Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer
Carlos Reyes **SS 2016**

Partielle Differentialgleichungen
Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (5 Pkt.) Sei $U = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und betrachte

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 \Delta u(x,t) = f(x,t) & \text{für } x \in U \text{ und } t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in U, \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in U, \\ u_{x_1}(0,x_2,x_3,t) = 0 & \text{für } (x_2,x_3) \in \mathbb{R}^2 \text{ und } t > 0. \end{cases} \tag{1}$$

a. Setzen Sie f auf $(\mathbb{R}^3 \setminus U) \times [0,\infty)$ und u_0 und v_0 auf $\mathbb{R}^3 \setminus U$ derart fort, dass die Lösung $\tilde{u}$ der Wellengleichung auf $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$ mit diesen fortgesetzen Funktionen $\tilde{f}$, $\tilde{u}_0$ and $\tilde{v}_0$ anschließend, eingeschränkt als Funktion auf $\bar{U} \times [0,\infty)$, eine (distributionelle) Lösung von (1) ergibt.

b. Zeigen Sie, dass wenn $f \in C^2\left(\bar{U} \times [0,\infty)\right)$, $u_0, v_0 \in C^2(\bar{U})$ und

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,x_2,x_3,t) = \frac{\partial u_0}{\partial x_1}(0,x_2,x_3) = \frac{\partial v_0}{\partial x_1}(0,x_2,x_3) = 0 \text{ für alle } (x_2,x_3) \in \mathbb{R}^2 \text{ und } t \geq 0,$$

gilt, füer diese wie oben konstruierte Lösung folgt, dass $u \in C^2\left(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)\right)$.

Aufgabe 2 (5 Pkt.) Wir nehmen $u_0, v_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Sei u die Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Die kinetische Energie, beziehungsweise die potentielle Energie, am Zeitpunkt t ist definiert durch

$$K(t) = \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{2}\left(u_t(x,t)^2\right) dx \text{ und } P(t) = \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{2}\left(u_x(x,t)^2\right) dx.$$

Zeigen Sie:

a. $K(t) + P(t)$ ist konstant.
Hinweis: betrachte $\frac{\partial}{\partial t}\left(K(t) + P(t)\right)$.

b. Es gibt $t_0 \in \mathbb{R}^+$ mit $K(t) = P(t)$ für alle $t \geq t_0$.
Hinweis: Wenn $\operatorname{supp}(u_0) \cup \operatorname{supp}(v_0) \subset [-a,a]$ *liegt, dann gilt* $K(t) = P(t)$ *für* $t > a$.

Aufgabe 3 (5 Pkt.) Zeigen Sie, dass für $u_0, v_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ die Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, \\ u\,(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t\,(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

die folgende Abschätzung erfüllt:

$$|u(x,t)| \le \frac{C(u_0,v_0)}{t} \text{ für } (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+.$$

Aufgabe 4 (5 Pkt) Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} + u_t - u_{xx} = 0 & \text{auf } (0,\ell) \times \mathbb{R}^+, \\ u\,(x,0) = u_0\,(x) & \text{für } x \in [0,\ell]\,, \\ u_t\,(x,0) = v_0\,(x) & \text{für } x \in [0,\ell]\,, \\ u\,(0,t) = u\,(\ell,t) = 0 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

a. Zeigen Sie, dass für eine Lösung $u \in C^2\left([0,\ell] \times [0,\infty)\right)$ gilt:

$$\partial_t \int_{(0,\ell)} \left(u_t\,(x,t)^2 + u_x\,(x,t)^2\right) dx \le 0.$$

b. Zeigen Sie, dass dieses Randwertproblem in $C^2\left([0,\ell] \times [0,\infty)\right)$ höchstens eine Lösung hat.

Aufgabe 5 Ein schwingender Balken, der an seinen Enden eingeklemmt ist, kann man beschreiben durch das folgende Randwertproblem mit $d, \ell > 0$:

$$\begin{cases} u_{tt} + d^2 u_{xxxx} = 0 & \text{auf } (0,\ell) \times \mathbb{R}^+, \\ u\,(x,0) = u_0\,(x) & \text{für } x \in [0,\ell]\,, \\ u_t\,(x,0) = v_0\,(x) & \text{für } x \in [0,\ell]\,, \\ u\,(0,t) = u\,(\ell,t) = 0 & \text{für } t > 0, \\ u_x\,(0,t) = u_x\,(\ell,t) = 0 & \text{für } t > 0. \end{cases} \tag{2}$$

a. Zeigen Sie, dass dieses Randwertproblem in $C^4\left([0,\ell] \times [0,\infty)\right)$ höchstens eine Lösung hat.

b. Gilt dies auch, wenn man die letzte Zeile in (2) weglässt?

c. Und wenn man die letzte Zeile ersetzt durch $u_{xx}\,(0,t) = u_{xx}\,(\ell,t) = 0$ für $t > 0$?