Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

Partielle Differentialgleichungen
Blatt 5

SoSe 2016

Aufgabe 1: Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} x^2 u_x + y^2 u_y = u^2, \\ u(x, 2x) = x^2 \text{ für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(a) Gilt die Transversalitätsbedingung?

(b) Skizzieren Sie die Kurve, auf der die Randwerte festgelegt sind, und die beiden charakteristischen Kurven, die in $(1, 2)$ und $(2, 4)$ beginnen.

(c) Finden Sie eine Lösung $(x, y) \mapsto u(x, y)$.

(d) Ist diese Lösung für alle x und y definiert?

Aufgabe 2 (4 Punkte): Sei $p \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Gleichung

$$x u_x + y u_y = pu \text{ für } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Sei $p = 4$. Berechnen Sie eine explizite Lösung, für die $u(x, y) = 1$ auf dem Kreis

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 = 1\} \text{ gilt.}$$

Bestimmen Sie das größtmögliche Gebiet Ω, auf dem eine C^1-Lösung existiert.

(b) Finden Sie für $p = 2$ zwei Lösungen, für die $u(x, 0) = x^2$ gilt für $x > 0$.

Warum gibt es hier keine eindeutige Lösung?

Aufgabe 3 (4 Punkte): Lösen Sie die Gleichung

$$u u_x + u_y = 1$$

unter der Bedingung, dass $u(x, x) = \frac{1}{2}x$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (8 Punkte): Wir betrachten die physikalisch relevante Lösung von

$$u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) = 0$$

zu den Anfangswerten

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ 1 & \text{für } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie eine physikalisch sinnvolle Lösung auf $\mathbb{R} \times [0,2)$.

Hinweis: Damit ist gemeint, dass sowohl die Entropiebedingung, als auch die Rankine-Hugoniot-Bedingung erfüllt ist.

(b) Fertigen Sie eine Skizze der Charakteristiken an und geben Sie an, welchen Wert u entlang der Charakteristiken hat.

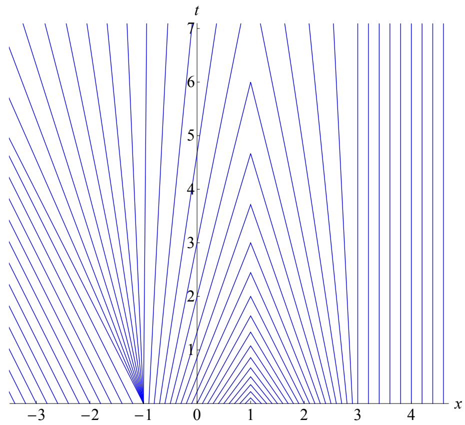
(c*) Bestimmen Sie eine physikalisch sinnvolle Lösung auf $\mathbb{R} \times [2,\infty)$.

Aufgabe 5 (4 Punkte): In der Skizze sehen Sie eine Lösung des Problems

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ für } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie $u_0(x)$.

(b) Skizzieren Sie die Unstetigkeitskurve.



Aufgabe 6: Sei u eine zweimal stetig differenzierbare Lösung der Gleichung

$$4u_{xx} - u_{yy} = 1$$

auf dem dargestellten Gebiet. Legen Sie Randbedingungen und Ränder derart fest, dass das Problem eine eindeutige Lösung hat.