

Notizen zur Vorlesung

# Partielle Differentialgleichungen



G. Sweers

Sommersemester 2016



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Wiederholung und Anfang</b>	<b>1</b>
1.1	Differentialgleichungen und klassische Lösungen . . . . .	1
1.2	Stetigkeit und Differenzierbarkeit . . . . .	3
1.2.1	Stetigkeit . . . . .	3
1.2.2	Räume stetiger und differenzierbarer Funktionen . . . . .	3
1.2.3	Vollständigkeit bei $C(\bar{\Omega})$ . . . . .	4
1.3	Intermezzo zu glatten Rändern . . . . .	7
1.4	Integration in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	10
1.5	Integration über einen Rand . . . . .	11
1.5.1	Kurvenlänge . . . . .	11
1.5.2	Flächeninhalt . . . . .	11
1.5.3	Randintegrale . . . . .	13
1.6	Partielle Integration in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	14
1.7	Integrale und Transformationen . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Lösungen bei partiellen Differentialgleichungen</b>	<b>19</b>
2.1	Lineare und nicht-lineare Differentialgleichungen . . . . .	19
2.2	Klassische Lösungen . . . . .	20
2.3	Nicht-klassische Lösungen . . . . .	20
2.3.1	Schwache Ableitungen . . . . .	20
2.3.2	Schwache und distributionelle Lösungen . . . . .	23
2.4	Kriterien von Hadamard . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Modelle und erste Ergebnisse</b>	<b>29</b>
3.1	Transportgleichung . . . . .	29
3.2	Wärmeleitungsgleichung . . . . .	30
3.2.1	Einfache Ergebnisse für die Wärmeleitungsgleichung auf beschränkte Gebiete . . . . .	32
3.3	Die Laplace Gleichung . . . . .	33
3.3.1	Ein Ergebnis für harmonische Funktionen . . . . .	34
3.4	Die schwingende Saite . . . . .	36
3.5	Die Wellengleichung . . . . .	37
3.6	Die Membran . . . . .	38
3.7	Der schwingende Balken . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Erster Ordnung: Transportgleichungen</b>	<b>43</b>
4.1	Lineare und semilineare Transportgleichungen . . . . .	43
4.1.1	Mit konstanten Koeffizienten . . . . .	43
4.1.2	Allgemeine (semi)lineare Transportgleichungen . . . . .	45
4.2	Quasilineare Transportgleichungen . . . . .	48

4.2.1	Stoßwellen . . . . .	50
4.2.2	Verdünnungswellen . . . . .	53
4.3	Übersicht . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Klassifizierung zweiter Ordnung</b>	<b>57</b>
5.1	Die einfachsten Fälle als Begründung . . . . .	57
5.1.1	Das Symbol . . . . .	57
5.1.2	Zerlegung des Symbols in Linearterme . . . . .	58
5.2	Standardbeispiele zu diesen Fällen . . . . .	59
5.2.1	Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 - \partial_y^2$ . . . . .	59
5.2.2	Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 + \partial_y^2$ . . . . .	62
5.2.3	Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 - \partial_y$ . . . . .	65
5.2.4	Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 + \partial_y$ . . . . .	68
5.2.5	Welche Randbedingungen passen? . . . . .	69
5.3	Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . .	70
5.3.1	In zwei Dimensionen . . . . .	70
5.3.2	In höheren Dimensionen . . . . .	71
5.3.3	Bei variablen Koeffizienten . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Die Wellengleichung</b>	<b>75</b>
6.1	Die Wellengleichung in Raumdimension 1 . . . . .	75
6.2	Die 1d-Wellengleichung auf einem Intervall . . . . .	78
<b>7</b>	<b>Intermezzo zu Distributionen</b>	<b>81</b>
7.1	Testfunktionen . . . . .	81
7.2	Distributionen . . . . .	83
7.3	Distributionen und Differentialgleichungen . . . . .	86
<b>8</b>	<b>Die Wellengleichung in mehr Dimensionen</b>	<b>89</b>
8.1	Kirchhoff für Raumdimension 3 . . . . .	89
8.2	Ergebnisse für beliebige Dimensionen . . . . .	93
8.3	Poisson für Raumdimension 2 . . . . .	96
8.4	Raumdimensionen 4 und höher . . . . .	98
8.5	Gebiete mit Rand . . . . .	100
<b>9</b>	<b>Die Wärmeleitungsgleichung I</b>	<b>101</b>
9.1	Diffusionskern . . . . .	101
9.2	Mittelwert und Maximum . . . . .	107
9.3	Maximumprinzip und Eindeutigkeit . . . . .	109
<b>10</b>	<b>Die Wärmeleitungsgleichung II</b>	<b>113</b>
10.1	Eindeutigkeit unter einer Wachstumsbedingung . . . . .	113
10.2	Eindeutigkeit mit Hilfe der Energiefunktion . . . . .	114
10.3	Regularität . . . . .	116
10.4	Technisches Intermezzo . . . . .	118
10.5	Existenz auf beschränkten Gebieten . . . . .	119
10.6	Zwei Gegenbeispiele . . . . .	124

<b>11 Die Laplace- und Poisson-Gleichungen</b>	<b>127</b>
11.1 Fundamentallösung . . . . .	127
11.2 Randwertprobleme . . . . .	131
11.2.1 Die Methode von Perron . . . . .	132
11.2.2 Mit Hilfe des Darstellungssatzes von Riesz . . . . .	133
11.2.3 Durch Variationsrechnung . . . . .	136
11.2.4 Ein Beispiel . . . . .	137
<b>12 Ordnung und Existenz bei Laplace</b>	<b>141</b>
12.1 Greensche Funktionen auf Halbraum und Kugel . . . . .	141
12.2 Greensche Funktionen auf beliebigen Gebieten . . . . .	143
12.3 Tricks für Greensche Funktionen auf speziellen Gebieten . . . . .	146
12.4 Folgen der Greenschen Funktion auf der Kugel . . . . .	149
12.4.1 Das starke Maximum-Prinzip . . . . .	150
12.4.2 Harmonisch auf Kugeln . . . . .	152
<b>13 Existenz nach Perron</b>	<b>155</b>
13.1 Das Theorem von Perron . . . . .	155
13.2 Minimum und Infimum bei superharmonisch . . . . .	156
13.3 Beweis mit Barrieren am Rand . . . . .	158
<b>14 Laplace und Regularität</b>	<b>161</b>
14.1 Bemerkungen zur Regularität . . . . .	161
14.2 Regularität und Fundamentallösung . . . . .	162
14.3 Regularität und Rand . . . . .	163
14.4 Lösungen und Abschätzungen . . . . .	166
<b>15 Semilineare Laplace-Gleichungen</b>	<b>169</b>
15.1 Ein erweitertes Maximum-Prinzip . . . . .	169
15.2 Existenz bei einer einfachen Perturbation . . . . .	172
15.3 Schwach harmonisch ist harmonisch . . . . .	173
15.4 Existenz zwischen Ober- und Unterlösung . . . . .	175
15.5 Variationelle Methoden . . . . .	179



# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 1



## Wiederholung und Anfang

### 1.1 Differentialgleichungen und klassische Lösungen

Eine partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung für eine Funktion, nennen wir sie  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , der Form

$$F(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x), \dots, \nabla^m u(x)) = 0 \text{ mit } x \in \Omega. \quad (1.1)$$

Hier ist  $\Omega$  ein *Gebiet*, das heißt, eine offene zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , und

$$\nabla^k u = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} u \right\}_{i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}}.$$

Für  $k = 1$  und  $k = 2$  schreibt man

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} u \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} u \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 u = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} u \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} u & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} u \end{pmatrix}.$$

Die höchste Ableitung, die in (1.1) erscheint, nennt man die *Ordnung der Differentialgleichung*.

Oft hat eine Variable eine besondere Rolle, nämlich diejenige die in dem Model die Zeit darstellen soll, und diese wird üblicherweise mit  $t$  notiert. Für die Ableitung verwendet man neben  $\frac{\partial}{\partial t}$  auch  $\partial_t$ . Auch verwendet man manchmal den Multiindex<sup>1</sup> und schreibt  $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$ ,  $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$  oder  $\partial_x^\alpha$ .

Die Frage, ob und wenn ja, welche Lösungen eine solche Differentialgleichung hat, lässt sich meistens nur sinnvoll beantworten, wenn passende Rand- oder Anfangswerte gegeben werden. Ein Theorem wie das von Picard-Lindelöf für Anfangswertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, gibt es nicht allgemein für partiellen Differentialgleichungen. In einer Vorlesung partielle Differentialgleichungen wird man dann auch nicht versuchen,

<sup>1</sup>Wir haben hier die *Multiindex*-Notation verwendet:  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  bedeutet  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  und man setzt

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Man schreibt außerdem  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ .

die Theorie für alles zu bringen, sondern man wird sich mit den Typen, die in den Anwendungen auftauchen, beschäftigen. Wir werden dann auch, bevor wir näher auf die verschiedenen Typen eingehen, im nächsten Kapitel erst einige dieser Anwendungen vorstellen.

Bevor wir mit einigen Modellen anfangen, sollte man etwas sagen zum Begriff „Lösung“.

**Definition 1.1** Man nennt eine Funktion  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine klassische Lösung von der Differentialgleichung  $m$ -ter Ordnung in (1.1), wenn folgendes gilt:

- $u \in C^m(\Omega)$ , das heißt alle Ableitungen bis Ordnung  $m$  existieren und sind stetig auf  $\Omega$ , und
- $u$  erfüllt die Gleichung (1.1) für alle  $x \in \Omega$ .

**Bemerkung 1.1.1** Soll die Lösung zusätzlich Randbedingungen erfüllen, dann reicht die Menge  $C^m(\Omega)$  nicht. Um Randwerte zu betrachten wird Stetigkeit oder sogar Differenzierbarkeit bis auf dem Rand notwendig sein. Mehr dazu findet man in dem nächsten Abschnitt.

**Beispiel 1.2** Betrachten wir das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2\right) u(x_1, x_2) = 1 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 < 1, \\ u(x_1, x_2) = 0 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 = 1. \end{cases}$$

Man kann direkt nachrechnen, dass

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(1 - x_1^2 - x_2^2) \quad (1.2)$$

eine Lösung ist. Ist diese Funktion  $u$  die einzige Lösung?

Eine Skizze zu der Funktion in (1.2) findet man links in Abbildung 1.1.

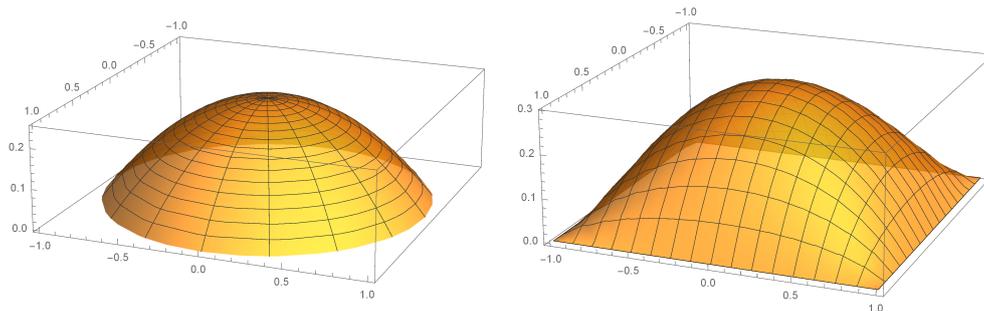


Abbildung 1.1: Skizzen der Lösungen aus Beispiele 1.2 und 1.3.

**Beispiel 1.3** Betrachten wir das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2\right) u(x_1, x_2) = 1 & \text{für } \max\{|x_1|, |x_2|\} < 1, \\ u(x_1, x_2) = 0 & \text{für } \max\{|x_1|, |x_2|\} = 1. \end{cases}$$

Das Gebiet ist nun ein Quadrat und eine explizite Lösung ist nicht so einfach anzugeben, wenn überhaupt. Trotzdem kann man zeigen, dass es genau eine Lösung gibt. Eine Skizze zu der Lösung findet man rechts in Abbildung 1.1.

## 1.2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

### 1.2.1 Stetigkeit

Wie war es auch schon wieder mit gleichmäßig und gleichgradig?

- Eine Funktion  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stetig in  $x \in A$ , wenn:

*Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es  $\delta_{\varepsilon,x} > 0$  derart, dass*

$$\text{für alle } y \in A \text{ mit } |x - y| < \delta_{\varepsilon,x} \text{ gilt } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

- Eine Funktion  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stetig auf  $A$ , wenn sie stetig ist in jedes  $x \in A$ .
- Eine Funktion  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  heißt gleichmäßig stetig auf  $A$ , wenn:

*Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es  $\delta_\varepsilon > 0$  derart, dass*

$$\text{für alle } x, y \in A \text{ mit } |x - y| < \delta_\varepsilon \text{ gilt } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Wenn  $A$  kompakt ist, dann ist jede stetige Funktion auf  $A$  gleichmäßig stetig. Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist. Beschränkt bedeutet: es gibt  $M \in \mathbb{R}^+$  mit  $A \subset \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq M\}$ .

- Sei  $A$  kompakt. Dann nennt man eine Familie von Funktionen  $\mathcal{F} = \{f_i : A \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in I}$  gleichgradig stetig, wenn

*Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es  $\delta_\varepsilon > 0$  derart, dass*

$$\text{für alle } f_i \in \mathcal{F} \text{ und für alle } x, y \in A \text{ mit } |x - y| < \delta_\varepsilon \text{ gilt } |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon.$$

### 1.2.2 Räume stetiger und differenzierbarer Funktionen

Wir wiederholen die Definitionen von  $C^m(\Omega)$  und die einiger verwandter Funktionenräume.

**Definition 1.4** Sei  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^n$ .  $C^m(\Omega)$  ist der Vektorraum aller Funktionen  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , die  $m$ -mal differenzierbar sind und alle zugehörigen Ableitungen, das heißt alle Ableitungen von Ordnung kleiner gleich  $m$ , sind stetig.

**Bemerkung 1.4.1** Man definiert  $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\Omega)$ .

Wenn  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$   $m$ -mal differenzierbar ist, sagt man auch  $u \in C^m(\Omega)$ . Nur wenn man explizit zeigen möchte, dass man Funktionen mit Werten in  $\mathbb{R}^k$  hat, wird  $C^m(\Omega; \mathbb{R}^k)$  geschrieben.

Auch begegnet man  $C^m(\bar{\Omega})$ . Die Definitionen dieser Räume sind etwas weniger geradeaus.

**Definition 1.5** Sei  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^n$ .

1. Man definiert  $C^0(\bar{\Omega}) = C(\bar{\Omega})$  als den Vektorraum aller stetigen Funktionen  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ .

2. Für  $m \geq 1$  wird  $C^m(\bar{\Omega})$  iterativ definiert als der Vektorraum aller stetigen Funktionen  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  mit:

- $u|_{\Omega} \in C^m(\Omega)$ , ( $u|_{\Omega}$  ist die Einschränkung von  $u$  auf  $\Omega$ ) und
- es gibt  $g_1, \dots, g_n \in C^{m-1}(\bar{\Omega})$  mit  $g_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} u(x)$  für  $x \in \Omega$ .

**Bemerkung 1.5.1** Durch diese Definition haben wir das Problem vom Differenzieren am Rande vermieden. Im Nachhinein, wenn  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  gilt, schreiben wir wieder  $\frac{\partial}{\partial x_i} u(x) := g_i(x)$  auf  $\bar{\Omega}$ . Ähnliches machen wir mit höheren Ableitungen.

Wenn  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt ist, ist  $\bar{\Omega}$  kompakt und für  $u \in C^0(\bar{\Omega})$  existiert  $\sup_{x \in \Omega} |u(x)|$ . Für beschränkte Gebiete  $\Omega$  und  $u \in C^m(\bar{\Omega})$  ist  $\|\cdot\|_{C^m(\bar{\Omega})}$  durch

$$\|u\|_{C^m(\bar{\Omega})} = \sum_{k=0}^m \sup_{x \in \Omega} |\nabla^k u(x)|, \quad (1.3)$$

also wohldefiniert. So ist  $(C^m(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^m(\bar{\Omega})})$  ein normierter Vektorraum.

**Bemerkung 1.5.2** Wenn klar ist, welches Gebiet gemeint ist, schreibt man auch

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \|u\|_{\infty}.$$

Übrigens ist  $\|\cdot\|_{\infty}$  auch eine Norm für den Raum  $L^{\infty}(\Omega)$  der beschränkten Funktionen auf  $\Omega$ .

**Bemerkung 1.5.3** Auf nicht abgeschlossenen oder unbeschränkten Gebieten gibt es unbeschränkte stetige Funktionen. So wie  $C^m(\Omega)$  hier definiert ist, kann man (1.3) also nicht als Norm für  $C^m(\Omega)$  verwenden. Das gleiche trifft zu für  $C^m(\bar{\Omega})$  mit  $\Omega$  unbeschränkt.

### 1.2.3 Vollständigkeit bei $C(\bar{\Omega})$

**Theorem 1.6 (Arzelà-Ascoli)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und sei  $\{f_n \in C(\bar{\Omega})\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine gleichmäßig beschränkte, gleichgradig stetige Folge von Funktionen. Dann gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

**Bemerkung 1.6.1** Die Folge  $\{f_n \in C(\bar{\Omega})\}_{n \in \mathbb{N}}$  heißt gleichmäßig beschränkt, wenn es  $M \in \mathbb{R}^+$  gibt mit

$$|f_n(x)| \leq M \text{ für alle } x \in \Omega \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

**Proposition 1.7** Sei  $m \in \mathbb{N}$  und sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet. Dann ist  $(C^m(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^m(\bar{\Omega})})$  ein Banachraum.

