Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

Partielle Differentialgleichungen
Blatt 10

SoSe 2016

Aufgabe 1: Leiten Sie eine explizite Formel für die Lösung von

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

her, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.
Hinweis: Versuchen Sie es mit $u(x,t) = e^{\alpha t} v(x,t)$.

Aufgabe 2: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit glattem Rand. Für eine Lösung u des Anfangs-/ Randwertproblems

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = g_A & \text{auf } \Omega \times \{t = 0\} \\ u = g_R & \text{auf } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{1}$$

definieren wir die Energie

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega u^2(x,t)\, dx.$$

(a) Seien $f = 0$ und $g_R = 0$. Zeigen Sie, dass $t \mapsto E(t)$ dann fallend ist. Wie lässt sich dieses Ergebnis physikalisch interpretieren?

(b) Folgern Sie daraus, dass das Anfangs-/ Randwertproblem (1) höchstens eine Lösung in $C^2(\overline{\Omega} \times [0, \infty))$ haben kann.

Aufgabe 3: Finden Sie alle nichtnegativen klassischen Lösungen des Randwertproblems

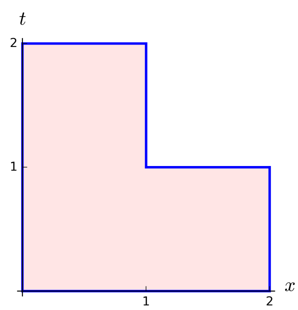
$$\begin{cases} u_t(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0 & \text{für } x \in (0, \ell), t > 0, \\ u(0,t) = u(\ell, t) = 0 & \text{für } t > 0, \end{cases}$$

die die Form $u(x,t) = X(x)T(t)$ haben.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei $U = (0,2)^2 \setminus [1,2]^2$.
Wir betrachten

$$u_t - u_{xx} = 0 \text{ mit } u \in C^2(U) \cap C(\overline{U}).$$

Wo kann diese Funktion u in $\overline{U}$ ihr Maximum annehmen?



Aufgabe 5 (5 Punkte): Sei $W(x,t,r) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ eine Wärmeleitungskugel. Bestimmen Sie

$$d := \sup\{|y_1 - y_2| \ ; \ \exists_{s\in\mathbb{R}} : (y_1, s) \in W(x,t,r) \text{ und } (y_2, s) \in W(x,t,r)\}$$

und

$$h := \sup\{|s_1 - s_2| \ ; \ \exists_{y\in\mathbb{R}^n} : (y, s_1) \in W(x,t,r) \text{ und } (y, s_2) \in W(x,t,r)\}.$$

Aufgabe 6 (5 Punkte): Für $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ sei

$$u(x,t) := \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Dies löst das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \lim_{t\downarrow 0} u(x,t) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(a) Ist das ein Widerspruch zur Eindeutigkeit von Lösungen?

(b) Gilt $\|u(\cdot,t) - 0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0$ für $t \downarrow 0$?

(c) Gilt $\|u(\cdot,t) - 0\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0$ für $t \downarrow 0$?

(d) Bestimmen Sie ein $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, so dass die von $x \mapsto u(x,t)$ erzeugte Distribution $F_{u(\cdot,t)} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$,

$$F_{u(\cdot,t)}(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\varphi(x)dx$$

gegen F konvergiert, das heißt

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \ : \ \lim_{t\downarrow 0} F_{u(\cdot,t)}(\varphi) = F(\varphi).$$

Aufgabe 7 (5 Punkte): Seien

$$\begin{aligned} g(x,t) &= e^x \cos(x + 2t) + e^{-x} \cos(x - 2t) \text{ und} \\ a(y) &= e^{-y^{\frac{4}{3}}} y \cos(\sqrt{3} y^{\frac{4}{3}}). \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass für

$$u(x,t) = \int_0^\infty a(y) g(xy, ty^2) dy$$

gilt, dass

$$u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0,\infty))$$

und dass

$$u(x,0) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $u_t - u_{xx} = 0$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

(b) Gibt es C und A derart, dass $u(x,t) \le Ce^{A|x|^2}$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$?

Hinweis: Dieses Beispiel kommt von Rosenbloom und Widder.