Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

Partielle Differentialgleichungen
Blatt 2

SoSe 2016

Aufgabe 1: Geben Sie eine schwache und eine distributionelle Formulierung der folgenden Differentialgleichungen für u:

(a) $\cos(x)\, u''(x) = f(x)$ für $x \in \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$.

(b) $\nabla \cdot \left(e^{x_1} \nabla u(x)\right) = f(x)$ für $x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$.

(c) $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \left(\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \end{pmatrix} \right) u(x) = f(x)$ für $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Wie ist die klassische Formulierung der Differentialgleichung für u bei:

(a) $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \left(\cos(x)\, u'(x)\, \varphi'(x) - f(x)\, \varphi(x)\right) dx = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$.

(b) $\int_{B_1(0)} \left(\left(1 + |x|^2\right) \nabla u(x)\, \nabla \varphi(x) + f(x)\, \varphi(x)\right) dx = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$.

(c) $\int_{B_1(0)} \left(-\left(1 + |x|^2\right) u(x)\, \Delta \varphi(x) + f(x)\, \varphi(x)\right) dx = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Wir betrachten die Funktion $f_\alpha : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

mit $\alpha \in (0, \infty)$.

Beweisen Sie jeweils: Für welche α ist

(a) f_α stetig?

(b) f_α differenzierbar in 0?

(c) f'_α auf $(0, 1]$ beschränkt?

(d) f_α stetig differenzierbar auf $[-1, 1]$?

(e) f_α schwach differenzierbar auf $[-1, 1]$?

Hinweis: Sie können ohne Beweis benutzen, dass $\int_0^1 \left|\frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| dx = \infty$.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und radialsymmetrisch, d.h. es existiert ein $\tilde{f} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, so dass $f(x) = \tilde{f}(\|x\|)$. Zeigen Sie, dass dann

$$\Delta f(x) = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{f}(r)\right) \text{ für } r = \|x\| \text{ gilt.}$$

Aufgabe 5: Sei $u(x) = \|x\|^{-a}$ mit $x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Für welche $a \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}$ ist u schwach differenzierbar auf $B_1(0)$?

Hinweis: Es gilt $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(0)} f(x)dx = \int_\Omega f(x)dx$ *für jede integrierbare Funktion* f.

Aufgabe 6 (5 Punkte):

(a) Zeigen Sie, dass $x \mapsto \ln|x|$ auf $(-1, 1)$ keine schwache Ableitung hat.

(b) Zeigen Sie, dass $x \mapsto \ln|x|$ auf $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ eine schwache Ableitung nach x_1 hat.

Aufgabe 7:

(a) Sei $f(x) = \frac{\|x\|}{1+\|x\|^2}$. Für welche $p \in [1, \infty]$ ist $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$?

(b) Sei $f(x) = \frac{1}{\|x\|^2+\|x\|^4}$. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$?

Hinweis: Nutzen Sie Beispiel 1.26 aus der Vorlesung.