**Bemerkung 1.7.1** Ein normierter Vektorraum heißt Banachraum, wenn jede Cauchy-Folge<sup>2</sup> konvergent ist.

<sup>2</sup>Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum.  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V$  ist eine Cauchy-Folge, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} : k, \ell > m \implies \|u_k - u_{\ell}\| < \varepsilon.$$

**Beweis.** Wir betrachten vorerst den Fall  $m = 0$ . Sei  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $(C^0(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^0(\bar{\Omega})})$ . Dann gilt:

1. Der Grenzwert  $\tilde{u}(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x)$  existiert für jedes  $x \in \bar{\Omega}$ , denn  $\{u_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{R}$  ist vollständig.
2. Gleichmäßige Konvergenz: Sei  $N_\varepsilon > 0$  derart, dass  $\|u_k - u_\ell\|_\infty < \frac{1}{2}\varepsilon$  für  $k, \ell > N_\varepsilon$ . Für jedes  $x$  gibt es  $N_{x,\varepsilon}$  derart, dass  $|u_\ell(x) - \tilde{u}(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$  für  $\ell > N_{x,\varepsilon}$ . Man nehme nun  $\ell_x = \max(N_{x,\varepsilon}, N_\varepsilon) + 1$  und finde

$$|u_k(x) - \tilde{u}(x)| \leq |u_k(x) - u_{\ell_x}(x)| + |u_{\ell_x}(x) - \tilde{u}(x)| < \varepsilon.$$

Weil dies für beliebiges  $x$  gilt, folgt  $k \geq N_\varepsilon$  impliziert  $\|u_k - \tilde{u}\|_\infty < \varepsilon$ . Also konvergiert  $\{u_k\}$  nicht nur punktweise, sondern sogar gleichmäßig nach  $\tilde{u}$ .

3. Der Limes  $\tilde{u}$  ist stetig: Sei  $\varepsilon > 0$ , nehme  $k$  genügend groß, so dass  $\|\tilde{u} - u_k\|_\infty < \frac{1}{3}\varepsilon$  und nehme  $\delta_{\varepsilon,k} > 0$  derart, dass  $|x - y| < \delta_{\varepsilon,k}$  impliziert  $|u_k(x) - u_k(y)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ . Es folgt

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq |\tilde{u}(x) - u_k(x)| + |u_k(x) - u_k(y)| + |u_k(y) - \tilde{u}(y)| < \varepsilon.$$

Es gibt also  $\tilde{u} \in C^0(\bar{\Omega})$  derart, dass  $\|u_k - \tilde{u}\|_\infty \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Die Aussage für  $m = 0$  ist bewiesen.

Sei nun  $m \geq 1$  und  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $(C^m(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^m(\bar{\Omega})})$ . Aus dem ersten Teil dieses Beweises wissen wir, dass es für jede Ableitung  $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha$  mit  $|\alpha| \leq m$  eine stetige Funktion  $g_\alpha \in C^0(\bar{\Omega})$  gibt mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u_k - g_\alpha \right\|_{C^0(\bar{\Omega})} = 0.$$

Sei nun  $a \in \Omega$  und nehme  $h > 0$  derart, dass  $[a - he_i, a + he_i] \subset \Omega$ . Weil

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} u_k - g_i \right\|_{C^0(\bar{\Omega})} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - g_0\|_{C^0(\bar{\Omega})} = 0,$$

gilt, folgt gleichmäßig für  $t \in [-h, h]$ , dass

$$u_k(a + te_i) - u_k(a) \rightarrow g_0(a + te_i) - g_0(a) \quad \text{und} \\ u_k(a + te_i) - u_k(a) = \int_{[a, a+te_i]} \frac{\partial}{\partial x_i} u_k(x) dx_i \rightarrow \int_{[a, a+te_i]} g_i(x) dx_i.$$

Also gilt

$$g_0(a + te_i) = g_0(a) + \int_{[a, a+te_i]} g_i(x) dx_i \quad \text{für } t \in [-h, h].$$

Man findet, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g_0(a) = \left( \frac{\partial}{\partial t} g_0(a + te_i) \right)_{|t=0} = g_i(a).$$

Ähnliches gilt für jede Ableitung und die Kombination ergibt  $g_\alpha = (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha \tilde{u}$ , dass heißt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - \tilde{u}\|_{C^m(\bar{\Omega})} = 0,$$

oder anders gesagt,  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  ist eine konvergente Folge in  $C^m(\bar{\Omega})$ . ■

**Bemerkung 1.7.2** Man begegnet auch  $C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})$  mit  $m \in \mathbb{N}$  und  $\gamma \in (0, 1]$ :

$$C^{m,\gamma}(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C^m(\bar{\Omega}); \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u \right]_\gamma < \infty \text{ für } |\alpha| = m \right\},$$

wobei  $[\cdot]_\gamma$  eine Seminorm ist, definiert durch

$$[u]_\gamma = \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma}.$$

Man nennt  $C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$  mit  $\gamma \in (0, 1)$  die zum Exponenten  $\gamma$  Hölder<sup>3</sup>-stetige Funktionen.

Die Vektorräume  $C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})$  werden Hölder-Räume genannt. Die Norm für diese Räume wird wie folgt definiert:

$$\|u\|_{C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^m(\bar{\Omega})} + \sup_{|\alpha|=m} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u \right]_\gamma.$$

Im Fall, dass  $m = 0$  und  $\gamma = 1$ , also  $C^{0,1}(\bar{\Omega})$ , bekommt man die Lipschitz<sup>4</sup>-stetigen Funktionen auf  $\bar{\Omega}$ .

Schlußendlich gibt es noch einige Funktionenmengen, die sich mit besonderem Verhalten am Rand beschäftigen.

**Definition 1.8** Man definiert  $C_0^m(\bar{\Omega})$  als die Teilmenge von  $C^m(\bar{\Omega})$  der Funktionen  $u$  mit  $\nabla^k u(x) = 0$  für  $x \in \partial\Omega$  und  $k \leq m$ .

**Bemerkung 1.8.1** Sei  $\Omega$  beschränkt. Dann ist  $C_0^m(\bar{\Omega})$ , als eine abgeschlossene Teilmenge von  $C^m(\bar{\Omega})$ , bezüglich der  $\|\cdot\|_{C^m(\bar{\Omega})}$ -Norm ein Banachraum.

**Definition 1.9** Man definiert  $C_0^\infty(\Omega)$  als die Teilmenge der Funktionen  $u \in C^\infty(\Omega)$  mit kompaktem Träger<sup>5</sup> innerhalb von  $\Omega$ .

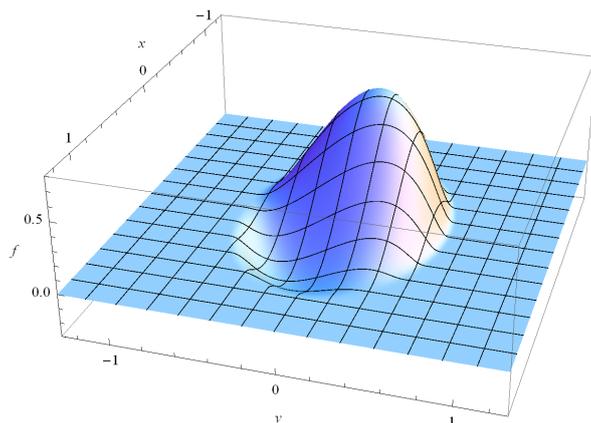


Abbildung 1.2: Darstellung der Funktion aus Beispiel 1.10.

<sup>3</sup>Otto Ludwig Hölder, Stuttgart 1859 - Leipzig 1937

<sup>4</sup>Rudolf Otto Sigismund Lipschitz, Bönkein 1832 - Bonn 1905

<sup>5</sup>Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  und  $u \in C(A)$ . Der Träger von  $u$  ist die abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  definiert durch:

$$\text{support}(u) = \overline{\{x \in A; u(x) \neq 0\}}.$$

**Beispiel 1.10** Man kann sich fragen, ob die Menge  $C_0^\infty(\Omega)$  nicht leer ist. Hier ist ein Beispiel einer solchen Funktion. Die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} (1 + x^2 + 2x - 3y) \exp\left(\frac{-1}{1-x^2-2y^2}\right) & \text{für } x^2 + 2y^2 < 1, \\ 0 & \text{für } x^2 + 2y^2 \geq 1, \end{cases}$$

hat einen kompakten Träger, ist beliebig oft stetig differenzierbar und liegt also in  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Dass sie beliebig oft differenzierbar ist, findet man mit den Standardableitungsregeln, wenn  $x^2 + 2y^2 \neq 1$ . Weil  $\lim_{t \rightarrow -\infty} t^n e^t = 0$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , folgt  $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = 0$  für  $x^2 + 2y^2 = 1$ . Durch Induktion findet man, dass

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x) = 0 \text{ für } x^2 + 2y^2 = 1$$

und dass die Ableitungen  $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f$  alle stetig sind.

Gelegentlich findet man auch  $C_c^m(\bar{\Omega})$  und  $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ . Mit  $C_c^m(\bar{\Omega})$  meint man die Teilmenge der Funktionen  $u \in C^m(\bar{\Omega})$ , beziehungsweise  $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ , mit kompaktem Träger.

### 1.3 Intermezzo zu glatten Rändern

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen hat man neben dieser Differentialgleichung oft Anfangs- oder Randwerte, aber die sollen nur an einigen Punkten erfüllt sein. Bei partiellen Differentialgleichungen in  $n$  Dimensionen werden Anfangs- oder Randwertbedingungen typischerweise auf  $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten definiert. Häufig hat man zu tun mit Gebieten, die Ecken oder Kanten haben. Solche Gebiete sorgen für spezifische Probleme, die kaum in einer Anfängervorlesung angesprochen werden können.

**Beispiel 1.11** Wir definieren die Funktion  $u_\alpha$  für  $\alpha \in (0, 2\pi)$  mit Hilfe von Polarkoordinaten  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$

$$u_\alpha(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) \text{ für } r \in [0, 1] \text{ und } \varphi \in [0, \alpha].$$

Der Differentialoperator  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$  in Polarkoordinaten wird  $\Delta = \frac{1}{r} \partial_r r \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2$  und es folgt

$$\begin{aligned} (\Delta u_\alpha)(r \cos \varphi, r \sin \varphi) &= \\ &= \left(\frac{1}{r} \partial_r r \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2\right) r^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) = \\ &= \frac{1}{r} \partial_r \frac{\pi}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) + \frac{\pi}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}-2} \partial_\varphi^2 \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) = \\ &= \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 r^{\frac{\pi}{\alpha}-2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) - \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 r^{\frac{\pi}{\alpha}-2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) = 0. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} u_\alpha(\cos \varphi, \sin \varphi) &= \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right), \\ u_\alpha(x, 0) &= u_\alpha(r \cos \alpha, r \sin \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Wir haben eine Lösung vom Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u_\alpha = 0 & \text{in } \Omega_\alpha, \\ u_\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\varphi\right) & \text{auf } \partial\Omega_\alpha. \end{cases}$$

Hier ist  $\Omega_\alpha = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi); 0 < r < 1 \text{ und } 0 < \varphi < \alpha\}$  und  $\partial\Omega_\alpha$  der Rand des Gebietes.

Trotz der Tatsache, dass der Sinus eine unendlich oft differenzierbare Funktion ist, ist die Lösung nicht unbedingt differenzierbar. Die Differenzierbarkeit in 0 hängt ab von der Öffnung  $\alpha$ :

$$(\partial_r u_\alpha)(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) = \frac{\pi}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\varphi\right)$$

und nur für  $\alpha \leq \pi$  existiert  $(\partial_v u_\alpha)(0)$ , wenn  $v = (\cos(\frac{1}{2}\alpha), \sin(\frac{1}{2}\alpha))$ .

Skizzen zu diesen Funktionen  $u_\alpha$  findet man in Abbildung 1.3.

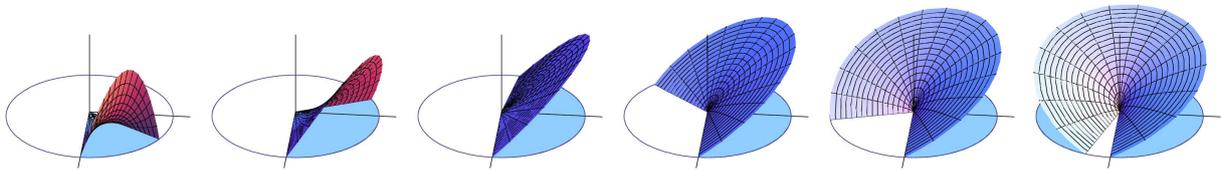


Abbildung 1.3: Funktionen  $u_\alpha$  mit  $\alpha = 1, 2, \dots, 6$ .

Das Beispiel zeigt, dass in den Ecken des Gebietes eine Lösung nicht unbedingt differenzierbar sein muss. Es bedeutet auch, dass man um Ergebnisse genau formulieren zu können, die Regularität des Randes genau klassifizieren soll.

Für den Rand des Gebietes  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  schreibt man  $\partial\Omega$ . Dieser Rand ist definiert durch

$$\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gilt } B_\varepsilon(x) \cap \Omega \neq \emptyset \text{ und } B_\varepsilon(x) \cap \Omega^c \neq \emptyset\}.$$

**Definition 1.12** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet. Man sagt  $\partial\Omega \in C^m$ , wenn es endlich viele (lokale) kartesische Koordinatensysteme  $\{y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_n^{(i)}\}_{i=1}^M$  und Funktionen  $\psi^{(i)} \in C^m(\mathbb{R}^{n-1})$  hat derart, dass es

- offene Blöcke  $B^{(i)} = \{y \in \mathbb{R}^n; a_k^{(i)} < y_k^{(i)} < b_k^{(i)} \text{ mit } 1 \leq k \leq n\}$  mit  $1 \leq i \leq M$  gibt, die  $\partial\Omega$  überdecken, und
- $\Omega \cap B^{(i)} = \{y_n^{(i)} > \psi^{(i)}(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_{n-1}^{(i)}); y \in B^{(i)}\} \cap B^{(i)}$ .

**Bemerkung 1.12.1** Wenn  $\Omega$  unbeschränkt ist, soll dies gelten mit lokal endlich vielen offenen Blöcken. Das heißt, es darf abzählbar unendlich viele Blöcke geben ( $M = \infty$ ), jedoch soll man auf jedem Kompaktum nur endlich viele verwenden müssen.

Die Blöcke können also rotiert sein bezüglich der Standardbasis. Man nimmt sie offen, damit diese Blöcke sich notwendigerweise überlappen müssen und sich keine Singularitäten bei der Verknüpfung verstecken können. Aus der zweiten Bedingung folgt außerdem, dass das Gebiet  $\Omega$  mit  $\partial\Omega \in C^0$  lokal immer an einer Seite des Randes liegt. Ein typisches Bild findet man in Abbildung 1.4.

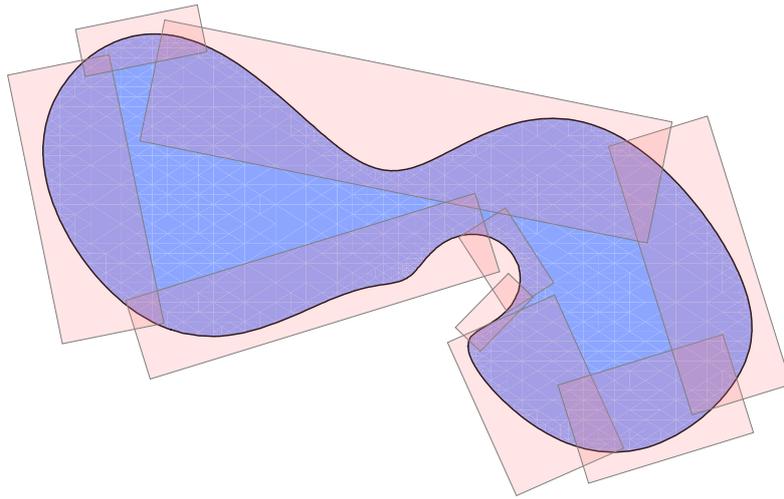


Abbildung 1.4: Mit Hilfe von lokalen Koordinaten auf Blöcke  $B^{(i)}$  und Funktionen  $\psi^{(i)}$  wird die Regularität von  $\partial\Omega$  definiert.

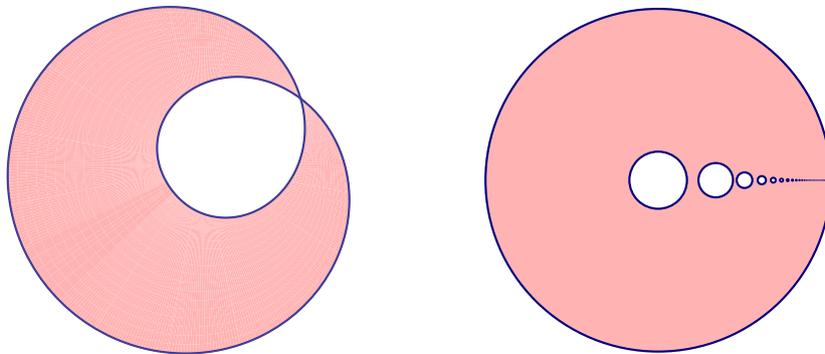


Abbildung 1.5: Zwei Gebiete, die nicht unsere  $C^0$ -Bedingung erfüllen. Beim „Doppelspitz“ links liegt  $\Omega$  nicht an einer Seite vom Rand. Rechts reichen nicht endlich viele Blöcke.

