Prof. Guido Sweers | **Partielle Differentialgleichungen** | SoSe 2016
Jan M. Krämer | **Blatt 11**

Aufgabe 1 (5 Punkte): *Küchenmathematik*
Geflügel aus der Gattung Galliformes, das im Ofen zubereitet wird, heiße gar, sobald es an jedem Punkt in seinem Inneren eine Temperatur von mindestens 80 Grad Celsius hat. Messungen in verschiedenen Haushalten haben ergeben, dass ein Hähnchen von 1.5 kg in einem auf 200 Grad Celsius vorgeheizten Backofen nach genau einer Stunde gar ist. Wie lange braucht man, um einen Truthahn von 6 kg zu garen?
Hinweis: Nehmen Sie an, dass ein Truthahn ein skaliertes Hähnchen ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Betrachten Sie

$$\begin{cases} \left(\partial_t - \partial_x^2\right) u\left(x,t\right) = 0 & \text{für } \left(x,t\right) \in \left(0,1\right) \times \mathbb{R}^+, \\ u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right) & \text{für } x \in \left(0,1\right), \\ u\left(x,t\right) = 0 & \text{für } \left(x,t\right) \in \left\{0,1\right\} \times \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

für $u_0 \in C_0^0\left[0,1\right]$. Zeigen Sie, dass für die Lösung

$$u\left(x,t\right) \in C^2([0,1] \times (0,\infty)) \cap C^0([0,1] \times [0,\infty))$$

die folgenden Abschätzungen gelten:

(a) $\left\|u\left(\cdot,t\right)\right\|_{L^\infty(0,1)} \leq \left\|u_0\right\|_{L^\infty(0,1)}$.
Hinweis: Maximumprinzip.

(b) $\left\|u\left(\cdot,t\right)\right\|_{L^2(0,1)} \leq e^{-\pi^2 t}\left\|u_0\right\|_{L^2(0,1)}$.
Hinweis: Betrachten Sie $\partial_t \int_0^1 u(x,t)^2 dx$. Verwenden Sie, dass für $w \in C^2\left[0,1\right] \cap C_0\left[0,1\right]$ gilt: $\int_0^1 w'\left(x\right)^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 w\left(x\right)^2 dx$.

(c) $\left\|u\left(\cdot,t\right)\right\|_{L^\infty(0,1)} \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left\|u_0\right\|_{L^1(0,1)}$.
Hinweis: Maximumprinzip.

Aufgabe 3: Geben Sie ähnliche Abschätzungen an für

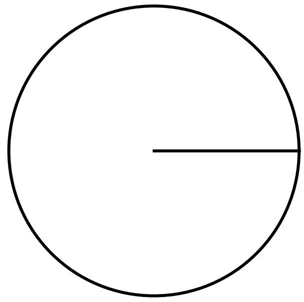
$$\begin{cases} \left(\partial_t - \partial_x^2\right) u\left(x,t\right) = 0 & \text{für } \left(x,t\right) \in \left(0,1\right) \times \mathbb{R}^+, \\ u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right) & \text{für } x \in \left(0,1\right), \\ \partial_x u\left(x,t\right) = 0 & \text{für } \left(x,t\right) \in \left\{0,1\right\} \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Aufgabe 4 (5 Punkte): Wir setzen $\Omega := B_1(0,0) \setminus ([0,1) \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^2$ und definieren darauf u in Polarkoordinaten durch

$$u\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) := \sqrt{r}\sin\left(\tfrac{\varphi}{2}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass u das folgende Randwertproblem löst:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } [0,1] \times \{0\} \\ u\left(\cos\varphi, \sin\varphi\right) = \sin\left(\tfrac{\varphi}{2}\right) & \text{für } \varphi \in (0, 2\pi) \end{cases}$$



(b) In welchen Räumen $C^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ liegt u?

(c) In welchen Räumen $W^{1,p}(\overline{\Omega})$ mit $p \in [1,\infty]$ liegt u?

Aufgabe 5: Wir betrachten $A := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+; \|x\| < 1 + t\}$.

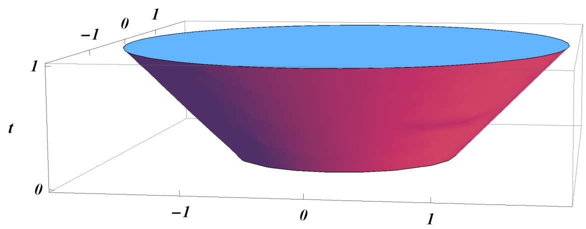


Abbildung 1: Skizze zu A

Zeigen Sie, dass das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u - \Delta u = f & \text{für } (x,t) \in A, \\ u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right) & \text{für } x \in B_1\left(0\right), \\ u\left(x,t\right) = 0 & \text{für } \|x\| = t+1. \end{cases} \tag{1}$$

höchstens eine klassische Lösung hat.

Aufgabe 6 (5 Punkte): Die Besselfunktion J_n ist für $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}(\tfrac{1}{2}t)^{2k+n}.$$

Zeigen Sie, dass die in Beispiel 10.13 angegebenen Funktionen $\varphi_{n,m,0}$ und $\varphi_{n,m,1}$ tatsächlich Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf der Kreisscheibe sind, dass sie also

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x) & \text{für } x \in B_1(0), \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial B_1(0) \end{cases}$$

mit geeignetem λ lösen.