Prof. Guido Sweers | **Partielle Differentialgleichungen** | SoSe 2016

Jan M. Krämer | **Blatt 4**

Aufgabe 1: Wir betrachten

$$2u_x - 3u_y = 4x \text{ auf } [0,1]^2.$$

Wählen Sie aus

(a) $u(0,y) = y$

(b) $u(1,y) = 1 + y$

(c) $u(x,0) = x$

(d) $u(x,1) = 1 + x$

Randbedingungen so aus, dass sie eine eindeutige Lösung auf $[0,1]^2$ bekommen.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Gegeben sei $u_x + xu_y = 1$ und $u(x,0) = x$.

(a) Wo ist die Transversalitätsbedingung nicht erfüllt?

(b) Berechnen Sie eine Lösung auf einem größtmöglichen Gebiet.

(c) Skizzieren Sie das Gebiet mit den Charakteristiken. Geben Sie deutlich die Ränder des Gebiets an.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Wir betrachten

$$\begin{cases} yu_x(x,y) - xu_y(x,y) = u(x,y), \\ u(0,y) = y \text{ für } y \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie eine lokale Lösung von (1).

(b) Bestimmen Sie das maximale Gebiet in $\mathbb{R}^2$, auf dem eine Lösung von (1) erweitert werden kann.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Randwertprobleme

a) $\begin{cases} u_x(x,y) + 2u_y(x,y) = x^2, \\ u(1,y) = y \text{ für } y \in \mathbb{R}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} xu_x(x,y) + yu_y(x,y) = 1, \\ u(x,y) = y \text{ für } x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$

auf einem größtmöglichen Gebiet.

Aufgabe 5 (5 Punkte): Wir betrachten das Problem

$$u_x + u_y = -u \text{ für } x, y > 0,$$
$$u(x,0) = 0 \text{ für } x > 0,$$
$$u(0,y) = 1 \text{ für } y \geq 0.$$

(a) Skizzieren Sie die Charakteristiken.

(b) Berechnen Sie die Lösung entlang der Charakteristiken.

(c) Skizzieren Sie den Graph von $u(x,1)$.

(d) Ist dies eine C^1-Lösung auf $\mathbb{R}^2$?

Aufgabe 6: Berechnen Sie

$$\int_{x^2+y^2<1} \Delta \left((e^{1-x^2-y^2} - 1) \sin(x) \right) dx.$$

Hinweis: Satz von Gauß.