**Beispiel 1.13** Für einen (Hyper)Kubus  $\Omega = (0, 1)^n$  in  $\mathbb{R}^n$  mit  $n \geq 2$  gilt  $\partial\Omega \in C^{0,1}$ .

**Beispiel 1.14** Für eine (Hyper)Kugel  $\Omega = B_1(0)$  in  $\mathbb{R}^n$  mit  $n \geq 2$  gilt  $\partial\Omega \in C^\infty$ . Man braucht mindestens  $n + 1$  Blöcke  $B^{(i)}$ .

**Beispiel 1.15** Nicht jedes Gebiet hat ein  $C^0$ -Rand. Siehe Abbildung 1.5.

Noch etwas müßte man festlegen. Wenn man eine Funktion hat, die nur auf dem Rand definiert ist, wann kann man eine solche Funktion differenzierbar nennen?

**Definition 1.16** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^k$  und sei  $m \leq k$ . Sei  $\{\psi^{(i)}\}$  eine Menge endlich vieler Funktionen wie in Definition 1.12. Dann nennt man  $u \in C^m(\partial\Omega)$ , wenn

$$\left(y_1^{(i)}, \dots, y_{n-1}^{(i)}\right) \mapsto u\left(y_1^{(i)}, \dots, y_{n-1}^{(i)}, \psi^{(i)}\left(y_1^{(i)}, \dots, y_{n-1}^{(i)}\right)\right) \in C^m,$$

für jedes dieser  $\psi^{(i)}$ .

**Bemerkung 1.16.1** Man kann zeigen, dass diese Definition nicht abhängt von den gewählten Parametrisierungen  $\{\psi^{(i)}\}$ .

**Bemerkung 1.16.2** Die Definition wird angepasst, wenn man  $u$  nur auf einen Teil des Randes  $\Gamma \subset \partial\Omega$  als  $C^m(\Gamma)$  beschreiben möchte..

## 1.4 Integration in $\mathbb{R}^n$

Wenn  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet ist und  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, dann sollte man seit der Vorlesung Analysis 2 wissen wie

$$\int_{\Omega} u(x) dx$$

definiert ist. Spätestens weiss man nach dem Satz von Fubini-Tonelli, dass man ein solches Integral vor dem Berechnen als wiederholtes Integral schreiben kann, jedenfalls, wenn man  $\Omega$  schön zerlegen kann. Schön heißt hier zum Beispiel, dass man die Menge wie folgt schreiben kann:

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \begin{aligned} &X_{1,u} < x_1 < X_{1,o}, \\ &X_{2,u}(x_1) < x_2 < X_{2,o}(x_1), \\ &X_{3,u}(x_1, x_2) < x_3 < X_{3,o}(x_1, x_2), \\ &\dots \\ &X_{n,u}(x_1, \dots, x_{n-1}) < x_n < X_{n,o}(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{aligned} \right\},$$

für irgendwelche genügend nette Funktionen  $X_{i,u}, X_{i,o}$ .

Mit dem Satz von Fubini-Tonelli folgt

$$\int_{\Omega} u(x) dx = \int_{X_{1,u}}^{X_{1,o}} \int_{X_{2,u}(x_1)}^{X_{2,o}(x_1)} \dots \int_{X_{n,u}(x_1, \dots, x_{n-1})}^{X_{n,o}(x_1, \dots, x_{n-1})} u(x) dx_n \dots dx_1.$$

Ob man ein solches Integral tatsächlich explizit berechnen kann, ist jedoch wieder eine ganz andere Frage.

**Beispiel 1.17** *Gefragt wird*

$$\int_{x_1^2 + x_2^2 < 2} x_1^2 e^{-x_2} dx.$$

*Das Gebiet kann man wie folgt umschreiben:*

$$\{x \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 < 2\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2; -\sqrt{2} < x_1 < \sqrt{2} \text{ und } -\sqrt{2-x_1^2} < x_2 < \sqrt{2-x_1^2} \right\}.$$

*Fubini-Tonelli ergibt*

$$\begin{aligned} \int_{x_1^2 + x_2^2 < 2} x_1^2 e^{-x_2} dx &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x_1^2}}^{\sqrt{2-x_1^2}} x_1^2 e^{-x_2} dx_2 dx_1 \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x_1^2 \left[ -e^{-x_2} \right]_{-\sqrt{2-x_1^2}}^{\sqrt{2-x_1^2}} dx_1 \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x_1^2 \left( -e^{-\sqrt{2-x_1^2}} + e^{\sqrt{2-x_1^2}} \right) dx_1 \end{aligned}$$

*und dann hört der Spaß auf.*

## 1.5 Integration über einen Rand

In der Analysis Vorlesung lernt man

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx.$$

Eine ähnliche Formel gibt es für mehrdimensionale Integrale. Bevor wir da etwas zu sagen können, folgt eine kurze Beschreibung zu Integralen über Mannigfaltigkeiten.

### 1.5.1 Kurvenlänge

Die Länge einer Geraden zwischen  $x$  und  $y$  in  $\mathbb{R}^n$  findet man mittels

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Wenn die Kurve  $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  in  $C^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$  ist, kann man deren Länge berechnen durch eine Approximation mit Polygonzügen:

$$\begin{aligned} \ell(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left\| k \left( a + \frac{i+1}{n} (b-a) \right) - k \left( a + \frac{i}{n} (b-a) \right) \right\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left\| k' \left( a + \frac{i+1}{n} (b-a) \right) \right\| \frac{b-a}{n} = \int_a^b |k'(t)| dt. \end{aligned}$$

Für eine Kurve, die parametrisiert wird durch  $x \mapsto (x, y(x))$  findet man

$$\ell(k) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

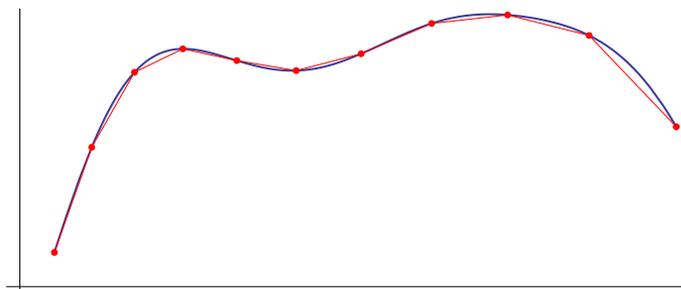


Abbildung 1.6: Bogenlänge wird approximiert mittels Polygonzug

### 1.5.2 Flächeninhalt

Den  $(n-1)$ -dimensionalen Flächeninhalt von dem Teil der Hyperfläche in  $\mathbb{R}^n$ , der beschrieben wird durch

$$F = \{\theta_1 v_1 + \theta_2 v_2 + \theta_3 v_3 + \cdots + \theta_{n-1} v_{n-1}; 0 \leq \theta_i \leq 1\}$$

mit  $v_i \in \mathbb{R}^n$ , kann man wie folgt finden. Man soll sich erinnern, dass das Volumen des Parallelepipeds  $P$  in  $\mathbb{R}^n$ , aufgespannt durch die Vektoren  $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, w\}$ , das heißt also

$$P = \{\theta_1 v_1 + \theta_2 v_2 + \cdots + \theta_{n-1} v_{n-1} + \theta_n w; 0 \leq \theta_i \leq 1\},$$

durch die Determinante gegeben wird:

$$\text{Vol}(P) = |\det(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, w)|.$$

Nehmen wir für  $w$  einen Normalenvektor bezüglich  $v_1, \dots, v_{n-1}$  so haben wir

$$\text{Flächeninhalt}(F) = \frac{\text{Vol}(P)}{\|w\|}.$$

Im Fall, dass

$$\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ z_3 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right\}$$

nehmen wir

$$w = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir finden direkt, dass  $w \perp v_i$ , und es folgt, dass

$$\begin{aligned} \text{Flächeninhalt}(F) &= \frac{|\det(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, w)|}{\|w\|} = \\ &= \frac{1 + z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}{\sqrt{1 + z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}} = \sqrt{1 + z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}. \end{aligned}$$

Wenn die  $(n-1)$ -dimensionale Oberfläche in  $\mathbb{R}^n$  parametrisiert wird durch

$$P : G \subset \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n$$

mit

$$P(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, p(x_1, \dots, x_{n-1})) \quad (1.4)$$

und es gilt  $p \in C^1(\bar{\Omega})$ , dann kann man auch hier approximieren mittels einer Verteilung von  $G$  in Hyperquadern  $\{Q_i^\varepsilon\}_{i=1}^{m_\varepsilon}$  mit Eckpunkten  $x^{\varepsilon,i}$  und einer Linearisierung  $\ell_i^\varepsilon$  von  $p$  auf diese Hyperquader:

$$\begin{aligned} \text{Flächeninhalt}(p(\Omega)) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_i^{m_\varepsilon} \text{Flächeninhalt}(\ell_i^\varepsilon(Q_i^\varepsilon)) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_i^{m_\varepsilon} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}(x^{\varepsilon,i})\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial p}{\partial x_{n-1}}(x^{\varepsilon,i})\right)^2} \\ &= \int_G \sqrt{1 + |\nabla p(x)|^2} dx. \end{aligned}$$

**Bemerkung 1.17.1** Für  $v_1, v_2, w \in \mathbb{R}^3$  gilt

$$\det(v_1, v_2, w) = (v_1 \times v_2) \cdot w.$$

Wenn  $w = \nu$  ein Normalenvektor zu  $v_1, v_2$  ist, folgt

$$\frac{|\det(v_1, v_2, \nu)|}{\|\nu\|} = \frac{|(v_1 \times v_2) \cdot \nu|}{\|\nu\|} = \|v_1 \times v_2\|$$

und man findet

$$\text{Flächeninhalt}(\{\theta_1 v_1 + \theta_2 v_2; 0 \leq \theta_i \leq 1\}) = \|v_1 \times v_2\|. \quad (1.5)$$

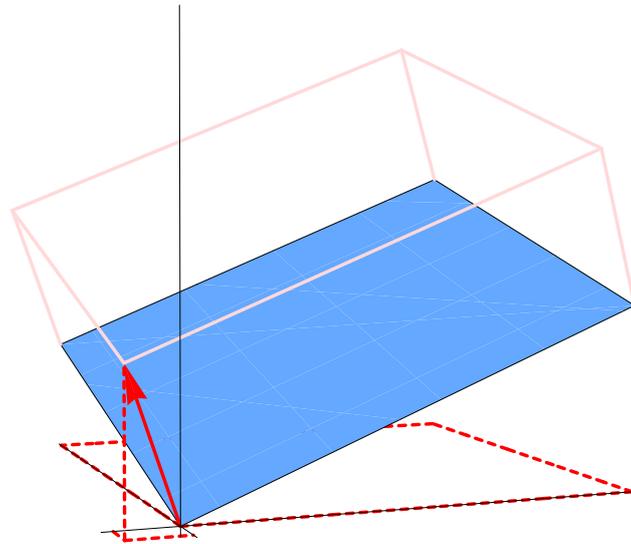


Abbildung 1.7: In drei Dimensionen die Fläche aus (1.5) und  $\nu = v_1 \times v_2$ .

### 1.5.3 Randintegrale

Für ein  $n$ -dimensionales Gebiet  $\Omega$ , bei dem man den Rand  $\partial\Omega$  in endlich viele Teile  $\{\Gamma_i\}_{i=1}^k$  auseinandernehmen kann, die einzeln, wie oben beschrieben, auf  $C^1$ -Art parametrisiert werden können, definiert man das Randintegral wie folgt.

**Definition 1.18** Sei  $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i$  mit  $\Gamma_i^\circ \cap \Gamma_j^\circ = \emptyset$  und nehme an  $\Gamma_i = P^i(G_i)$  mit  $P^i \in C^1(\overline{G_i})$  wie in (1.4). Dann setzt man

$$\int_{\partial\Omega} g(x) d\sigma_x := \sum_{i=1}^k \int_{G_i} g(P^i(y^i)) \sqrt{1 + |\nabla p_i(y^i)|^2} dy^i. \quad (1.6)$$

Das rechte Integral in (1.6) ist ein  $(n-1)$ -dimensionales Integral und  $y^i = (y_1^i, \dots, y_{n-1}^i)$  sind die Koordinaten in einem zu  $G_i$  passenden lokalen kartesischen Koordinatensystem mit  $x = P^i(y^i)$ . Man sollte zeigen, dass die Definition dieses Randintegrals unabhängig ist von der gewählten Zerlegung des Randes und der Parametrisierung dieser Teile. Ein solcher Beweis führt hier zu weit und wir verweisen auf die Analysis 3 Vorlesung. Mehr allgemeine Parametrisierungen und die Anwendung beim Integrieren finden Sie in Definition 1.24.

## 1.6 Partielle Integration in $\mathbb{R}^n$

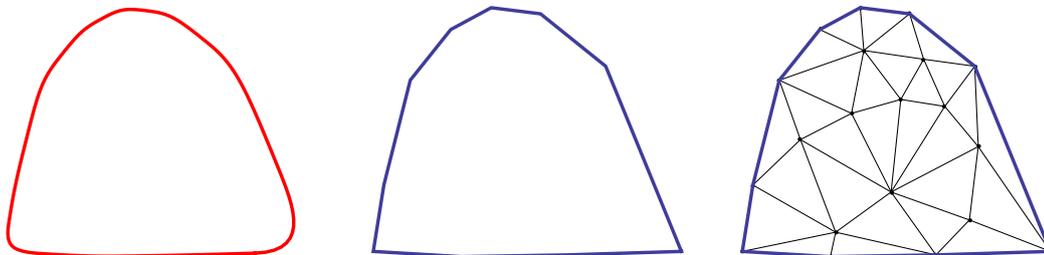
**Lemma 1.19** Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  mit  $C^1$  Rand  $\partial\Omega$ . Seien  $f, g \in C^1(\bar{\Omega})$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} g(x) dx = \int_{\partial\Omega} f(x) g(x) \nu_i d\sigma_x - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} dx.$$

Hier ist  $\nu_i$  die  $i$ -te Komponente des auswendig zeigenden Einheitsnormalenvektors  $\nu$  an der Stelle  $x \in \partial\Omega$ .

**Beweis.** Dieser Beweis wird in zwei Dimensionen skizziert. In höheren Dimensionen funktioniert es ähnlich.

1) Wir nehmen an, dass wir die Integrale über  $\partial\Omega$  und  $\Omega$  mit Integrale über einen oder mehreren Polygonzüge beziehungsweise über das Innere dieser Polygonzüge approximieren dürfen.



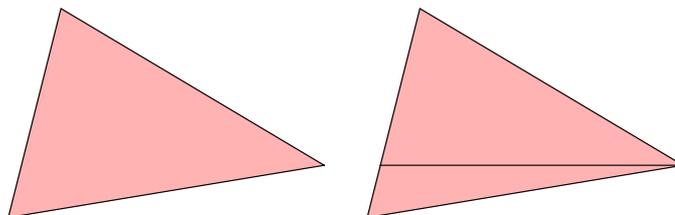
2) Das Innere eines Polygonzugs kann man auffüllen mit Dreiecke. Dann reicht es, um die Aussage zu beweisen für Dreiecken, denn für  $\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^m \bar{D}_k$ , mit  $D_k$  paarweise disjunkte offene Dreiecke, gilt

$$\int_{\Omega} h(x) dx = \sum_{k=1}^m \int_{D_k} h(x) dx \quad (1.7)$$

und

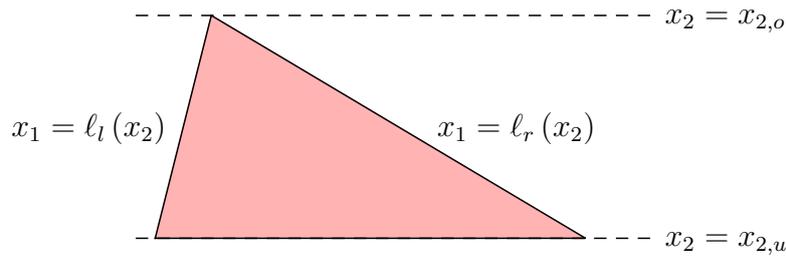
$$\int_{\partial\Omega} h(x) \nu_i d\sigma_x = \sum_{k=1}^m \int_{\partial D_k} h(x) \nu_i d\sigma_x. \quad (1.8)$$

Die Aussage in (1.7) folgt direkt; für die zweite muss man bemerken, dass alle innere Randintegrale gegeneinander wegfallen durch das gegengesetzte Vorzeichen von dem äußeren Normalenvektor  $\nu$ .



3) Jedes Dreieck, das nicht eine Seite parallel an der  $i$ -Achse hat, kann man in zwei Dreiecke zerlegen, die beide eine Seite parallel an der  $i$ -Achse haben. Einfacherheitshalbe nehmen wir an  $i = 1$ .

4) Sei  $D = \{(x, y); \ell_l(x_2) < x_1 < \ell_r(x_2) \text{ und } x_{2,u} < x_2 < x_{2,o}\}$  mit  $\ell_l$  und  $\ell_r$  zwei affine Abbildungen.



