Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

Partielle Differentialgleichungen
Blatt 13

SoSe 2016

Aufgabe 1 (5 Punkte): Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ eine Viertelkugel mit Radius 1,

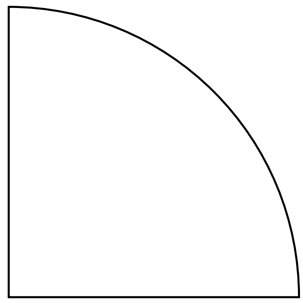
$$D := \{(x_1, x_2) \in B_1(0,0); x_1 > 0, x_2 > 0\}.$$

Bestimmen Sie die Green-Funktion zur Poisson-Gleichung auf D mit Dirichlet-Randwerten, also die Funktion $G(x,y)$, für die

$$u(x) := \int_D G(x,y) f(y)\, dy$$

(für genügend glattes f) das folgende Randwertproblem löst:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } D \\ u = 0 & \text{auf } \partial D \end{cases}$$



Aufgabe 2 (5 Punkte): Zeigen Sie, dass die Funktion u, definiert durch $u(x) = 1 - \|x\|$ superharmonisch auf $B_1(0) \subset R^n$ $(n \geq 2)$ ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C^2(\Omega)$. Zeigen Sie:

(a) u ist harmonisch genau dann, wenn u subharmonisch und superharmonisch ist.

(b) Wenn u subharmonisch ist, dann gilt das starke Maximumprinzip.

(c) Wenn u superharmonisch und v subharmonisch ist, sowie $u \geq v$ auf $\partial\Omega$, dann gilt $u > v$ in Ω oder u und v sind harmonisch.

Aufgabe 4: Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $u \in C^0(\mathbb{R}^2)$, die subharmonisch ist, auf keiner Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ harmonisch ist und

(a) nach unten unbeschränkt ist.

(b) nach unten beschränkt und nicht konvex ist.

Aufgabe 5: Sei $\Omega = (-1,1)^2$ und $A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$. Zeigen Sie, dass für jede positive harmonische Funktion $u \in C(\Omega)$ gilt, dass

$$\sup_{x \in A} u(x) \leq 3^6 \inf_{x \in A} u(x).$$

Aufgabe 6 (5 Punkte): Sei $\Omega = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Sei u eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega \\ u(x_1, x_2) = x_1 x_2 & \text{für } (x_1, x_2) \in \partial\Omega \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Lösung eindeutig ist.

(b) Zeigen Sie, dass $u(x_1, x_2) \geq x_1 x_2$ auf Ω.

(c) Können Sie sagen, ob das Maximum bzw. Minimum der Lösung auf dem Rand liegt? *Hinweis: Betrachten Sie dazu die Funktion* $\bar{u}(x_1, x_2) = 2x_1 - x_1^2$.