Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

Partielle Differentialgleichungen
Blatt 3 - Version 2

SoSe 2016

Abgabeschluss ist aufgrund des Feiertags schon *Mittwoch, 16 Uhr*!

Aufgabe 1: Sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $J(u) := \int_{B_1(0)} \left(\frac{1}{2}\left\|\nabla u\right\|^2 + (1-u^2)^2\right) dx$.

(a) Wenn $u \in C^2(\overline{B_1(0)}) \cap C_0(\overline{B_1(0)})$ das Funktional minimiert, welches Randwertproblem löst u?

(b) Zeigen Sie, dass $u = 0$ eine Lösung des Randwertproblems im oben genannten Raum ist, aber nicht das Funktional minimiert. *Hinweis: Betrachten Sie* $u(x) = 1 - \left\|x\right\|^2$.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Sei $T \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+)$ eine Lösung von

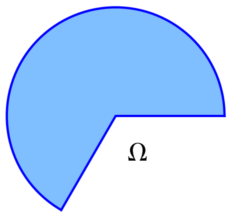
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}T(x,t) - k\Delta T(x,t) = cT(x,t) & \text{für } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ T(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \\ T(x,0) = T_0(x) & \text{für } x \in \Omega \end{cases}$$

Sei $E(t) = \int_\Omega T(x,t)^2 dx$. Zeigen Sie, dass dann $E(t) \leq E(0)\exp(2ct)$ gilt.

Hinweis: Für den letzten Schritt ist es hilfreich zu zeigen, dass

$$\frac{\partial}{\partial t}F(t) \leq \alpha F(t) \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\exp(-\alpha t)F(t)\right) \leq 0.$$

Aufgabe 3 (5 Punkte):



Auf $\Omega := \left\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,; 0 < r < 1 \text{ und } 0 < \varphi < \frac{4}{3}\pi\right\}$ sei $U : \Omega \to \mathbb{R}$ durch Polarkoordinaten folgendermaßen definiert:

$$U(r\cos\varphi, r\sin\varphi) := u(r,\varphi) := \left(r^{\frac{3}{4}} - r^{-\frac{3}{4}}\right)\sin(\tfrac{3}{4}\varphi)$$

(a) Zeigen Sie, dass U in Ω die Differentialgleichung $-\Delta U = 0$ erfüllt:

(b) Zeigen Sie folgendes Randverhalten:

$$\lim_{r\uparrow 1} u(r,\varphi) = 0 \qquad \text{für } \varphi \in \left(0, \tfrac{4}{3}\pi\right)$$
$$\lim_{\varphi\downarrow 0} u(r,\varphi) = \lim_{\varphi\uparrow\frac{4}{3}\pi} u(r,\varphi) = 0 \qquad \text{für } r \in (0,1)$$

(c) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass harmonische Funktionen eine Mittelwerteigenschaft besitzen. Daraus folgt, dass eine nicht-konstante harmonische Funktion ihre Extrema nur auf dem Rand des Gebietes annehmen kann. Wie verhält dies sich mit U?

Aufgabe 4 (5 Punkte): Die partielle Differentialgleichung für eine Minimalfläche ist

$$\nabla . \left(\frac{\nabla u\,(x,y)}{\sqrt{1+|\nabla u\,(x.y)|^2}} \right) = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Gleichung für radialsymmetrische Funktionen zur folgenden Gleichung wird:

$$\partial_r \left(\frac{U_r(r)}{\sqrt{1+|U_r\,(r)|^2}} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{U_r(r)}{\sqrt{1+|U_r\,(r)|^2}} \right) = 0.$$

(b) Sei $h > 0$. Berechnen Sie wenn möglich eine radialsymmetrische Lösung für

$$\begin{cases} \nabla . \left(\frac{\nabla u(x,y)}{\sqrt{1+|\nabla u(x.y)|^2}} \right) = 0 & \text{für } 1 < x^2+y^2 < 4 \\ u\,(x,y) = 0 & \text{für } x^2+y^2 = 1, \\ u\,(x,y) = h & \text{für } x^2+y^2 = 4. \end{cases}$$

(c) Welchen Wert darf h maximal annehmen, damit eine radialsymmetrische Lösung $(x,y) \mapsto u\,(x,y)$ existiert?

Aufgabe 5 (5 Punkte):

(a) Zeigen Sie, dass $v(t,x) = t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ für $x \in \mathbb{R}^3$ und $t > 0$ eine Lösung ist von

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) v = 0.$$

(b) Berechnen Sie $\lim_{t \downarrow 0} v(t,x)$ wo dies möglich ist.

(c) Zeigen Sie, dass v sich zu einer $C^2((\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)) \setminus \{\vec{0}, 0\})$-Funktion erweitern lässt.