Mit Fubini-Tonelli finden wir

$$\begin{aligned}
 \int_D \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} g(x) dx &= \int_{x_2=x_{2,u}}^{x_2=x_{2,o}} \left( \int_{x_1=l_l(x_2)}^{l_r(x_2)} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} g(x) dx_1 \right) dx_2 \\
 &= \int_{x_2=x_{2,u}}^{x_2,x_{2,o}} \left( [f(x)g(x)]_{x_1=l_l(x_2)}^{x_1=l_r(x_2)} - \int_{x_1=l_l(x_2)}^{l_r(x_2)} f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \\
 &= \int_{x_2=x_{2,u}}^{x_2,o} (f(l_r(x_2), x_2) g(l_r(x_2), x_2) - f(l_l(x_2), x_2) g(l_l(x_2), x_2)) dx_2 \\
 &\quad - \int_D f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_1} dx \\
 &= \int_{\partial D} f(x) g(x) \nu_1 d\sigma_x - \int_D f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_1} dx.
 \end{aligned}$$

Man soll bemerken, dass folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
 \text{links:} & \quad \text{''}\nu_1 d\sigma_x = -dx_2\text{''}, \\
 \text{rechts:} & \quad \text{''}\nu_1 d\sigma_x = dx_2\text{''}, \\
 \text{unten:} & \quad \text{''}\nu_1 d\sigma_x = 0\text{''.}
 \end{aligned}$$

■

**Theorem 1.20 (Gauß)** Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  mit  $C^1$  Rand  $\partial\Omega$ . Seien  $F \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$  und  $g \in C^1(\bar{\Omega})$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot F)(x) g(x) dx = \int_{\partial\Omega} F(x) \cdot \nu g(x) d\sigma_x - \int_{\Omega} F(x) \cdot \nabla g(x) dx.$$

**Bemerkung 1.20.1** Hier ist  $\nabla \cdot F$  die Divergenz von  $F$  und  $\nabla g$  ist der Gradient von  $g$ :

$$(\nabla \cdot F)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k(x)}{\partial x_k} \text{ und } \nabla g(x) = \left( \frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \right).$$

**Beweis.** Man wende Lemma 1.19 an mit  $f = F_i$  für  $i = 1, \dots, n$  und addiere die Ergebnisse. ■

## 1.7 Integrale und Transformationen

Möchte man die Symmetrie eines Modells ausnutzen, dann kann es bequem sein, dass man die passenden Koordinaten verwendet. Zum Beispiel bei rotationssymmetrischen Problemen können Polar- und Kugelkoordinaten nützlich sein.

**Definition 1.21** 1. Polarkoordinaten:  $r > 0$  und  $\varphi \in [0, 2\pi)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = F(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

2. Zylinderkoordinaten:  $r > 0$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  und  $h \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = F(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ h \end{pmatrix}.$$

3. Kugelkoordinaten in 3D:  $r > 0$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  und  $\theta \in [0, \pi]$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = F(r, \varphi, h) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Möchte man ein Integral mit Hilfe dieser neuen Koordinaten berechnen, dann braucht man die folgende Transformationsregel.

**Theorem 1.22 (Transformationsatz)** Sei  $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega$  ein Diffeomorphismus und  $g$  eine integrierbare Funktion auf  $A$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} g(x) dx = \int_A (g \circ F)(y) |\det(\nabla F(y))| dy.$$

**Bemerkung 1.22.1** Hier gilt

$$\nabla F(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1(y)}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n(y)}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

Man nennt  $|\det(\nabla F(y))|$  die zu der Transformation  $F$  gehörenden Jacobi-Determinante.

Ein Beweis wird Ihnen in der Analysis 3 Vorlesung vorgeführt.

**Beispiel 1.23** Für  $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$  und  $A = \{(r, \varphi, \theta); r \in (0, 1), \varphi \in (0, 2\pi), \theta \in (0, \pi)\}$  finden wir

$$\begin{aligned} \det(\nabla F(r, \varphi, \theta)) &= \det \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= -r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\int_{B_1(0)} g(x) dx = \int_{r=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} (g \circ F)(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr.$$

Auch für Mannigfaltigkeiten gibt es einen Transformationsatz.

**Definition 1.24** Sei  $M$  Teil einer  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$ , die man mit der  $C^1$ -Funktion

$$F : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$$

eindeutig parametrisiert. Dann setzt man für  $g \in C(\bar{M})$ :

$$\int_M g(x) d\sigma_m(x) := \int_D (g \circ F)(y) \sqrt{\det \left( \left( \frac{\partial F}{\partial y_i}(y) \cdot \frac{\partial F}{\partial y_j}(y) \right)_{i,j} \right)} dy$$

**Bemerkung 1.24.1** 1.  $\left( \frac{\partial F}{\partial y_i}(y) \cdot \frac{\partial F}{\partial y_j}(y) \right)_{i,j}$  ist eine  $m \times m$ -Matrix mit an der Stelle  $i, j$  das  $\mathbb{R}^n$ -Skalarprodukt von den Vektoren  $\frac{\partial F}{\partial y_i}(y)$  und  $\frac{\partial F}{\partial y_j}(y)$ . Im Fall, dass  $m = n$ , finden wir

$$\begin{aligned} \sqrt{\det \left( \left( \frac{\partial F}{\partial y_i}(y) \cdot \frac{\partial F}{\partial y_j}(y) \right)_{i,j} \right)} &= \sqrt{\det \left( (\nabla F(y)) (\nabla F(y))^T \right)} \\ &= \sqrt{\det(\nabla F(y)) \det \left( (\nabla F(y))^T \right)} = |\det(\nabla F(y))| \end{aligned}$$

und es folgt das Ergebnis des Transformationssatzes.

2. Die Ergebnis der Definition ist unabhängig von der Parametrisierung  $F$ . Das ist nicht selbstverständlich, sondern sollte man beweisen.
3. Für Hyperflächen stimmt dieses Integral überein mit dem standard  $m$ -dimensionalen Integral, wenn man ein passendes kartesisches Koordinatensystem nimmt.

**Beispiel 1.25** Die Einheitssphäre in  $\mathbb{R}^3$  können wir parametrisieren durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = F(\varphi, \theta) := \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\alpha = \frac{\partial F}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \beta = \frac{\partial F}{\partial \theta}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \det \left( \left( \frac{\partial F}{\partial y_i}(y) \cdot \frac{\partial F}{\partial y_j}(y) \right)_{i,j} \right) &= \det \begin{pmatrix} \alpha \cdot \alpha & \alpha \cdot \beta \\ \beta \cdot \alpha & \beta \cdot \beta \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} (\sin \theta)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\sin \theta)^2. \end{aligned}$$

Für den Flächeninhalt finden wir

$$\int_M g(x) d\sigma_2(x) = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 \sqrt{(\sin \theta)^2} d\varphi d\theta = 4\pi.$$

**Beispiel 1.26** Für  $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$  kann man Koordinaten  $(r, \omega) \in [0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$  nehmen und man findet

$$\int_{B_R(0)} g(x) dx = \int_{r=0}^R \int_{\omega \in \mathbb{S}^{n-1}} g(r\omega) r^{n-1} d\omega dr.$$

Ist  $g$  radialsymmetrisch, i.e.  $g(x) = \tilde{g}(|x|)$  dann findet man

$$\int_{B_R(0)} g(x) dx = s_n \int_0^R \tilde{g}(r) r^{n-1} dr$$

mit  $s_n = \text{Flächeninhalt}(\mathbb{S}^{n-1})$ .

**Beispiel 1.27** Für  $\Omega = B_R(0) \setminus \overline{B_\varepsilon(0)} \subset \mathbb{R}^n$  und  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $v \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$  findet man mit Gauß

$$\int_{\Omega} u(x) (\nabla \cdot v)(x) dx = \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) \cdot \nu d\sigma_x - \int_{\Omega} (\nabla u)(x) \cdot v(x) dx.$$

Für das Randintegral gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) \cdot \nu d\sigma_x \\ &= \int_{\partial B_R(0)} u(x) v(x) \cdot \frac{x}{|x|} d\sigma_x - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x) v(x) \cdot \frac{x}{|x|} d\sigma_x \\ &= \int_{\omega \in \mathbb{S}^{n-1}} (R^{n-1} u(R\omega) v(R\omega) - \varepsilon^{n-1} u(\varepsilon\omega) v(\varepsilon\omega)) \cdot \omega d\omega. \end{aligned}$$

Wenn  $|u(x) v(x)| \leq C |x|^\alpha$  auf  $B_1(0)$  und  $\alpha > 1 - n$ , dann findet man

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left| \int_{\omega \in \mathbb{S}^{n-1}} \varepsilon^{n-1} u(\varepsilon\omega) v(\varepsilon\omega) \cdot \omega d\omega \right| \\ & \leq \int_{\omega \in \mathbb{S}^{n-1}} \varepsilon^{n-1} C |\varepsilon\omega|^\alpha d\omega \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} s_n C \varepsilon^{\alpha+n-1} = 0. \end{aligned}$$

# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 2



## Lösungen bei partiellen Differentialgleichungen

### 2.1 Lineare und nicht-lineare Differentialgleichungen

Wir nehmen an, dass die Differentialgleichungen in den folgenden Definitionen alle von Ordnung  $m$  sind.

**Definition 2.1** *Partielle Differentialgleichungen der Form*

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha(x) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u(x) = f(x) \quad (2.1)$$

mit  $a_\alpha$  und  $f$  gegeben und  $u$  gesucht, nennt man linear.

Diese Differentialgleichung heißt linear, weil der Differentialoperator

$$L = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha(x) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha$$

linear ist: Wenn  $Lu_1 = f_1$  und  $Lu_2 = f_2$ , dann gilt für beliebige  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , dass

$$L(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1f_1 + c_2f_2.$$

Die einfachste Änderung, die uns eine nicht-lineare Differentialgleichung liefert, ist die folgende:

**Definition 2.2** *Partielle Differentialgleichungen der Form*

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha(x) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u(x) = f(x, u) \quad (2.2)$$

mit  $a_\alpha$  und  $f$  gegeben und  $u$  gesucht, nennt man semilinear.

Es ist das Recht des Buchhalters, wenn er sagt, dass linear ja auch semilinear sei. Eine folgende Erweiterung ist:

**Definition 2.3** Partielle Differentialgleichungen der Form

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|=m}} a_\alpha(x, u, \nabla u, \dots, \nabla^{m-1} u) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u(x) = f(x, u, \nabla u, \dots, \nabla^{m-1} u) \quad (2.3)$$

mit  $a_\alpha$  und  $f$  gegeben und  $u$  gesucht, nennt man quasilinear.

Die restlichen partiellen Differentialgleichungen nennt man *völlig nichtlinear*.

## 2.2 Klassische Lösungen

Bevor wir die nicht-klassische Lösungen definieren, beschreiben wir, was eine klassische Lösung ist.

**Definition 2.4** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und betrachte die partielle Differentialgleichung von Ordnung  $m$ :

$$f(x, u, \nabla u, \dots, \nabla^m u) = 0 \quad (2.4)$$

Eine Funktion  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt eine klassische Lösung von (2.4), wenn  $u \in C^m(\Omega)$  gilt und die Gleichung in (2.4) für alle  $x \in \Omega$  erfüllt ist.

## 2.3 Nicht-klassische Lösungen

### 2.3.1 Schwache Ableitungen

Für eine punktweise definierte Funktion ist die Definition einer partiellen Ableitung eindeutig. Gelegentlich wird man aber eine Definition brauchen für die Ableitung einer Funktion, die nur als Äquivalenzklasse festgelegt ist. Wir erinnern an die  $L^p(\Omega)$ -Räume.

**Definition 2.5** Sei  $p \in [1, \infty]$ . Dann ist  $L^p(\Omega)$  der Raum der Lebesgue-messbaren Funktionen  $f$ , für die gilt:  $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$  mit

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left( \int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p} & \text{für } p \in [1, \infty), \\ \text{ess sup } \{|f(x)|; x \in \Omega\} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

**Bemerkung 2.5.1** Wenn man „Lebesgue-messbar“ nicht kennt, dann lese man „integrierbar“.

**Bemerkung 2.5.2** Weil für  $u_1(x) = 0$  und

$$u_2(x) = \begin{cases} n & \text{für } x \in \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^+ \right\}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

gilt, dass  $\|u_1 - u_2\|_{L^1(0,1)} = 0$ , kann man in  $L^1(0,1)$  beide Funktionen nicht unterscheiden. Man sagt  $u_1 = u_2$  im  $L^1(0,1)$ -Sinn. Genaueres begegnet man in der Vorlesung Analysis 3.

**Definition 2.6** Sei  $f$  eine Lebesgue-messbare Funktion. Man sagt  $\partial_{x_i} f$  existiert als schwache Ableitung in  $L^1_{\text{lokal}}(\Omega)$ , wenn es  $g \in L^1_{\text{lokal}}(\Omega)$  gibt mit

$$\int_\Omega (f(x) \partial_{x_i} \varphi(x) + g(x) \varphi(x)) dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Wenn  $f$  auf  $\Omega$  eine stetige klassische Ableitung nach  $x_i$  hat, dann folgt aus einer partiellen Integration, dass

$$\int_{\Omega} (f(x) \partial_{x_i} \varphi(x) + \partial_{x_i} f(x) \varphi(x)) dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Also sind stetige klassische Ableitungen auch immer schwache Ableitungen. Und wenn auf eine offene Menge  $A \subset \Omega$  sowohl die klassische Ableitung als stetige Funktion, als auch die schwache Ableitung existieren, dann sind sie fast überall gleich auf  $A$ .

**Beispiel 2.7** Die Funktion  $f(x) = |x|$  hat  $g(x) = \text{sign}(x)$  als schwache Ableitung. Man definiert

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Sei  $\text{support}(\varphi) \subset [a, b]$  mit  $0 \in (a, b)$ . Dann gilt mit Hilfe der partiellen Integration, dass

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} (|x| \varphi'(x) + \text{sign}(x) \varphi(x)) dx \\ &= \int_a^0 (|x| \varphi'(x) + \text{sign}(x) \varphi(x)) dx + \int_0^b (|x| \varphi'(x) + \text{sign}(x) \varphi(x)) dx \\ &= \int_a^0 (-x \varphi'(x) - \varphi(x)) dx + \int_0^b (x \varphi'(x) + \varphi(x)) dx \\ &= [-x \varphi(x)]_a^0 + [x \varphi(x)]_0^b = a \varphi(a) + b \varphi(b) = 0, \end{aligned}$$

weil  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ .

**Beispiel 2.8** Die Funktion  $g(x) = \text{sign}(x)$  hat keine schwache Ableitung auf  $\mathbb{R}$ . Wenn  $h$  eine solche schwache Ableitung wäre, dann müßte sie außerhalb von 0 mit der klassischen Ableitung übereinstimmen in  $L^1$ -Sinne und dies bedeutet  $h(x) = g'(x) = 0$  fast überall. Es folgt für  $\varphi$  mit  $\text{support}(\varphi) \subset [a, b]$  und  $0 \in (a, b)$ , dass

$$0 = - \int_{\mathbb{R}} h(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \text{sign}(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^0 \varphi'(x) dx + \int_0^b \varphi'(x) dx = 2\varphi(0),$$

und dies ist ein Widerspruch, wenn man  $\varphi(0) \neq 0$  nimmt.

**Definition 2.9** Sei  $k \in \mathbb{N}$  und  $p \in [1, \infty]$ . Man definiert den Sobolev<sup>1</sup>-Raum  $W^{k,p}(\Omega)$  als die Menge (der Äquivalenzklassen) der Funktionen  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  derart, dass  $u$  und deren schwache Ableitungen der Ordnung  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq k$  in  $L^p(\Omega)$  liegen.

**Bemerkung 2.9.1**  $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)})$  mit Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} \left| \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u(x) \right|^p dx \right)^{1/p}$$

ist ein vollständiger Banach-Raum.

<sup>1</sup>Sergei Lwowitsch Sobolew, 1908-1989, war ein Russischer Mathematiker. Er arbeitete an Partiellen Differentialgleichungen, Funktionalanalysis, Numerischer Mathematik und ... Uranisotopenanreicherung.

**Beispiel 2.10** Das die Sache mit den schwachen Ableitungen nicht ganz trivial ist, zeigt die Cantor-Funktion. Diese monoton wachsende stetige Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  wird iterativ definiert durch am Anfang  $f_0(0) = 0$  und  $f_0(1) = 1$  zu setzen, and anschließend das dazwischenliegende Intervall zu dritteln und auf dem mittleren Intervall die Funktion den Durchschnittswert von beiden Randpunkten zu geben. Dieses Dritteln und Mittelwert setzen, wird wiederholt. Also

$$f_1(x) = \begin{cases} f_0(0) = 0 & \text{für } x = 0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ f_0(1) = 1 & \text{für } x = 1, \end{cases} \quad \text{und } f_2(x) = \begin{cases} f_1(0) = 0 & \text{für } x = 0, \\ \frac{1}{4} & \text{für } x \in [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}], \\ f_1(x) = \frac{1}{2} & \text{für } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ \frac{3}{4} & \text{für } x \in [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}], \\ f_1(1) = 1 & \text{für } x = 1, \end{cases} \quad \text{etc.}$$

Für jedes  $x \in [0, 1]$  findet man eine Folge  $x_n \rightarrow x$  derart, dass  $f_n(x_n)$  definiert ist, und setzt  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n)$ . In Abbildung 2.1 findet man ein Bild dieser Funktion.

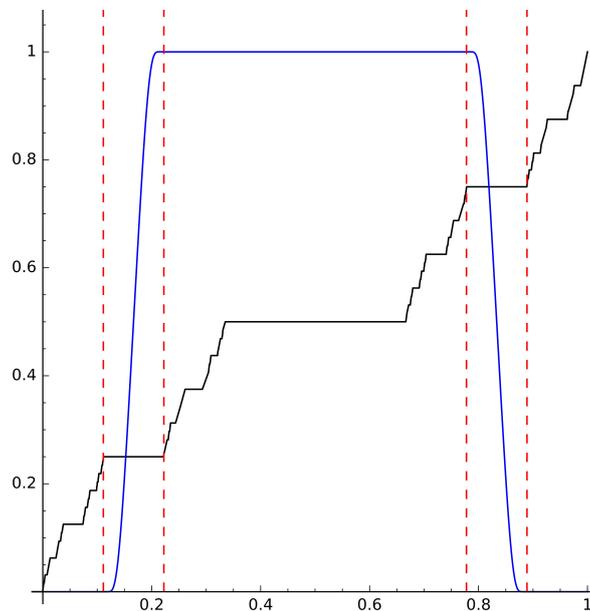


Abbildung 2.1: Die Cantorfunktion und eine geschickt gewählte Testfunktion.

