Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

Partielle Differentialgleichungen
Blatt 1

SoSe 2016

Aufgabe 1 (5 Punkte): Wir betrachten die Familie von Funktionen $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, wobei

$$f_n : [-1,1] \to \mathbb{R} \text{ mit } f_n(x) = e^{-nx^2}.$$

(a) Ist diese Familie gleichmäßig beschränkt?

(b) Ist diese Familie gleichgradig stetig?

(c) Gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge?

Aufgabe 2: Beantworten Sie die gleichen Fragen wie in Aufgabe 2 für die Funktionenfolgen

(i) $f_n(x) = \sin(x-n)$, $x \in [0, 2\pi]$

(ii) $f_n(x) = n\cos(\frac{x}{n})$, $x \in [0,1]$

(iii) $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$, $x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 3: Zeigen Sie: Für Polarkoordinaten, also $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$, gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Aufgabe 4: Wir betrachten

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{für } \varepsilon < x^2 + y^2 < 1 \\ u = 0 & \text{für } x^2 + y^2 \in \{\varepsilon^2, 1\} \end{cases} \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$u_\varepsilon(x,y) = \tfrac{1}{4}(1 - x^2 - y^2) - \tfrac{1}{4}\frac{\ln(x^2+y^2)}{\ln(\varepsilon^2)}(1 - \varepsilon^2)$$

eine Lösung von (1) ist.

(b) Berechnen Sie für $0 < x^2 + y^2 \le 1$:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} u_\varepsilon(x,y).$$

Aufgabe 5: Für welche $\alpha \in [0,1]$ sind die folgenden Funktionen in $C^{0,\alpha}([0,1])$?

- $f_1(x) = x^\beta$ mit $\beta \in [0, \infty)$.
- $f_2(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\ln(\frac{x}{2})} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
- $f_3(x) = \begin{cases} -x\ln(x) & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Aufgabe 6 (5 Punkte): Zeigen Sie, dass für $\alpha, \beta \in (0,1)$ und $f \in C^{0,\alpha}([0,1])$, $g \in C^{0,\beta}([0,1])$ mit $g([0,1]) \subset [0,1]$ folgt, dass $f \circ g \in C^{0,\alpha\beta}([0,1])$.

Aufgabe 7 (5 Punkte): Sei

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & 0 < y < x \\ -\frac{1}{y^2} & 0 < x < y \\ 0 & x = y \text{ oder } xy = 0 \end{cases}.$$

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx \right) dy \text{ und } \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy \right) dx.$$

Aufgabe 8 (5 Punkte): Es sei $f \in C(\mathbb{R}^2)$ und $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ eine Lösung der Gleichung

$$u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) = f(x,y). \tag{2}$$

(a) Schreiben Sie

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(u(s+t,s-t)\right), \quad \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}\left(u(s+t,s-t)\right) \text{ und } \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\left(u(s+t,s-t)\right)$$

mittels u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}.

(b) Wir definieren

$$\tilde{u}(s,t) = u(s+t,s-t).$$

Welche Differentialgleichung erfüllt $\tilde{u}$, wenn u die Gleichung (2) erfüllt?

(c) Zeigen Sie, dass jede Lösung von (2) mit $f \equiv 0$, die Form $u(x,y) = g(x-y) + h(x+y)$ hat.