Prof. Guido Sweers | **Partielle Differentialgleichungen** | SoSe 2016
Jan M. Krämer | **Blatt 7**

Aufgabe 1 (5 Punkte): Bestimmen Sie die Bereiche, wo die Differentialgleichung

$$(1-x^2)u_{xx} + (1-y^2)u_{yy} = f \text{ mit } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch ist.

Aufgabe 2: (a) Zu welchem Typ gehört die folgende partielle Differentialgleichung?

$$u_{xx} + 3u_{yy} - 2u_x + 24u_y + 5u = f.$$

(b) Zeigen Sie, dass man durch $u(x,y) = v(x,y)e^{\alpha x + \beta y}$ und neue Koordinaten diese Gleichung vereinfachen kann zu

$$w_{ss} + w_{tt} + cw = \tilde{f}.$$

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass man jede Gleichung

$$(a\partial_x^2 + 2b\partial_x\partial_y + c\partial_y^2)u = f \text{ mit } ac > b^2$$

mittels einer Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mit } M \in \mathrm{GL}(2)$$

auf die Form $\Delta U = F$ bringen kann.

Hinweis: Man benutzt, dass man die Koeffizientenmatrix auf Diagonalform bringen kann und skaliert dann die Eigenwerte auf 1.

Aufgabe 4 (5 Punkte): (a) Beweisen Sie Lemma 5.10 Teil 1:

Für
$$L(\xi,\eta) = a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 + d\xi + e\eta + f, \quad (a,b,c) \neq (0,0,0)$$
gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ derart, dass $\{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ L(\xi,\eta) = \lambda\}$ eine Ellipse ist, genau dann, wenn $b^2 < ac$ ist.

(b) Zu welcher Klasse gehört folgende Dgl?

$$u_{xy} + u_{yt} + u_{xt} = f$$

(c) Zu welcher Klasse gehört folgende Dgl?

$$u_{xx} - u_{yy} + u_t = f$$

Aufgabe 5 (5 Punkte): Für jedes $x \in (0,1)$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\,\pi} \sin\left((2k+1)\,\pi x\right) = 1.$$

(a) Ist diese Konvergenz gleichmäßig auf $\mathbb{R}$?

Es sei

$$c_{k,\ell} = \frac{16}{(2k+1)\,(2\ell+1)\,\pi^4} \left(\frac{1}{(2k+1)^2 + \frac{1}{4}\,(2\ell+1)^2} \right)$$

und

$$u_{n,m}\,(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{m} c_{k,\ell} \sin\left((2k+1)\,\pi x\right) \sin\left(\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \pi y\right).$$

(b) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{|(n,m)|\to\infty} u_{n,m}$ auf $\mathbb{R}^2$ konvergiert.

(c) Ist diese Konvergenz auf $\mathbb{R}^2$ gleichmäßig?

(d) Zeigen Sie, dass für $\Omega = (0,1) \times (0,2)$ gilt

$$\begin{cases} \lim\limits_{n,m\to\infty} \Delta u_{n,m} = -1 & \text{in } \Omega, \\ \lim\limits_{n,m\to\infty} u_{n,m} = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Bemerkung: Könnte man also zeigen, dass man oben Limes und Ableitungen vertauschen kann, wäre $u := \lim_{m,n\to\infty} u_{m,n}$ Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Aufgabe 6 (5 Punkte): Die Folge $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ heißt eine Cauchy-Folge in $\mathscr{D}$, wenn

- Es ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ gibt derart, dass $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset K$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und
- Für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $N > 0$ derart, dass für $n, m > N$ gilt $\|D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi_m\|_\infty < \varepsilon$.

Beweisen oder widerlegen Sie: Jede Cauchy-Folge in $\mathscr{D}$ konvergiert in $\mathscr{D}$.