Es gilt, dass  $f'(x) = 0$  auf  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) \cup \dots$ . Wenn wir die gesamte Länge dieser Intervalle Berechnen, finden wir

$$\ell = \frac{1}{3} + 2\frac{1}{9} + 4\frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

und dies bedeutet, dass  $f$  fast überall differenzierbar ist auf  $[0, 1]$  und da die (klassische!) Ableitung gleich 0 hat. Also  $f' = 0$  in  $L^1(0, 1)$ . Um zu zeigen, dass trotzdem  $f$  keine schwache Ableitung hat, nehmen wir eine besondere Testfunktion  $\varphi \in C_0^\infty(0, 1)$ , nämlich

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq \frac{1}{9}, \\ 1 & \text{für } x \in [\frac{2}{9}, \frac{7}{9}], \\ 0 & \text{für } x \geq \frac{8}{9}. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) \varphi'(x) dx &= \int_{\frac{1}{9}}^{\frac{2}{9}} \frac{1}{4} \varphi'(x) dx + \int_{\frac{7}{9}}^{\frac{8}{9}} \frac{3}{4} \varphi'(x) dx \\ &= \left[ \frac{1}{4} \varphi(x) \right]_{\frac{1}{9}}^{\frac{2}{9}} + \left[ \frac{3}{4} \varphi(x) \right]_{\frac{7}{9}}^{\frac{8}{9}} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

während

$$- \int_0^1 f'(x) \varphi(x) dx = 0,$$

und dies ist ein Widerspruch.

### 2.3.2 Schwache und distributionelle Lösungen

Wie man bei gewöhnlichen Differentialgleichungen schon gesehen hat, kommt man mit klassischen Lösungen nicht immer aus. Man erinnere sich an das Reibungsproblem bei zum Beispiel einem bremsenden Fahrzeug. Man konnte da nur eine Lösung definieren, wenn man an einzelnen Stellen zuließ, dass die Differentialgleichung nicht erfüllt ist.

**Beispiel 2.11** Die Reibungskraft für zwei sich übereinander bewegend feste Körper ist annäherungsweise nur abhängig vom Vorzeichen der relativen Geschwindigkeit:

$$F(v) = \begin{cases} -c & \text{für } v > 0, \\ 0 & \text{für } v = 0, \\ c & \text{für } v < 0. \end{cases}$$

Sei  $v$  die Geschwindigkeit des Fahrzeugs und  $m$  die Masse, so gilt für die Beschleunigung  $v'$ :

$$mv' = F(v).$$

Es gibt keine klassische Lösung. Wenn man jedoch die Integralform der Gleichung betrachtet:

$$m(v(t) - v(0)) = \int_0^t F(v(s)) ds$$

dann findet man die folgende Lösung wenn  $v(0) > 0$ :

$$v(t) = \begin{cases} v(0) - \frac{c}{m}t & \text{für } t \in [0, t_1], \\ 0 & \text{für } t > t_1 := c^{-1}mv(0). \end{cases}$$

Für  $t = t_1$  ist  $v$  nicht differenzierbar und deswegen ist  $v$  keine klassische Lösung.

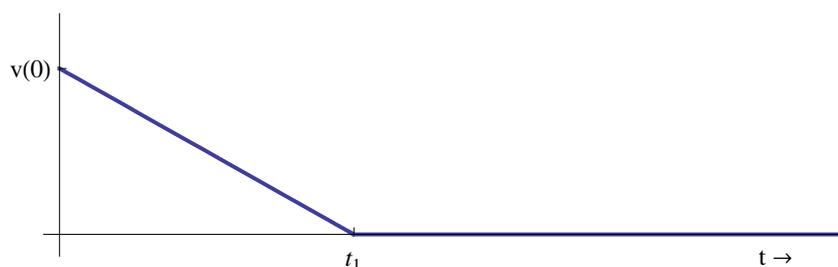


Abbildung 2.2: Skizze zu einer Geschwindigkeit  $t \mapsto v(t)$  aus Beispiel 2.11.

**Beispiel 2.12** Die Wellengleichung in einer Raumdimension ist die folgende:

$$u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = 0.$$

Für  $u(x, 0) = \sin(x)$  findet man zum Beispiel die Lösungen

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \sin(x - ct), \\ u_2(x, t) &= \frac{1}{2} \sin(x - ct) + \frac{1}{2} \sin(x + ct). \end{aligned}$$

Durch direktes Differenzieren sieht man, dass die Differentialgleichung erfüllt ist. Sogar für jede  $C^2$ -Funktion  $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bekommt man eine Lösung, die  $u(x, 0) = u_0(x)$  erfüllt, wie folgt

$$u(x, t) = u_0(x - ct). \quad (2.5)$$

Was passiert jedoch, wenn  $u_0$  nicht zweimal differenzierbar ist? Die Funktion in (2.5) kann nun keine klassische Lösung darstellen.

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen hat man also gelegentlich den Lösungsbegriff erweitern müssen und das hat man gemacht, indem man die Differentialgleichung ersetzt durch eine Integralgleichung. Bei partiellen Differentialgleichungen ist die Sache etwas schwieriger, denn in welche Richtung soll man integrieren? Wie soll man von einer partiellen Differentialgleichung höherer Ordnung zu einem System erster Ordnung kommen?

Auch hier gibt es kein Lösungsmittel, das alle Flecken rausbringt und wir müssen uns einschränken und brauchen dafür eine zweite Klassifizierung der Differentialgleichungen.

Für (semi)lineare partielle Differentialgleichungen kann man, wenn die Koeffizienten  $a_\alpha$  genügend glatt sind, den Lösungsbegriff relativ leicht erweitern.

**Definition 2.13** Man nennt  $u \in C(\Omega)$  eine distributionelle Lösung der Gleichung (2.2), wenn

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m} u(x) \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(a_\alpha(x) \varphi(x)\right) - f(x, u) \varphi(x) \right) dx = 0 \quad (2.6)$$

für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Bemerke, dass diese Definition nur Sinn macht, wenn  $a_\alpha$  genügend glatt ist,  $a_\alpha \in C^m(\Omega)$ . Wenn dies gilt, dann ist  $\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha (a_\alpha(x) \varphi(x))$  und das Integral wohldefiniert. Es ist übrigens nicht notwendig, dass  $u \in C(\Omega)$ . Es reicht, wenn mit dieser Funktion das Integral definiert ist.

Es gibt auch den Begriff schwache Lösung. Dabei werden nicht alle partielle Ableitungen zur Testfunktion  $\varphi$  gebracht, sondern nur die Hälfte.

**Definition 2.14** Man nennt  $u \in C^{\tilde{m}}(\Omega)$  eine schwache Lösung der Gleichung

$$\sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, |\alpha|, |\beta| \leq \tilde{m}} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(a_{\alpha, \beta}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta u(x)\right) = f(x, u),$$

wenn

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, |\alpha|, |\beta| \leq \tilde{m}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta u(x)\right) a_{\alpha, \beta}(x) \left(\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \varphi(x)\right) - f(x, u) \varphi(x) \right) dx = 0 \quad (2.7)$$

für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

**Bemerkung 2.14.1** Die Spaltung zwischen den Ableitungen  $\alpha$  und  $\beta$  ist nicht eindeutig. Für einzelne Probleme soll man genau definieren, was mit einer schwachen Lösung gemeint ist.

Um zu zeigen, dass klassische Lösungen auch schwache oder distributionelle Lösungen sind, brauchen wir eine Version des *Hauptlemmas der Variationsrechnung*:

**Lemma 2.15** Sei  $u \in C(\Omega)$ . Wenn

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

dann gilt  $u = 0$ .

**Beweis.** Wenn  $u \neq 0$ , dann gibt es  $x_0 \in \Omega$  mit  $u(x_0) \neq 0$ . Nehmen wir an, dass  $u(x_0) > 0$ , dann folgt aus der Stetigkeit von  $u$ , dass es eine Umgebung  $B_\varepsilon(x_0)$  gibt derart, dass  $u(x) \geq c := \frac{1}{2}u(x_0) > 0$  für  $x \in B_\varepsilon(x_0)$ . Nehmen wir  $\varphi \in C_0^\infty(B_\varepsilon(x_0))$  mit  $\varphi \geq 0$  in  $B_\varepsilon(x_0)$  und  $\varphi \geq c_1 > 0$  in  $B_{\varepsilon/2}(x_0)$ , so folgt

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx > 0,$$

ein Widerspruch. ■

Dass es eine solche Funktion  $\varphi$  in dem letzten Beweis gibt, möge das Beispiel

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2 - \varepsilon^2}} & \text{für } \|x\| < \varepsilon, \\ 0 & \text{für } \|x\| \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (2.8)$$

deutlich machen. Man kann zeigen, dass auf dem Kreisrand  $\|x\| = \varepsilon$  diese Funktion nicht nur stetig ist sondern auch, dass da alle Ableitungen existieren. Man verwende dazu, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)e^{-t} = 0 \text{ für jedes Polynom } p.$$

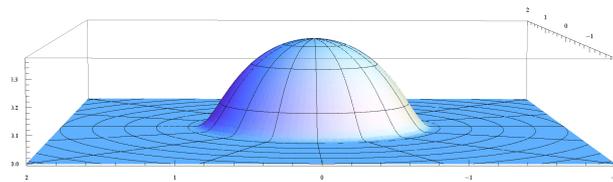


Abbildung 2.3: Skizze zu der Testfunktion  $\varphi_\varepsilon$  aus (2.8) mit  $\varepsilon = 1$ .

Das folgende Ergebnis zeigt die Verbindung zwischen klassischen und schwachen Lösungen.

**Proposition 2.16** Für semilineare Gleichungen gilt:

- Klassische Lösungen sind distributionelle Lösungen.
- Wenn  $u \in C^m(\Omega)$  eine distributionelle Lösung der Gleichung (2.2) ist, so ist  $u$  eine klassische Lösung.

**Bemerkung 2.16.1** Schwache Lösungen liegen zwischen distributionell und klassisch und ein ähnliches Ergebnis gilt.

**Beweis.** Durch partielle Integration findet man, wenn der auswärtige Normalenvektor  $\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  auf  $\partial\Omega$  wohldefiniert ist und wenn die Ableitungen von  $f$  und  $g$  bezüglich  $x_i$  stetig sind, dass

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial}{\partial x_i} g(x) dx = \int_{\partial\Omega} f(x) g(x) \nu_i d\sigma_x - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \right) g(x) dx.$$

Wenn  $g(x) = 0$  oder  $f(x) = 0$  für  $x \in \partial\Omega$ , dann entfällt der mittlere Term und es folgt

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial}{\partial x_i} g(x) dx = \int_{\Omega} \left( -\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \right) g(x) dx. \quad (2.9)$$

So kann man (2.6), wenn  $u \in C^m(\Omega)$  und  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  angenommen worden ist, auch schreiben als

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha} u(x) - f(x, u) \right) \varphi(x) dx = 0. \quad (2.10)$$

Im Fall, dass  $\partial\Omega$  nicht genügend glatt ist um  $\vec{\nu}$  zu definieren, soll man bemerken, dass  $\varphi$  einen kompakten Träger  $K \subset \Omega$  hat. Man kann zeigen dass es  $\Omega^*$  gibt mit

$$K \subset \Omega^*, \overline{\Omega^*} \subset \Omega \text{ und } \partial\Omega^* \in C^\infty.$$

Im Integral (2.10) kann man dann  $\Omega$  durch  $\Omega^*$  ersetzen und öfters (2.9) anwenden auf  $\Omega^*$ . Randintegrale auf  $\partial\Omega^*$  sind wohl-definiert. Weil der Träger von  $\varphi$  innerhalb von  $\Omega^*$  liegt, sind die Randintegrale identisch 0.

Das bedeutet, dass wenn  $u$  eine klassische Lösung ist, (2.10) äquivalent ist zu (2.6). Das bedeutet, dass  $u$  auch eine distributionelle Lösung ist. Umgekehrt, wenn  $u \in C^m(\Omega)$  eine distributionelle Lösung ist, dann gilt (2.10) und man findet mit Hilfe des obigen Lemmas, dass die Differentialgleichung für jedes  $x \in \Omega$  erfüllt ist. Das heißt, distributionelle Lösungen in  $C^m(\Omega)$  sind klassisch. ■

## 2.4 Kriterien von Hadamard

Eine gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung braucht  $n$  unabhängige Bedingungen um höchstens eine Lösung zu haben. War es bei einem Anfangswertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung noch relativ einfach Bedingungen anzugeben, wo es genau eine Lösung gibt, nämlich die Bedingungen aus dem Satz von Picard-Lindelöf, war es bei Randwertproblemen schon schwieriger. Und bei Randwertproblemen war die Existenz bei linearen wiederum einfacher als bei nicht-linearen.

Für partielle Differentialgleichungen wird es sehr vom Typ abhängen, welche Art von Anfangs- oder Randwerten genau eine Lösung geben werden. Aber auch hier wird das Ziel sein, Bedingungen zu suchen derart, dass die Differentialgleichung mit festgelegten Anfangs- oder Randwerten die *Kriterien von Hadamard*<sup>2</sup> erfüllt:

- *Eindeutigkeit*: Das Problem hat höchstens eine Lösung.

<sup>2</sup>Jacques Salomon Hadamard, 1865 – 1963, Französischer Mathematiker, hat seine Spuren hinterlassen in vielen Teilgebieten der Mathematik.



Abbildung 2.4: *Jacques Hadamard*

- *Existenz*: Das Problem hat mindestens eine Lösung.
- *Robustheit*: Wenn man das Problem ein wenig ändert, ändert sich die Lösung auch nur wenig.

Die dritte Eigenschaft wird auch als *Stabilität* oder *stetige Abhängigkeit der Eingangsdaten* benannt.

Wenn ein Problem diese drei Eigenschaften hat, nennt man es *wohlgestellt*. Manchmal sagt man auch *wohldefiniert*.



# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 3



## Modelle und erste Ergebnisse

Dieses Kapitel versucht eine Verbindung herzustellen zwischen physikalischen Voraussetzungen und mathematisch formulierten Problemstellungen. Solche Modellierungsvorgänge sind eine Kunst an sich und bewegen sich außerhalb der üblichen Mathematik bei der man versucht aus einigen Axiomen eine zweifelsfreie Theorie aufzubauen. Modellierung fängt an mit Beobachtungen, Experimenten und Vermutungen, wie der Zusammenhang zwischen Ursache und Ergebnis erklärt werden kann. Die Mathematik an sich kann nicht erklären, wieso ein solches Modell korrekt wäre. Wenn aber die mathematischen Schlußfolgerungen zu unerwarteten Ergebnissen oder sogar zu einem Widerspruch führen würden, müßte man sich ernsthaft Sorgen machen über die Richtigkeit des Modells. Wenn die Ergebnisse übereinstimmen mit den Erwartungen, dann kann man nur hoffen, dass das Model richtig ist.

Neben der Vorstellung einiger Modelle, werden auch ein paar einfache mathematische Ergebnisse gebracht.

### 3.1 Transportgleichung

Man stelle sich vor, dass sich eine Flüssigkeit oder ein Gas unter dem Einfluß einer Strömung bewegt. Diese Strömung ist gegeben durch ein Vektorfeld, das die lokale Geschwindigkeit  $\vec{v}(x, t)$  der Teilchen beschreibt. Die Variable  $x \in \mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  beschreibt die Stelle und  $t$  die Zeit. Man möchte wissen, wie die Dichte  $\rho = \rho(x, y, t)$  ist. Sei  $\Omega(t)$  eine beschränkte Menge dieser Flüssigkeit. Wenn man einen Schritt  $\Delta t$  weiter in der Zeit ist, hat diese Menge sich etwas deformiert zu  $\Omega(t + \Delta t)$  unter Einfluß des Vektorfeldes. Siehe Figur 3.1.

