Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

Partielle Differentialgleichungen
Blatt 8

SoSe 2016

Aufgabe 1 (5 Punkte): Sei $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $v(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

(a) Berechnen Sie $-v'' + v$ als Distribution.

(b) Welche gewöhnliche Differentialgleichung erfüllt

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x-y)\varphi(y)dy \text{ für } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})?$$

Aufgabe 2 (5 Punkte): Betrachten Sie die Funktionen

$$u_1(x,t) = \max\left(t^2 - x^2, 0\right) \text{ und } u_2(x,t) = \max\left(t - |x|, 0\right).$$

(a) Ist u_1 bzw. u_2 eine distributionelle Lösung der Wellengleichung $u_{tt} - u_{xx} = 0$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$?

(b) Ergänzen Sie die Anfangsbedingungen:

$u_1(x,0) =$ .... $\qquad u_2(x,0) =$ ....

$\frac{\partial}{\partial t}u_1(x,0) =$ .... $\qquad \frac{\partial}{\partial t}u_2(x,0) =$ ....

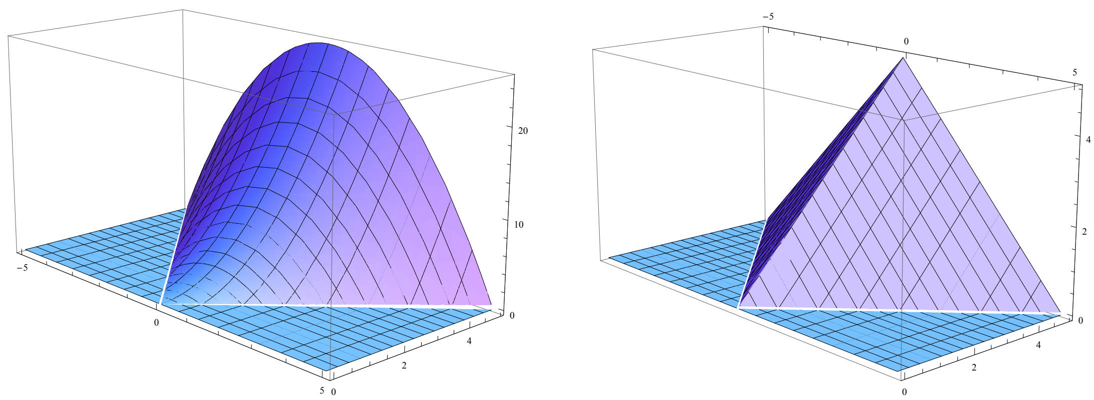

Abbildung 1: Skizze der beiden Funktionen

Aufgabe 3: Finden Sie eine Funktion $f \in L^1_{lok}(\mathbb{R}^2)$ derart, dass

$$F_f(\varphi) := \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x)\varphi(x)dx$$

so ist, dass im Sinne von Distributionen gilt: $-\Delta F_f = \delta \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^2)$.

Aufgabe 4: Wir nehmen $u_0, v_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Sei u die Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Die kinetische Energie, beziehungsweise potentielle Energie, am Zeitpunkt t sind definiert durch

$$K(t) = \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{2} \left(u_t(x,t)^2\right) dx \text{ und } P(t) = \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{2} \left(u_x(x,t)^2\right) dx.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\frac{\partial}{\partial t}(K(t)+P(t)) = 0$ ist. Das heißt, die Gesamtenergie ist konstant.

(b) Sei $\operatorname{supp}(u_0) \cup \operatorname{supp}(v_0) \subset [-a,a]$. Zeigen Sie, dass $K(t) = P(t)$ für alle $t > a$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $u_t(x,t) = \pm u_x(x,t)$ für $t > a$.

Aufgabe 5 (5 Punkte): Sei $v : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

(a) Zeigen Sie: Für $t > 0$ und $g(t) = \int_{\|x\|<t+1} v(x,t)dx$ gilt

$$g'(t) = \int_{\|x\|=t+1} v(x,t)d\sigma_x + \int_{\|x\|<t+1} v_t(x,t)dx.$$

(b) Zeigen Sie, dass aus $v(x,t) = 0$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ mit $\|x\| = t+1$ folgt, dass

$$\begin{pmatrix} \nabla v \\ v_t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x}{\|x\|} \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \text{ für } \|x\| = t+1.$$

Aufgabe 6 (5 Punkte): Sei $u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ eine klassische Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u - c^2 \Delta u = f & \text{für } \|x\| < t+1, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } \|x\| < 1, \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für } \|x\| < 1, \\ u(x,t) = 0 & \text{für } \|x\| = t+1. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Wir setzen

$$E(t) := \int_{\|x\|<t+1} \left(u_t^2(x,t) + c^2 \left|\nabla u(x,t)\right|^2\right) dx.$$

Zeigen Sie mit Aufgabe 5, dass im Fall $f = 0$ folgendes gilt:

$$E'(t) = \left(1 - c^2\right) \int_{\|x\|=t+1} u_t(x,t)^2 \, d\sigma_x.$$

(b) Zeigen Sie, dass (1) für $c > 1$ höchstens eine klassische Lösung hat.

(c) Geben Sie eine zusätzliche Randbedingung an, so dass man auch für $c < 1$ höchstens eine Lösung findet.

(d) Erklären Sie anhand der Ausbreitungskegel den Unterschied zwischen $c > 1$ und $c < 1$.