllen Sie aus, von wo nach wo die folgenden Funktionen definiert sind:

$$\begin{aligned} \nabla u : &\quad \dots \ \to \ \dots \\ \nabla \cdot \vec{v} : &\quad \dots \ \to \ \dots \\ \vec{v} \cdot \nabla u : &\quad \dots \ \to \ \dots \\ u\ \vec{v} \cdot \vec{n} : &\quad \dots \ \to \ \dots \\ u\ \nabla \cdot \vec{v} : &\quad \dots \ \to \ \dots \end{aligned}$$

(c) Ergänzen Sie mittels partieller Integration:

$$\begin{aligned} \int_Q \vec{v} \cdot \nabla u \ dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 v_1(x,y) \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) dx \right) dy + \int_0^1 \left(\int_0^1 v_2(x,y) \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) dy \right) dx \\ &= \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \int_{\partial Q} u\ \vec{v} \cdot \vec{n}\ d\sigma - \int_Q u\ \nabla \cdot \vec{v}\ dxdy \end{aligned}$$

Aufgabe 7: Sei $X = \{(x,y) \in (0,1) \times (0,1) \ ; \ x + y < 1\}$. Berechnen Sie

$$\int_X e^{\frac{x}{x+y}}\ d(x,y).$$

Hinweis: $(u,v) = \left(x+y, \frac{y}{x+y}\right)$.

Aufgabe 8: Gegeben sei

$$\int_{x^2+y^2<1} \nabla \cdot \begin{pmatrix} x\cos(1-x^2-y^2) \\ 1+x^2 \end{pmatrix} d(x,y).$$

(a) Berechnen Sie das Integral direkt.

(b) Berechnen Sie das Integral mit dem Satz von Gauß.