Weil die Masse erhalten bleibt, gilt

$$\int_{\Omega(t+\Delta t)} \rho(x, t + \Delta t) dx = \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) dx.$$

Diese Identität benutzt man wie folgt für die Ableitung der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{\Omega(t+\Delta t)} \rho(x, t + \Delta t) dx - \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) dx \right) = \\ &= \int_{\Omega(t)} \frac{\rho(x, t + \Delta t) - \rho(x, t)}{\Delta t} dx + \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{\Omega(t+\Delta t) \setminus \Omega(t)} - \int_{\Omega(t) \setminus \Omega(t+\Delta t)} \right) \rho(x, t + \Delta t) dx. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \int_{\Omega(t)} \frac{\rho(x, t + \Delta t) - \rho(x, t)}{\Delta t} dx = \int_{\Omega(t)} \partial_t \rho(x, t) dx \quad (3.1)$$

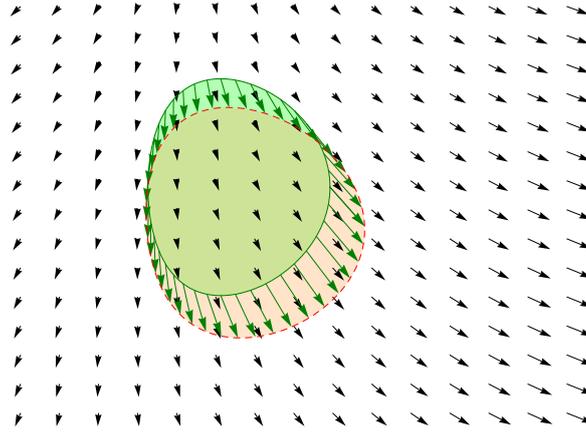


Abbildung 3.1: Von  $t$  zu  $t + \Delta t$  hat  $\Omega(t)$  sich bewegt nach  $\Omega(t + \Delta t)$ .

und für das Ein- und Ausströmen:

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{\Omega(t+\Delta t) \setminus \Omega(t)} - \int_{\Omega(t) \setminus \Omega(t+\Delta t)} \right) \rho(x, t + \Delta t) dx = \int_{\partial\Omega(t)} \rho(x, t) \vec{v}(x, t) \cdot \vec{\nu} d\sigma_x.$$

Hier ist  $\partial\Omega(t)$  der Rand von  $\Omega(t)$  und  $\vec{\nu}$  der auswärtige Normalenvektor. Wegen des Integralsatzes von Gauß (Theorem 1.20) gilt

$$\int_{\partial\Omega(t)} \rho(x, t) \vec{v}(x, t) \cdot \vec{\nu} d\sigma_x = \int_{\Omega(t)} \nabla \cdot (\rho(x, t) \vec{v}(x, t)) dx \quad (3.2)$$

folgt

$$\int_{\Omega(t)} \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \nabla \cdot (\rho(x, t) \vec{v}(x, t)) \right) dx = 0. \quad (3.3)$$

Weil diese letzte Gleichung für jedes Teilgebiet  $\Omega(t)$  gilt, haben wir eine Differentialgleichung für die *Erhaltung der Masse* gefunden:

**Gesetz ⟨I⟩** Sei  $\rho$  die Dichte und  $\vec{v}$  die Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit oder eines Gases. Dann gilt:

$$\partial_t \rho(x, t) + \nabla \cdot (\rho(x, t) \vec{v}(x, t)) = 0. \quad (3.4)$$

Mit Gesetz ist hier ein physikalisches Gesetz<sup>1</sup> gemeint.

**Bemerkung 3.0.1** Wenn  $\vec{v}$  gegeben ist, ist (3.4) eine Differentialgleichung erster Ordnung für die unbekannte Dichte  $\rho$ . Man nennt eine solche Differentialgleichung eine Transportgleichung.

## 3.2 Wärmeleitungsgleichung

In vielen Fällen wird  $\vec{v}$  in (3.4) bestimmt durch die Dichte  $\rho$ . Wenn es sich um eine Flüssigkeit in einem porösen Medium handelt, gilt das folgende:

<sup>1</sup>Ein physikalisches Gesetz beruht auf Wahrnehmungen, Messungen und auch schon mal auf eine mathematische Herleitung einer physikalischen Wahrnehmung. Man sollte Gesetz jedoch nicht mit dem mathematischen Begriff „Satz“ vergleichen.

**Gesetz ⟨II⟩ (Gesetz von Darcy)** Sei  $\rho$  die Dichte,  $\vec{v}$  die Strömungsgeschwindigkeit und  $P$  der Druck einer Flüssigkeit. Durch Messungen hat man den folgenden Zusammenhang gefunden:

$$\rho(x, t) \vec{v}(x, t) = -c \nabla P(x, t).$$

Die Konstante  $c$  wird durch das poröse Material und die Flüssigkeit bestimmt.

Wenn Druck und Dichte proportional sind,  $P = c_1 \rho$ , findet man mit (3.4) und  $c_2 = c_1 c$ , dass

$$\partial_t \rho(x, t) = -\nabla \cdot (\rho(x, t) \vec{v}(x, t)) = -c \nabla \cdot \nabla P(x, t) = -c_2 \Delta \rho(x, t).$$

Ähnliches gilt für die Wärmeleitung.

**Gesetz ⟨III⟩ (Wärmeleitungsgesetz oder Gesetz von Fourier)** Sei  $T$  die absolute Temperatur und  $\vec{v}$  die Strömungsgeschwindigkeit der Wärme, dann gilt

$$T(x, t) \vec{v}(x, t) = -\tilde{c} \nabla T(x, t).$$

Die Konstante  $\tilde{c}$  wird durch das Material bestimmt.

Für die Energiedichte gilt üblicherweise  $\rho = c_1 T$ . Auch hier folgt dann mit (3.4):

$$\partial_t T(x, t) = -\nabla \cdot (T(x, t) \vec{v}(x, t)) = \tilde{c} \nabla \cdot \nabla T(x, t) = c \Delta T(x, t).$$

**Bemerkung 3.0.2** Die Differentialgleichung

$$\partial_t T(x, t) - c \Delta T(x, t) = 0$$

heißt die Wärmeleitungsgleichung. Physikalisch gesehen ist  $c$  die Wärmekapazität. Durch Zeitskalierung, das heißt  $t$  durch  $\tilde{t} = ct$  ersetzen, kann man  $c = 1$  setzen.

Sorgt zusätzlich eine Wärmequelle  $f(x, t)$  im Innern für eine extra Zufuhr, dann bekommt man die *inhomogene Wärmeleitungsgleichung*

$$\partial_t T(x, t) - k \Delta T(x, t) = f(x, t). \quad (3.5)$$

Wenn wir die Wärmeverteilung in einem isolierten Körper  $\Omega$  betrachten, dann soll keine Wärme herein- oder hinausströmen. Das bedeutet, dass am Rande gilt

$$\nabla T(x, t) \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega \text{ und } t > 0. \quad (3.6)$$

- Die *Randwertbedingung* in (3.6) ist nach *Neumann* benannt worden. Man kann sie auch schreiben als

$$\frac{\partial}{\partial \nu} T(x, t) = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega \text{ und } t > 0.$$

- Wenn man die Temperatur  $T_1$  am Rande vorschreibt, heißt das eine *Dirichlet Randwertbedingung*:

$$T(x, t) = T_1 \text{ für } x \in \partial\Omega \text{ und } t > 0.$$

Das Rand-Anfangswertproblem für die Temperaturverteilung eines isolierten Körpers ist so das folgende Problem:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) - k \Delta T(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} T(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ T(x, 0) = T_0(x) & \text{für } x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.7)$$

Die Wärmeleitungsgleichung ist verwandt mit der Gleichung für die Strömung durch ein poröses Medium. Weil der Druck da als Funktion der Dichte schneller als linear zunimmt, nämlich  $P = u^m$ , wird die dazugehörige Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - k \Delta (u(x, t))^m = 0. \quad (3.8)$$

**Bemerkung 3.0.3** Man nennt (3.8) die Poröse-Medien-Gleichung.

Für  $m \neq 1$  ist diese Gleichung nicht-linear und das sorgt für erhebliche Schwierigkeiten. Diese Differentialgleichung werden wir in dieser Vorlesung dann auch nicht weiter anschauen.

### 3.2.1 Einfache Ergebnisse für die Wärmeleitungsgleichung auf beschränkte Gebiete

**Lemma 3.1** Sei  $T \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+)$  eine Lösung von (3.7), so gilt

$$\int_{\Omega} T(x, t) dx = \int_{\Omega} T(x, 0) dx.$$

**Bemerkung 3.1.1** Dies ist ein Erhaltungssatz.  $\frac{\partial}{\partial \nu} T(x, t) = 0$  bedeutet, dass keine Wärme herausfließt und die gesamte gespeicherte Wärme erhalten bleibt.

**Beweis.** Betrachtet man

$$I(t) = \int_{\Omega} T(x, t) dx,$$

so folgt

$$\begin{aligned} I'(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} T(x, t) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) dx = k \int_{\Omega} \Delta T(x, t) dx \\ &= k \int_{\partial\Omega} \nabla T(x, t) \cdot \nu d\sigma_x = k \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu} T(x, t) d\sigma_x = 0 \end{aligned}$$

und  $I(t)$  ist konstant. ■

Statt zu isolieren, kann man auch das Problem betrachten, bei dem die Temperatur am Rand festgehalten wird, sagen wir auf  $T_1 = 0$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) - k \Delta T(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ T(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ T(x, 0) = T_0(x) & \text{für } x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.9)$$

**Lemma 3.2** Sei  $T \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+)$  eine Lösung von (3.7) oder (3.9), so gilt

$$\int_{\Omega} T^2(x, t) dx \leq \int_{\Omega} T^2(x, 0) dx.$$

**Beweis.** Betrachtet man

$$E(t) = \int_{\Omega} T^2(x, t) dx,$$

so folgt

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} T^2(x, t) dx = 2 \int_{\Omega} T(x, t) \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) dx = 2k \int_{\Omega} T(x, t) \Delta T(x, t) dx \\ &= 2k \int_{\partial\Omega} T(x, t) \nabla T(x, t) \cdot \nu d\sigma_x - 2k \int_{\Omega} \nabla T(x, t) \cdot \nabla T(x, t) dx \\ &= -2k \int_{\Omega} |\nabla T(x, t)|^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

Man bemerke, dass

$$\int_{\partial\Omega} T(x, t) \nabla T(x, t) \cdot \nu d\sigma_x = \int_{\partial\Omega} T(x, t) \frac{\partial}{\partial \nu} T(x, t) d\sigma_x = 0$$

gilt sowohl für (3.7), als auch für (3.9). ■

**Korollar 3.3** *Es gibt höchstens eine Lösung  $T \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+)$  für das Anfangs/Randwertproblem (3.7). Dies trifft auch zu für Problem (3.9).*

**Beweis.** Wenn (3.7) (oder auch (3.9)) zwei verschiedene Lösungen  $T_1$  und  $T_2$  haben, betrachte man  $T = T_1 - T_2$ . Die Funktion  $T$  erfüllt das Anfangs/Randwertproblem mit  $T = 0$  am Anfang und am Rand. Aus Lemma 3.2 folgt

$$0 \leq \int_{\Omega} T^2(x, t) dx \leq \int_{\Omega} T^2(x, 0) dx = 0$$

und dann auch  $T(x, t) = 0$  für  $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ . Das heißt  $T_1 = T_2$ . ■

### 3.3 Die Laplace Gleichung

Die Differentialgleichung

$$-k \Delta u(x) = f(x)$$

nennt man die *stationäre Wärmeleitungsgleichung* oder *Poisson Gleichung*. Für einen Potentialfluss hat man die Gleichung

$$\Delta u = 0. \tag{3.10}$$

Hier ist  $u$  das Potential und  $\vec{v} = \nabla u$  die Geschwindigkeit. Diese Gleichung beschreibt eine Strömung, bei der die Dichte/Wärme nicht zeitabhängig ist.

**Bemerkung 3.3.1** *Die Differentialgleichung  $\Delta u = 0$  heißt die Laplace Gleichung.*

*Eine Funktion  $u \in C^2(\Omega)$ , die  $\Delta u = 0$  auf  $\Omega$  erfüllt, nennt man harmonisch auf  $\Omega$ .*

### 3.3.1 Ein Ergebnis für harmonische Funktionen

Aus der Vorlesung Funktionentheorie soll man sich an einige schöne Ergebnisse für harmonische Funktionen in 2 Dimensionen erinnern. Eine solche Eigenschaft von harmonischen Funktionen lässt sich auch in höheren Dimensionen zeigen:

**Proposition 3.4 (Mittelwertsatz für harmonische Funktionen)** *Wenn  $u \in C^2(\Omega)$  und  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$ , dann gilt für jede Kugel  $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < r\}$  mit  $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ , dass*

$$\int_{\partial B_r(x_0)} (u(x) - u(x_0)) d\sigma_x = 0. \quad (3.11)$$

**Bemerkung 3.4.1** *Setzt man*

$$\omega_n = \int_{\partial B_1(0)} 1 d\sigma_x, \quad (3.12)$$

*dann ist  $\omega_n$  der (Hyper)Flächeninhalt der Kugeloberfläche einer Kugel mit Radius 1. Die Flächeninhalt der Kugeloberfläche einer Kugel mit Radius  $r$  ist dann gleich  $r^{n-1}\omega_n$ . Die Gleichung (3.11) lässt sich dann wie folgt schreiben:*

$$\int_{\partial B_r(x_0)} u(x) d\sigma_x = \int_{\partial B_r(x_0)} u(x_0) d\sigma_x = u(x_0) \int_{\partial B_r(x_0)} 1 d\sigma_x = r^{n-1}\omega_n u(x_0),$$

*und das heißt*

$$\frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) d\sigma_x = u(x_0).$$

*Anders gesagt,  $u(x_0)$  nimmt den Durchschnittswert auf dem Kugelrand  $\partial B_r(x_0)$  an.*

**Bemerkung 3.4.2** *Die Gleichung in (3.11) kann man auch wie folgt formulieren:*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma_y. \quad (3.13)$$

*Wenn (3.13) gilt für alle  $r \leq R$ , so gilt auch*

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y) dy \quad (3.14)$$

*für alle  $r \leq R$  und umgekehrt. Von (3.13) zu (3.14) kommt man durch  $\int_0^r r^{n-1} u(x) dr$  mit  $u$  aus (3.13) zu integrieren. Die umgekehrte Richtung folgt aus  $\partial_r (r^n u(x))$  mit  $u$  aus (3.14).*

**Beweis.** Wir werden den Satz beweisen für  $x_0 = 0$ . Für  $n \geq 3$  und  $x \neq 0$  gilt folgendes

$$\Delta |x|^{2-n} = \nabla \cdot \nabla |x|^{2-n} = (2-n) \nabla \cdot \frac{x}{|x|^n} = (2-n) \left( \frac{n}{|x|^n} - n \frac{x \cdot x}{|x|^{n+2}} \right) = 0.$$

So finden wir mit partieller Integration einerseits

$$\begin{aligned} & \int_{B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla (|x|^{2-n} - r^{2-n}) \cdot \nabla u(x) dx = \\ &= \int_{\partial(B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0))} \frac{\partial}{\partial \nu} (|x|^{2-n} - r^{2-n}) u(x) d\sigma_x - \int_{B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \Delta (|x|^{2-n} - r^{2-n}) u(x) dx \\ &= (2-n) \left( r^{1-n} \int_{\partial B_r(0)} u(x) d\sigma_x - \varepsilon^{1-n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x) d\sigma_x \right), \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} & \int_{B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla (|x|^{2-n} - r^{2-n}) \cdot \nabla u(x) \, dx = \\ &= \int_{\partial(B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0))} (|x|^{2-n} - r^{2-n}) \frac{\partial}{\partial \nu} u(x) \, d\sigma_x - \int_{B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0)} (|x|^{2-n} - r^{2-n}) \Delta u(x) \, dx \\ &= \int_{\partial B_r(0)} 0 \frac{\partial}{\partial \nu} u(x) \, d\sigma_x - \varepsilon^{2-n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \vec{\nu} \cdot \nabla u(x) \, d\sigma_x. \end{aligned}$$

Zusammen folgt

$$r^{1-n} \int_{\partial B_r(0)} u(x) \, d\sigma_x - \varepsilon^{1-n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x) \, d\sigma_x = \frac{\varepsilon^{2-n}}{2-n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(x) \, d\sigma_x. \quad (3.15)$$

Wir betrachten die einzelnen Terme aus (3.15).

Weil  $\frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(x)$  beschränkt ist, sagen wir der Betrag ist kleiner  $c_1$ , so findet man

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(x) \, d\sigma_x \right| \leq c_1 \omega_n \varepsilon^{n-1}.$$

Also gilt

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\varepsilon^{2-n}}{2-n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(x) \, d\sigma_x = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{O}(\varepsilon) = 0.$$

Auch gilt, weil  $u \in C^1(\overline{B_r(0)})$ , dass

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} (u(x) - u(0)) \, d\sigma_x \right| &\leq \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |u(x) - u(0)| \, d\sigma_x \\ &\leq c_2 \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |x| \, d\sigma_x \leq c_2 \varepsilon \varepsilon^{n-1} \omega_n, \end{aligned}$$

und es folgt, dass

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{1-n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x) \, d\sigma_x = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \varepsilon^{1-n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(0) \, d\sigma_x + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) = \omega_n u(0).$$

Mit (3.15) findet man nun für  $\varepsilon \downarrow 0$ , dass

$$r^{1-n} \int_{\partial B_r(0)} u(x) \, d\sigma_x = \omega_n u(0),$$

und somit das gewünschte Ergebnis für  $n \geq 2$ . Für  $n = 2$  ist das Ergebnis in der Vorlesung Funktionentheorie bewiesen. Man kann auch den obigen Beweis wiederholen mit  $|x|^{2-n}$  ersetzt durch  $\ln|x|$ . ■

Aus Proposition 3.4 folgt, dass, wenn man auf dem Rand  $\partial B_r(x_0)$  eine harmonische Funktion  $u$  vergrößert, beziehungsweise verkleinert, auch  $u(x_0)$  größer, beziehungsweise, kleiner wird. Man findet sogar das folgende starke Ergebnis.

**Korollar 3.5** Wenn  $u \in C^2(\Omega)$  harmonisch ist auf  $\Omega$  und ein Extremum innerhalb von  $\Omega$  hat, so ist  $u$  eine Konstante.

