Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

Partielle Differentialgleichungen
Blatt 12

SoSe 2016

Aufgabe 1 (6 Punkte): Sei $u \in C^2(\Omega)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sei $B_R(x_0) \subset \Omega$, $r \in (0, R)$ und $-\Delta u \leq 0$.
Für $\Phi(r) = \dfrac{1}{r^{n-1}} \dfrac{1}{|\partial B_1(0)|} \displaystyle\int_{\partial B_r(x_0)} u(x) d\sigma_x$ gilt $\frac{\partial}{\partial r}\Phi(r) \geq 0$.
Hinweis 1: $\int_{B_r(x_0)} u(x)dx = \int_0^r \int_{\partial B_s(x_0)} u(x) d\sigma_x ds$.

(b) Zeigen Sie: $-\Delta u \leq 0 \implies u$ subharmonisch.

(c) Zeigen Sie, dass wenn $-\Delta u(x) > 0$ in $B_r(x_0)$ gilt, für die Lösung v von

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 & \text{in } B_r(x_0) \\ v = u & \text{auf } \partial B_r(x_0) \end{cases}$$

gilt, dass $v(x_0) < u(x_0)$.

(d) Zeigen Sie: u subharmonisch $\implies -\Delta u \leq 0$.
Hinweis 2: „Hinweis 1“ und „$-\Delta u > 0 \implies u$ ist nicht subharmonisch“.

Aufgabe 2 (4 Punkte): (a) Zeigen Sie, dass es ein $C_p > 0$ gibt, so dass für alle $u \in C_0^1([0,1])$ gilt, dass

$$\int_0^1 |u(x)|^p \, dx \leq C_p \int_0^1 |u'(x)|^p \, dx.$$

(b) Zeigen Sie, dass es ein $C_p > 0$ gibt, so dass für alle $u \in C^1([0,1]^2)$ mit $u(x,y) = 0$ auf $\{0\} \times [0,1]$ gilt, dass

$$\int_{[0,1]^2} |u(x,y)|^2 \, d(x,y) \leq C_p \int_{[0,1]^2} |\nabla u(x,y)|^2 \, d(x,y).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte): Sei $R > 0$ und u harmonisch und nichtnegativ auf $B_{R+1}(0) \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$. Sei $0 < r < R$. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in B_r(0)$ gilt:

$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{n-2} \frac{R-r}{R+r} u(0) \leq u(x) \leq \left(\frac{R}{R-r}\right)^{n-2} \frac{R+r}{R-r} u(0)$$

Hinweis: Nutzen sie die Darstellungsformel für Lösungen auf einer Kugel.

Aufgabe 4: Sei u eine nichtnegative, harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 3$. Zeigen Sie, dass u konstant ist.

Hinweis: Aufgabe 3

Aufgabe 5: (a) Es seien u und v superharmonische Funktionen auf Ω. Zeigen Sie, dass w, definiert durch

$$w(x) := \min(u(x), v(x)),$$

auch superharmonisch ist auf Ω.

(b) Geben Sie ein zwei superharmonische Funktionen u und v an, so dass

$$z(x) := \max(u(x), v(x))$$

nicht superharmonisch ist auf Ω.

Aufgabe 6 (6 Punkte):

(a) Sei $u \in C^4(\Omega)$ harmonisch. Zeigen Sie, dass $\Delta^2 \left(|x|^2 u(x)\right) = 0$.

(b) Beweisen Sie, dass $u(x) = c_1 + c_2 |x|^2 + c_3 |x|^{2-n} + c_4 |x|^{4-n}$ für $c_i \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\Delta^2 u = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ für } n \notin \{2, 4\}$$

löst.

(c) Begründen Sie, warum alle radialsymmetrischen Lösungen dieser Gleichung diese Form haben.

(d) Bestimmen Sie mithilfe dieser Funktionen eine Funktion $F_n : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ für $n > 4$, so dass

$$\Delta^2 F_n = \delta_0 \text{ in } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$$

und

$$\lim_{|x| \to \infty} F_n(x) = 0.$$

Die Funktion F_n nennt man die Fundamentallösung für den biharmonischen Differentialoperator.