Name: Aufgabe 1

Sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ die Einheitskreisscheibe und sei $u : B_1(0) \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

1. Wie definiert man eine schwache (partielle) Ableitung von u?
2. Geben Sie eine solche Funktion u an, die nicht differenzierbar ist auf $B_1(0)$, jedoch schwache Ableitungen hat auf $B_1(0)$. Begründen Sie dies.

Name: Aufgabe 2

Beweisen Sie diese Behauptung:

Die Funktion $u : \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $u(x,y) = 1 - y^2$ ist die einzige Lösung in $C^2(\overline{B_1(0)})$ des folgenden Randwertproblems:

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = 2 & \text{für } (x,y) \in B_1(0)\,, \\ u(x,y) = x^2 & \text{für } (x,y) \in \partial B_1(0). \end{cases}$$

Name: Aufgabe 3

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u\ u_x + e^x u_y + u^2 = 0 & \textit{für}\ \ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u\,(x,0) = \frac{1}{1+x^2} & \textit{für}\ \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Berechnen Sie eine Lösung in Parameterform:

$$x = X\,(t,s)\,, \quad y = Y\,(t,s)\,, \ u = U\,(t,s)\,.$$

Name: Aufgabe 4

1. Welche charakteristischen Kurven hat die folgende partielle Differentialgleichung?

$$u_{xx}\,(x,y) + 2u_{xy}\,(x,y) - 3u_{yy}\,(x,y) = 0 \tag{1}$$

2. Seien $\varphi, \psi \in C^2\,(\mathbb{R})$. Für welche Konstanten ist $u\,(x,y) = c_1\varphi\,(x + c_2 y) + c_3\psi\,(x + c_4 y)$ Lösung von (1)?

3. Sei $u_0 \in C\,(\mathbb{R})$. Geben Sie eine Lösungformel für

$$\begin{cases} u_{xx}\,(x,y) + 2u_{xy}\,(x,y) - 3u_{yy}\,(x,y) = 0 & \text{für}\ \ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u\,(x,0) = u_0\,(x) & \text{für}\ x \in \mathbb{R}, \\ u_y\,(x,0) = 0 & \text{für}\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

NAME: AUFGABE 5

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$u_{xx} + 2au_{xy} + bu_{yy} = f. \tag{2}$$

Welche der folgenden Behauptungen implizieren, dass diese Differentialgleichung elliptisch ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

i. Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + 2axy + by^2 = 1\}$ beschreibt eine Ellipse.

ii. Es gilt $b > 0$.

iii. Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & b \end{pmatrix}$ ist positiv definit.

iv. Die Eigenwerte der Eigenvektoren von $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & b \end{pmatrix}$ sind alle positiv.

v. Es existiert eine invertierbare lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ derart, dass gilt

$$(2) \;\Leftrightarrow\; \Delta (u \circ A) = f \circ A.$$

NAME: AUFGABE 6

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^\infty$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta_x u(x,t) + u(x,t) = f(x,t) & \text{für } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial\nu} u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

höchstens eine Lösung $u \in C^2\left(\overline{\Omega} \times [0, \infty)\right)$ hat. Hier ist ν der auswärtige Normalenvektor.

Name:

Aufgabe 7

Wir betrachten Distributionen in $\mathbb{R}^3$.

1. Wie ist δ_0, die Dirac-Distribution in 0, definiert?
2. Sei $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$. Wie definiert man $-\Delta f$?
3. Sei $f(x) = |x|^{-1}$ für $x \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass $-\Delta f = 4\pi\delta_0$ im Sinne von Distributionen.

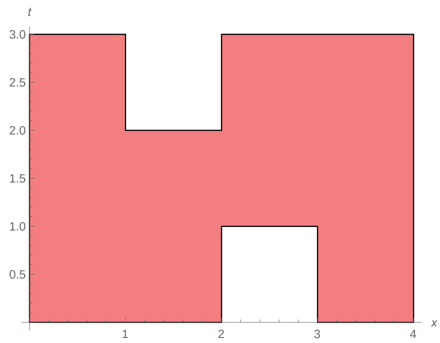
Name:

Aufgabe 8

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u_t - u_{xx} = 0 \text{ für } (x,t) \in A.$$

Eine Skizze des Gebietes A steht rechts.



1. Geben Sie an, auf welchem Teil des Randes man Randbedingungen festlegen sollte für die eindeutige Existenz einer klassischen Lösung.
2. Sei $u \in C(\overline{A}) \cap C^2(A)$ eine beliebige Lösung dieser Differentialgleichung. Bestimmen Sie die kleinstmögliche Menge $\Gamma_A \subset \overline{A}$ für die gilt:

$$\max_{(x,t)\in\overline{A}} u(x,t) = \max_{(x,t)\in\Gamma_A} u(x,t).$$