**Beweis.** Nehmen wir an,  $u$  hat ein Maximum in  $x_0 \in \Omega$ . Weil  $\Omega$  offen ist, gibt es  $r_0 > 0$  mit  $B_{r_0}(x_0) \subset \Omega$  und für jedes  $r \in (0, r_0)$  gilt

$$u(x_0) = \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) d\sigma_x \leq \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x_0) d\sigma_x = u(x_0).$$

Diese Ungleichung ist streng und gibt einen Widerspruch, wenn  $u$  nicht identisch  $u(x_0)$  ist auf  $\partial B_r(x_0)$ . Es folgt also, dass  $u$  konstant ist auf  $B_{r_0}(x_0)$ . Man wiederholt diese Argumente für jedes  $x_1 \in B_{r_0}(x_0)$ ,  $x_2 \in B_{r_1}(x_1)$  usw.. Die Annahme, dass  $\Omega$  offen und zusammenhängend ist, erlaubt es uns ganz  $\Omega$  mit Kugeln zu überdecken. Auf jede Kugel in  $\Omega$  ist  $u$  konstant, also ist  $u$  auch konstant auf  $\Omega$ . ■

**Korollar 3.6** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Seien  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $u_r : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Dann hat das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = u_r & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.16)$$

für  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  höchstens eine Lösung.

**Beweis.** Wenn (3.16) zwei solche Lösungen hat, sagen wir  $u_1$  und  $u_2$ , dann erfüllt  $u = u_1 - u_2$  das Randwertproblem in (3.16) mit  $f = 0$  und  $u_r = 0$ . Wenn  $u_1 \neq u_2$  dann hat  $u$  ein Extremum in  $\Omega$  ungleich 0. Korollar 3.5 sagt dann, dass  $u$  konstant ist. Weil  $u = 0$  auf dem Rand und weil  $u$  stetig ist auf  $\bar{\Omega}$ , folgt  $u = 0$  auf  $\bar{\Omega}$ . Dies widerspricht die Annahme, dass  $u_1$  und  $u_2$  verschieden sind. ■

### 3.4 Die schwingende Saite

Nehmen wir zur Modellierung an, dass diese Saite aus einer Reihe kleiner Massen besteht, die elastisch verbunden sind. Wir nehmen an, dass die Spannung  $S$  in der Saite konstant ist. Sei  $u(x, t)$  die vertikale Auslenkung an der Stelle  $x$  zur Zeit  $t$ . Betrachten wir den Teil zwischen  $x_1 - \frac{1}{2}\Delta x$  und  $x_1 + \frac{1}{2}\Delta x$ , dann wirken die folgenden Kräfte auf diesen Teil:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{links}} &= \frac{-S}{\sqrt{1+u_x(x_1-\frac{1}{2}\Delta x, t)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ u_x(x_1-\frac{1}{2}\Delta x, t) \end{pmatrix}, \\ \vec{F}_{\text{rechts}} &= \frac{S}{\sqrt{1+u_x(x_1+\frac{1}{2}\Delta x, t)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ u_x(x_1+\frac{1}{2}\Delta x, t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

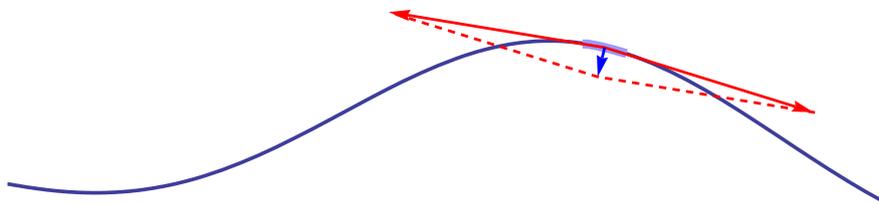


Abbildung 3.2: Kräfte bei einer schwingenden Saite.

Wir betrachten nur die vertikalen Kräfte. Addiert man diese beiden Komponenten so findet man

$$\left(\vec{F}_{\text{rechts}} + \vec{F}_{\text{links}}\right)_2 = S \left( \frac{u_x(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x, t)^2}} - \frac{u_x(x_1 - \frac{1}{2}\Delta x, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_1 - \frac{1}{2}\Delta x, t)^2}} \right). \quad (3.17)$$

Entwickelt man mit Taylor nach  $\Delta x$ , so folgt mit für die gesamte vertikale Komponente in (3.17), dass

$$\left(\vec{F}_{\text{rechts}} + \vec{F}_{\text{links}}\right)_2 = S \frac{u_{xx}(x_1, t)}{(1 + u_x(x_1, t))^2} \Delta x + \mathcal{O}((\Delta x)^2). \quad (3.18)$$

Aus dem zweiten Gesetz von Newton<sup>2</sup>,

$$F = \partial_t(mv) \quad (3.19)$$

mit  $v$  die vertikale Geschwindigkeit und  $m$  die Masse, folgt für den Teil der Saite zwischen  $x_1 - \frac{1}{2}\Delta x$  und  $x_1 + \frac{1}{2}\Delta x$  mit Dichte  $\rho$ , dass

$$mv = \int_{x_1 - \frac{1}{2}\Delta x}^{x_1 + \frac{1}{2}\Delta x} \sqrt{1 + u_x(x, t)^2} \rho \partial_t u(x, t) dx. \quad (3.20)$$

Also folgt für  $F = \left(\vec{F}_{\text{rechts}} + \vec{F}_{\text{links}}\right)_2$  dann aus (3.18-3.20):

$$\partial_t \left( \int_{x_1 - \frac{1}{2}\Delta x}^{x_1 + \frac{1}{2}\Delta x} \sqrt{1 + u_x(x, t)^2} \rho \partial_t u(x, t) dx \right) = S \Delta x \frac{u_{xx}(x_1, t)}{(1 + u_x(x_1, t))^2} + \mathcal{O}((\Delta x)^2).$$

Dividiert man durch  $\Delta x$  und nimmt den Grenzwert für  $\Delta x \downarrow 0$ , dann folgt

$$\partial_t \left( \sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2} \rho \partial_t u(x_1, t) \right) = S \frac{u_{xx}(x_1, t)}{(1 + u_x(x_1, t))^2}. \quad (3.21)$$

Angenommen, dass  $|u_x(x_1, t)| \ll 1$  und dass  $|u_{xt}(x_1, t)|$  beschränkt ist, approximiert man in (3.21) durch

$$1 + u_x(x_1, t)^2 \approx 1 \text{ und } \partial_t \sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2} = \frac{u_x(x_1, t) u_{xt}(x_1, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2}} \approx 0.$$

Setzt man  $c^2 = S/\rho$ , dann wird (3.21) approximiert durch

$$u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = 0. \quad (3.22)$$

**Bemerkung 3.6.1** Die Differentialgleichung in (3.22) heißt die eindimensionale Wellengleichung.

## 3.5 Die Wellengleichung

Wenn man eine kompressible Flüssigkeit oder Gas betrachtet, hat man erstens den Erhaltungssatz aus (3.4):

$$\partial_t \rho(x, t) + \nabla \cdot (\rho(x, t) \vec{v}(x, t)) = 0. \quad (3.23)$$

<sup>2</sup>LEX II. MUTATIONEM MOTUS PROPORTIONALEM ESSE VI MOTRICI IMPRESSAE, ET FIERI SECUNDUM LINEAM RECTAM QUA VIS ILLA IMPRIMITUR.

Gesetz II. Die Änderung einer Bewegungsgröße ist der eingepprägten Bewegungskraft proportional und sie folgt der Geraden, entlang welcher diese Kraft eingepprägt wird.

Wir betrachten nun den Fall, bei dem der Druck  $p$  proportional zur Dichte  $\rho$  ist:

$$p(x, t) = c \rho(x, t) \quad (3.24)$$

und verwenden wieder das zweite Gesetz von Newton:  $F = \frac{\partial}{\partial t}(mv)$  mit der Kraft  $F$  und dem Impuls  $mv$ . Die zugehörige Kräftegleichung, Impulsänderung von  $U =$  Druck auf  $\partial U$ , wird

$$\partial_t \int_U \rho(x, t) \vec{v}(x, t) dx = - \int_{\partial U} p(x, t) \vec{\nu} d\sigma_x, \quad (3.25)$$

für ein beliebiges Gebiet  $U \subset \Omega$ . Mit wohldefiniertem auswärtigem Normalenvektor folgt aus dieser letzten Gleichung:

$$\int_U \partial_t (\rho(x, t) \vec{v}(x, t)) dx = - \int_U \nabla p(x, t) dx.$$

Dann gilt auch

$$\partial_t (\rho(x, t) \vec{v}(x, t)) = -\nabla p(x, t). \quad (3.26)$$

Kombiniert man (3.26), (3.23) und (3.24), dann folgt

$$\Delta p = -\nabla \cdot \partial_t (\rho \vec{v}) = -\partial_t \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \partial_t \partial_t \rho = \frac{1}{c} \partial_t^2 p.$$

**Bemerkung 3.6.2** Die Differentialgleichung

$$\partial_t^2 p(t, x) - c \Delta p(t, x) = 0 \quad (3.27)$$

nennt man die Wellengleichung. Auch hier kann man durch Zeitskalierung  $c = 1$  setzen.

## 3.6 Die Membran

Ähnlich wie bei der Saite ist bei einer elastischen Membran die Kraft gleich der Spannung multipliziert mit der Krümmung. Nur ist nicht so ganz klar, welche Krümmung wir nehmen müssen, denn Funktionen  $(x, y) \mapsto u(x, y)$  können sich in zwei Richtungen „krümmen“. Ein etwas einfacherer Ansatz ist folgender. Statt das Kräftegleichgewicht darzustellen, betrachten wir die Energie. Wir nehmen an, dass bei einer eingespannten Membran die Energie proportional zum Flächeninhalt ist.

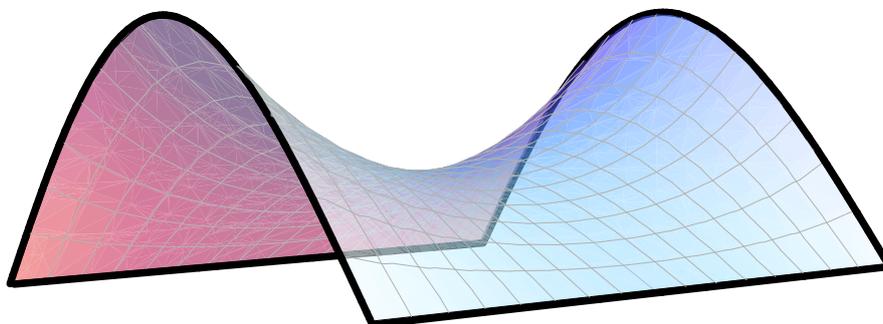


Abbildung 3.3: Ohne Kräfte von Aussen, hat eine eingespannte Membran oder Seifenblase die Form mit dem kleinsten Flächeninhalt.

Wenn wir die Membran parametrisieren durch

$$(x, y) \in \Omega \mapsto (x, y, u(x, y)) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

dann wird diese Energie als Funktional der Funktion  $u$  wie folgt:

$$E_{\text{elastisch}}(u) := \int_{\Omega} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} d(x, y). \quad (3.28)$$

Lässt man außerdem Kräfte zu, die mit Dichte  $f(x, y)$  an der Stelle  $(x, y)$  vertikal eine Kraft ausüben, hat man zusätzlich einen Potentialterm durch Kraft mal Weg:

$$E_{\text{potentiell}}(u) := \int_{\Omega} f u d(x, y).$$

Die totale Energie ist

$$E_{\text{total}}(u) := \int_{\Omega} \left( \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} - f u \right) d(x, y)$$

Das *Prinzip der kleinsten Wirkung*, auch *Hamiltonisches Prinzip*<sup>3</sup> genannt, wird angewendet. Dieses Prinzip sagt, dass die Funktion, die das passende physikalische Verhalten repräsentiert, dieses Funktional (Die Physiker würden sagen: diese Wirkung) minimiert. Mathematisch heißt das, dass das Funktional größer wird, wenn wir die Lösung  $u$  stören mit  $\varepsilon\phi$ :

$$E_{\text{total}}(u + \varepsilon\phi) \geq E_{\text{total}}(u) \text{ für alle } \varepsilon \in \mathbb{R} \text{ und } \phi \in C^1(\bar{\Omega}).$$

Wenn die Funktion  $\varepsilon \mapsto E_{\text{total}}(u + \varepsilon\phi)$  differenzierbar ist, dann gilt

$$\left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon} E_{\text{total}}(u + \varepsilon\phi) \right)_{\varepsilon=0} = 0 \text{ für alle } \phi \in C^1(\bar{\Omega}). \quad (3.29)$$

Für  $u, \phi \in C^1(\bar{\Omega})$  ist (3.29) gleich

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\nabla u \cdot \nabla \phi}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} - f \phi \right) d(x, y) = 0.$$

Wenn außerdem gilt, dass  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ , dann können wir für  $\phi \in C_0^1(\bar{\Omega})$  partiell integrieren und es folgt

$$\int_{\Omega} \left( -\nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right) - f \right) \phi d(x, y) = 0.$$

Weil dieses Integral gleich 0 ist für alle solche  $\phi$ , findet man

$$-\nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right) = f. \quad (3.30)$$

Auch hier vereinfacht man für  $u_x^2 + u_y^2 \ll 1$  die Gleichung zu  $-\Delta u = f$ .

**Beispiel 3.7** Für konstante  $f \in [0, 2]$ ,  $\Omega = B_1(0)$  und  $h \geq 0$ , so dass  $f\sqrt{1+h^2} = 2$  gilt, kann man zeigen, dass

$$u(x, y) = \sqrt{1 + h^2 - x^2 - y^2} - h$$

die Differentialgleichung (3.30) löst. Für  $f > 2$  kann man zeigen, dass es keine Lösungen gibt! Es gibt auch Membrane, die sich nicht durch  $(x, y, u(x, y))$  parametrisieren lassen. Zum Beispiel kann man zeigen, dass

$$(\varphi, \theta) \mapsto \left( R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \theta + \sqrt{R^2 - 1} \right)$$

mit  $(\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, \arcsin(1/R)]$  eine Oberfläche parametrisiert, die man auch als Lösung zulassen sollte. Diese Lösung lässt sich nicht als Funktion von  $(x, y)$  schreiben.

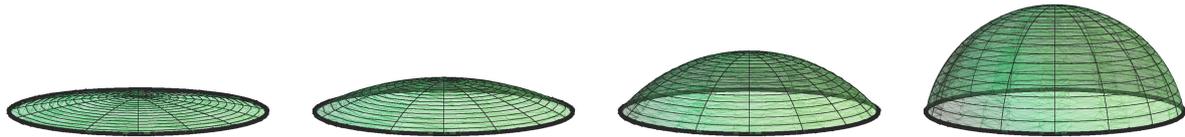


Abbildung 3.4: Einige Lösungen zu Beispiel 3.7 mit  $f$  gleich .4, .8, 1.2 und 1.4.



Abbildung 3.5: Einige Membrane, die sich nicht durch  $(x, y, u(x, y))$  parametrisieren lassen;  $f$  ist gleich 1.4, 1.2, .8 und .6. Wie man erwarten sollte: Kugeloberflächen.

Die Skizzen in Abbildung 3.5 lassen sich nicht durch  $(x, y, u(x, y))$  parametrisieren. Stattdessen kann man  $(r(\varphi, \theta) \cos \varphi \sin \theta, r(\varphi, \theta) \sin \varphi \sin \theta, r(\varphi, \theta) \cos \theta)$  versuchen. Man kann das Funktional nach  $r, \varphi$  und  $\theta$  umschreiben und kann sogar zeigen, dass die Bilder in Abbildung 3.5 Lösungen einer Differentialgleichung wie in (3.30) erfüllen. Diese Lösungen sind jedoch keine Minima. Sie sind zwar stationäre Punkte für dieses Funktional, sind jedoch kein Minimum, sondern ein Sattelpunkt.

Seifenblasen versuchen ihren Flächeninhalt zu minimieren und haben darum die in (3.28) genannte Energie. Sie haben aber nicht die oben genannte potentielle Energie. Sie minimieren (3.28) unter der Nebenbedingung, dass ihr Volumen konstant ist.

### 3.7 Der schwingende Balken

Die Energie einer aufgespannten Saite zwischen  $(0, 0)$  und  $(\ell, 0)$  ist proportional zu der Zunahme der Länge durch die Auslenkung:

$$E_{\text{elastisch},S}(u) = s \int_0^\ell \left( \sqrt{1 + u_x^2} - 1 \right) dx \approx \int_0^\ell \frac{1}{2} s u_x^2 dx.$$

Wenn man statt einer Saite einen Balken betrachtet, der an beiden Enden in die vertikale Richtung zurückgehalten wird, wird die elastische Energie durch das Quadrat der Krümmung verursacht:

$$E_{\text{elastisch},B}(u) = \frac{1}{2} \sigma \int_0^\ell \frac{u_{xx}^2}{(1 + u_x^2)^3} dx \approx \int_0^\ell \frac{1}{2} \sigma u_{xx}^2 dx$$

<sup>3</sup>Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865)

für kleine Auslenkungen. Hat man zusätzlich eine Kraft, welche die Saite oder den Balken lokal seitwärts biegt, findet man

$$E_{\text{total},S}(u) = \int_0^\ell \left( \frac{1}{2}s u_x^2 - f u \right) dx,$$
$$E_{\text{total},B}(u) = \int_0^\ell \left( \frac{1}{2}\sigma u_{xx}^2 - f u \right) dx.$$

Testen mit  $\varphi$  unter Anwendung des Hamiltonischen Prinzips und durch partielle Integration folgt

$$\begin{aligned} \text{für } S: & \quad -s u_{xx} = f, \\ \text{für } B: & \quad \sigma u_{xxxx} = f. \end{aligned}$$

**Bemerkung 3.7.1** Wenn wir das zeitabhängige Problem betrachten und die Kraftdichte durch die vertikale Beschleunigung verursacht wird, finden wir die linearisierte Gleichung eines schwingenden Balkens:

$$u_{tt}(x, t) - \sigma u_{xxxx}(x, t) = 0. \quad (3.31)$$



# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 4



### Erster Ordnung: Transportgleichungen

#### 4.1 Lineare und semilineare Transportgleichungen

##### 4.1.1 Mit konstanten Koeffizienten

Eine sehr einfache Differentialgleichung aus dieser Klasse ist

$$\vec{v} \cdot \nabla u(x) = f(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.1)$$

Hier sind  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  und  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben und  $u$  ist gesucht. Wir betrachten eine Kurve

$$x(t) = x_0 + t \vec{v}.$$

Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x(t)) = \vec{v} \cdot \nabla u(x(t))$$

und wenn wir uns auf eine solche Kurve beschränken, kann man (4.1) leicht lösen. Für  $U(t) := u(x(t))$  und  $F(t) := f(x(t))$  wird die Differentialgleichung

$$U'(t) = F(t).$$

Also hat man

$$U(t) = U(t_0) + \int_{t_0}^t F(s) ds.$$

Zurückgeführt auf (4.1) folgt

$$u(x_0 + t \vec{v}) = u(x_0) + \int_0^t f(x_0 + s \vec{v}) ds \quad (4.2)$$

und diese Funktion erfüllt die Differentialgleichung auf der Geraden durch  $x_0$  in der Richtung  $\vec{v}$ . Kennt man  $u(x)$  auf einer  $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$ , die mit jeder Geraden  $\{x_0 + t \vec{v}; t \in \mathbb{R}\}$  höchstens einen Punkt gemeinsam hat, dann hat man eine Lösung der Differentialgleichung auf  $\Omega = \{x_0 + t \vec{v}; x_0 \in M \text{ und } t \in \mathbb{R}\}$ .

