Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

**Partielle Differentialgleichungen**
**Blatt 5**

SoSe 2016

**Aufgabe 1. (10 Punkte)** In Proposition 5.3 vom Skript findet man, wie man eine Lösung von

$$\begin{cases} u_{yy}(x,y) - u_{xx}(x,y) = f(x,y) & \text{für } x \in (0,L) \text{ und } y > 0, \\ u(0,y) = u_\ell(y) & \text{für } y > 0, \\ u(L,y) = u_r(y) & \text{für } y > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in [0,L], \\ u_y(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in [0,L], \end{cases}$$

(re)konstruieren kann. Dies geschieht in abzählbar vielen Schritte auf Teilgebiete, die im Bild dargestellt sind:

(a) Zeigen Sie, dass man auf $\{(x,y)\,; 0 < y \leq \min(x, L-x)\}$ die Lösung findet mittels $u(x,y) = U(y+x, y-x)$, wobei die Funktion $U(s,t)$ mit $s \in [0,L]$ eine Lösung ist von

$$\begin{cases} U_t(s,t) = V(s,t) & \text{für } t \in [-s,0] \\ U(s,-s) = u_0(s), \end{cases}$$

und $V(s,t)$ mit $t \in [-L,0]$ eine Lösung ist von

$$\begin{cases} V_s(s,t) = \frac{1}{4} f\left(\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t, \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t\right) & \text{für } s \in [-t,L], \\ V(-t,t) = \frac{1}{2}v_0(-t) - \frac{1}{2}u_0'(-t), \end{cases}.$$

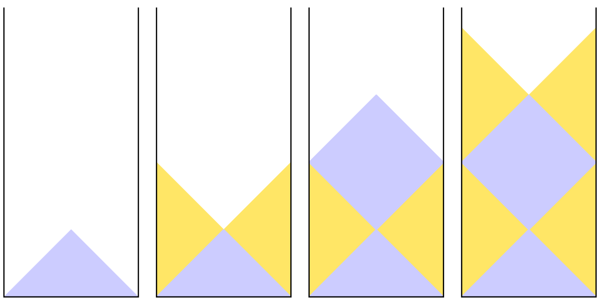
(b) Beschreiben Sie, wie man die Lösung anschließend findet auf

$$\{(x,y)\,; 0 < x < y \leq L-x\} \text{ und } \{(x,y)\,; L-x < y \leq x < L\}.$$

(c) Beschreiben Sie, wie man die Lösung anschließend findet auf

$$\{(x,y)\,; \max(x, L-x) < y \leq \min(x+L, 2L-x)\}.$$

(d) Welche Kompatibilitätsbedingungen erfüllen $u_\ell$, $u_0$, $v_0$ und $f$ für $(x,y) = (0,0)$, wenn $u$ eine $C^2([0,L] \times [0,\infty))$-Lösung ist.



**Aufgabe 2.** Bestimmen Sie eine Lösung für

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = \sin(x+2t) & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ u(x,0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

und lassen Sie diese von einem Computeralgebrasystem zeichnen.

**Aufgabe 3. (10 Punkte)** Sei $n > 2$. Zeigen Sie, dass eine klassische Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B_1(0) \subset \mathbb{R}^n \\ u = \varphi & \text{auf } \partial B_1(0) \end{cases}$$

die folgende Eigenschaft hat: Für $x \in B_1(0)$ gilt

$$u(x) = \int_{B_1(0)} G(x,y) f(y) dy - \int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y) \varphi(y) d\sigma_y$$

mit $\omega_n = \int_{B_1(0)} 1 dy$ und

$$G(x,y) = \frac{1}{(n-2)n\omega_n} \left( \left\| x \, \|y\| - \tfrac{y}{\|y\|} \right\|^{2-n} - \|x-y\|^{2-n} \right).$$