Etwas haben wir nicht beachtet. Wenn  $x \in M \mapsto u(x)|_M$  nicht differenzierbar ist, kann man auch nicht erwarten, dass  $\nabla u$  für  $u$  in (4.2) definiert ist. Im schwachen Sinne ist es trotzdem eine Lösung.

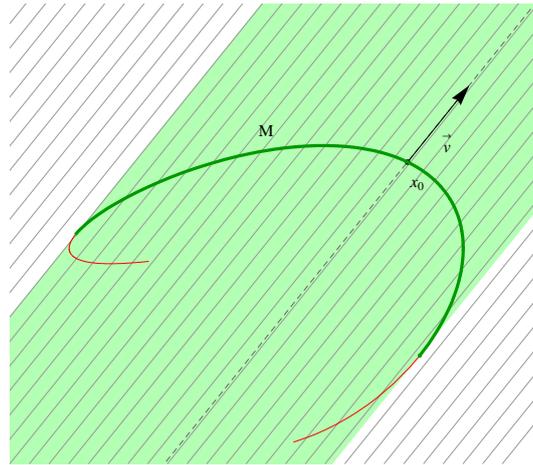


Abbildung 4.1: Die Werte, vorgeschrieben auf der grünen Kurve, geben eine Lösung auf dem hellgrünen Gebiet. Man kann  $u$  nicht beliebig vorschreiben auf der Fortsetzung (die rote Kurve).

**Beispiel 4.1** Wir suchen eine Lösung von

$$\begin{cases} u_x(x, y) + u_y(x, y) = 1, \\ u(x, 0) = x^2. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung kann man schreiben als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \nabla u(x, y) = 1.$$

Schritt 1. Wir suchen die charakteristische Kurven durch  $\{(x_0, 0); x_0 \in \mathbb{R}\}$  und die sind

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 2. Wir setzen  $U(t) = u(x(t), y(t))$  und finden die gewöhnliche Differentialgleichung

$$U'(t) = \partial_t(u(x(t), y(t))) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \nabla u(x(t), y(t)) = 1$$

mit der Anfangsbedingung  $U(0) = u(x(0), y(0)) = u(x_0, 0) = x_0^2$ . Es folgt

$$U(t) = U(0) + t = x_0^2 + t.$$

Schritt 3. Transformieren zu den alten Koordinaten verwendet

$$\begin{aligned} u(x(t), y(t)) &= U(t) = x_0^2 + t \\ x(t) &= x_0 + t \text{ und } y(t) = t. \end{aligned}$$

Es folgt  $u(x_0 + t, t) = x_0^2 + t$  und man findet eine Lösung auf ganz  $\mathbb{R}^2$  für  $u$ , nämlich

$$u(x, y) = (x - y)^2 + y.$$

### 4.1.2 Allgemeine (semi)lineare Transportgleichungen

Die Differentialgleichung, die gemeint ist, ist die folgende:

$$\vec{v}(x) \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.3)$$

Hier ist  $\vec{v}$  und  $f$  gegeben und wir nehmen an, dass  $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  und  $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ . Zusätzlich soll eine Randwertbedingung erfüllt sein:

$$u(x) = u_0(x) \text{ für } x \in M \quad (4.4)$$

mit  $M$  eine  $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Das Problem (4.3)-(4.4) löst man in zwei Schritten.

- Man löse erstens  $x'(t) = \vec{v}(x(t))$ . Wenn  $x \mapsto v(x)$  die Lipschitzbedingung erfüllt, gibt es für jedes  $x_0 \in M$  genau eine Lösung von dem Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = \vec{v}(x(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Dies folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf. Die Lösung  $t \mapsto x(t; x_0)$  ist stetig differenzierbar.

Die Lösungen von (4.5) nennt man die *charakteristischen Kurven* für (4.3). Aus der Eindeutigkeit und der Tatsache, dass  $x'(t) = \vec{v}(x(t))$  autonom ist, folgt:

**Lemma 4.2** Sei  $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ . Wenn zwei charakteristische Kurven  $t \mapsto x_a(t)$  und  $t \mapsto x_b(t)$  zu der (semi)linearen Transportgleichung (4.3) sich schneiden, sind sie „identisch“: es gibt  $T \in \mathbb{R}$  mit  $x_a(t) = x_b(t+T)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

- Sei  $t \mapsto x(t; x_0)$  eine Lösung von (4.5) und schreibe  $U(t) = u(x(t; x_0))$ . Definiere  $F(t, u) = f(x(t; x_0), u)$ . Wenn  $u$  (4.3) erfüllt, dann gilt

$$\begin{aligned} U'(t) &= x'(t; x_0) \cdot \nabla u(x(t; x_0)) = \vec{v}(x(t; x_0)) \cdot \nabla u(x(t; x_0)) = \\ &= f(x(t; x_0), u(x(t; x_0))) = F(t, U(t)). \end{aligned}$$

Wenn  $(x, u) \mapsto f(x, u)$  die Lipschitz-Bedingung erfüllt, erfüllt  $(t, u) \mapsto F(t, u)$  die Lipschitz-Bedingung. Auch hier kann man den Satz von Picard-Lindelöf anwenden um genau eine Lösung zu finden zu

$$\begin{cases} U'(t) = F(t, U(t)), \\ U(0) = u_0(x_0). \end{cases} \quad (4.6)$$

Schreibe für diese Lösung  $t \mapsto U(t; x_0)$ .

Für die Funktion  $u$ , die (4.3)-(4.4) lösen soll, findet man

$$u(x(t; x_0)) = U(t; x_0).$$

Es ist noch nicht klar, ob  $u$  so tatsächlich wohldefiniert ist in einer Umgebung von  $M$ . Die Funktion könnte mehrfach oder sogar überhaupt nicht definiert sein. Wir brauchen dafür die folgende Bedingung.

**Bedingung 4.3** Sei  $M$  eine  $(n - 1)$ -dimensionale  $C^2$ -Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$  und sei  $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  ein Vektorfeld. Wir schreiben  $\vec{v}(x)$  für einen Normalenvektor an  $M$  in  $x \in M$ . Man sagt die Transversalitätsbedingung ist erfüllt, wenn

$$\vec{v}(x) \cdot \vec{v}(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in M. \quad (4.7)$$

**Proposition 4.4** Sei  $M$  eine  $(n - 1)$ -dimensionale  $C^2$ -Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$  und sei  $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^n)$  derart, dass die Transversalitätsbedingung (4.7) erfüllt ist. Sei außerdem  $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$  und  $u_0 \in C^1(M)$ . Dann gibt es lokal genau eine Lösung  $x \mapsto u(x)$  von

$$\begin{cases} \vec{v}(x) \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)), \\ u(x) = u_0(x) \text{ für } x \in M. \end{cases} \quad (4.8)$$

**Bemerkung 4.4.1** Die Lösungen lassen sich sogar definieren auf dem ganzen Gebiet, welches von diesen charakteristischen Kurven überdeckt wird. Bei diesen Kurven kann mehreres passieren: sie hauen ab nach  $\infty$ ; sie häufen sich in einem Punkt; sie kommen zurück zu der Mannigfaltigkeit und auch Kombinationen sind möglich. Genaueres erfahren Sie in einer Vorlesung Dynamische Systeme.

**Beweis.** Weil  $M$  eine  $(n - 1)$ -dimensionale  $C^2$ -Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$  ist, gibt es in der Nähe von  $x_M$  ein lokales Koordinatensystem für  $M$

$$\Psi : B_1(0) \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n.$$

Durch die Bedingung in (4.7) gibt

$$(y_1, \dots, y_{n-1}, t) \mapsto \Psi(y_1, \dots, y_{n-1}) + t v(\Psi(y_1, \dots, y_{n-1}))$$

ein lokales Koordinatensystem für  $\mathbb{R}^n$  in der Nähe von  $x_M$ . Nun betrachten wir

$$(y_1, \dots, y_{n-1}, t) \mapsto x(t; \Psi(y_1, \dots, y_{n-1})). \quad (4.9)$$

Weil

$$\begin{aligned} \nabla_y x(t; \Psi(y_1, \dots, y_{n-1}))|_{(0, \dots, 0, 0)} &= \nabla_y \Psi(y_1, \dots, y_{n-1})|_{(0, \dots, 0)}, \\ \frac{\partial}{\partial t} x(t; \Psi(y_1, \dots, y_{n-1}))|_{(0, \dots, 0, 0)} &= v(x_M), \end{aligned}$$

und diese Ableitungen stetig sind, ist auch (4.9) lokal ein wohldefiniertes Koordinatensystem. Anders gesagt, die Funktion  $u$  mit

$$u(x(t; \Psi(y))) := U(t; \Psi(y))$$

ist wohldefiniert. Wegen Lemma 4.2 und der Transversalitätsbedingung ist  $u$  sogar eindeutig definiert auf  $\Omega = \{x(t; \Psi(y)); t \in [0, T_{\Psi(y)}] \text{ und } y \in M\}$ . Hier ist  $T_{\Psi(y)} \in (0, \infty]$  entweder definiert durch das maximale Existenzintervall oder durch die Bedingung  $x(T_{\Psi(y)}; \Psi(y)) \in M$ .

Die Konstruktion zeigt uns, dass die Differentialgleichung erfüllt ist und weil jeder Punkt in einer kleinen Umgebung eindeutig über eine charakteristische Kurve zurück zu führen ist auf ein Anfangswertproblem für eine gewöhnliche Differentialgleichung, ist diese klassische Lösung lokal eindeutig. ■

**Beispiel 4.5** Finde die Lösung von

$$\begin{cases} u_x(x, y) + y u_y(x, y) = u(x, y), \\ u(x, 1) = x + 1. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung kann man schreiben als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \cdot \nabla u(x, y) = u(x, y).$$

Die Transversalitätsbedingung ist erfüllt, weil

$$\vec{v}(x, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nicht in der Tangentialrichtung von  $\Gamma = \{(x, 1); x \in \mathbb{R}\}$  liegt.

Schritt 1: Wir suchen erst die charakteristischen Kurven, die durch  $\{(x_0, 1); x_0 \in \mathbb{R}\}$  gehen:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y(t) \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen sind

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Schritt 2: Wir suchen die Lösungen  $U(\cdot) = U(\cdot; x_0)$  von

$$\begin{cases} U'(t) = U(t), \\ U(0) = x_0 + 1, \end{cases}$$

und finden

$$U(t; x_0) = (x_0 + 1) e^t.$$

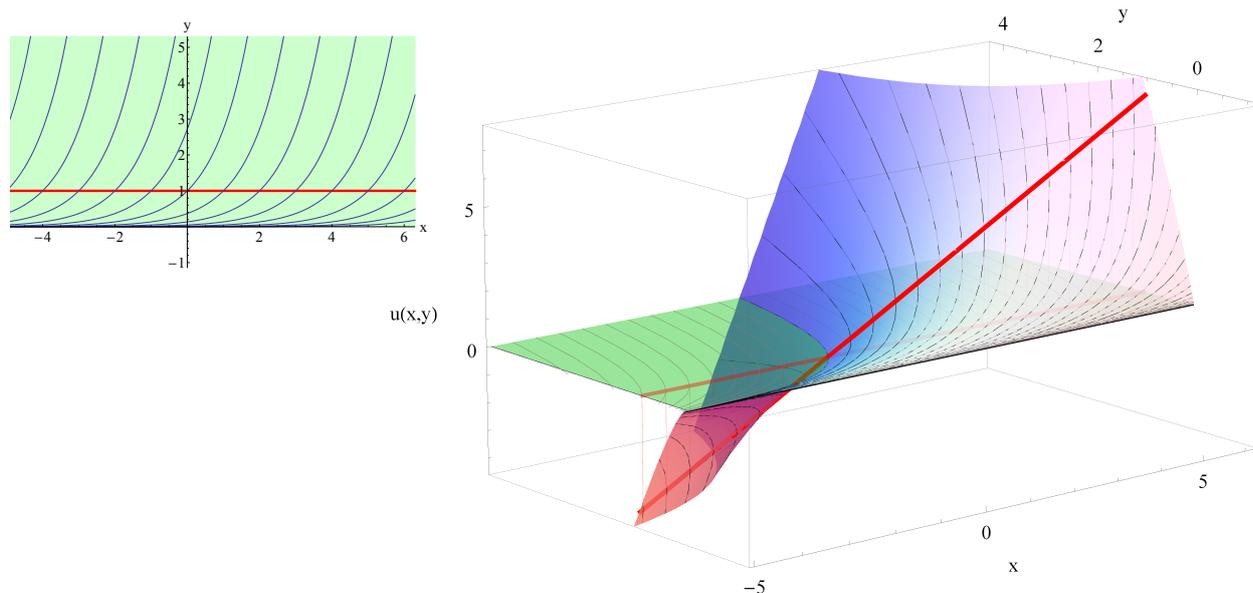


Abbildung 4.2: Skizzen zu Beispiel 4.5. Linksoben die charakteristischen Kurven und rechts die Lösung oberhalb den charakteristischen Kurven. In rot ist die Bedingung  $u(x, 1) = x + 1$  dargestellt.

Schritt 3: Wir müssen noch zurückrechnen zu  $(x, y)$ -Koordinaten. Es gilt

$$t = \ln(y) \quad \text{und} \quad x_0 = x - t = x - \ln(y)$$

und man findet für  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ :

$$u(x, y) = U(t; x_0) = U(\ln(y); x - \ln(y)) = (x - \ln(y) + 1)y.$$

Für  $y \leq 0$  ist die Lösung nicht bestimmt.

## 4.2 Quasilineare Transportgleichungen

Gemeint sind Differentialgleichungen der Form

$$\vec{v}(x, u) \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)).$$

Wenn versucht wird, hier diese Methode mit den charakteristischen Kurven anzuwenden, bemerkt man, dass diese Kurven abhängig sind von der Lösung  $u$ . Das bedeutet, dass man das Finden dieser Kurven nicht mehr trennen kann von dem Lösen entlang dieser Kurven. Trotzdem gibt es die Möglichkeit beides gleichzeitig zu tun! Man betrachte das folgende System von  $n + 1$  Gleichungen

$$\begin{cases} x'(t) = \vec{v}(x(t), U(t)), \\ U'(t) = f(x(t), U(t)). \end{cases}$$

Hat man Anfangswertbedingungen  $u(x) = u_0(x)$  für  $x \in M$ , eine  $(n - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, bekommt man für jedes  $x_0 \in M$  das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} x'(t) = \vec{v}(x(t), U(t)), \\ U'(t) = f(x(t), U(t)), \\ x(0) = x_0 \quad \text{und} \quad U(0) = u_0(x_0). \end{cases}$$

Wenn  $\vec{v}$  und  $f$  differenzierbar sind, kann man den Satz von Picard-Lindelöf anwenden um eine eindeutige Lösung zu finden bei jedem  $x_0 \in M$ . Schreiben wir für die Lösung

$$t \mapsto \left( x(t; x_0, u_0), U(t; x_0, u_0) \right)$$

Wenn  $u(x)$  wohldefiniert ist durch

$$u(x(t; x_0, u_0)) := U(t; x_0, u_0),$$

das heißt, wenn es genau ein  $(t, x_0) \in \mathbb{R} \times M$  gibt mit  $x = x(t; x_0, u_0)$ , dann gilt

$$x'(t; x_0, u_0) \cdot \nabla u(x(t; x_0, u_0)) = U'(t; x_0, u_0) = f(x(t; x_0, u_0), U(t; x_0, u_0)),$$

und für solche  $x = x(t; x_0, u_0)$  folgt

$$v(x) \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)).$$

Auch hier gilt ein ähnliches Ergebnis wie in Proposition 4.4:

**Proposition 4.6** Sei  $M$  eine  $(n-1)$ -dimensionale  $C^2$ -Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{R}^n)$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$  und  $u_0 \in C^1(M)$ . Wenn  $\vec{v}$  und  $u_0$  derart sind, dass

$$\vec{v}(x, u_0(x)) \cdot \vec{v}(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in M, \quad (4.10)$$

dann gibt es lokal genau eine Lösung  $x \mapsto u(x)$  von

$$\begin{cases} \vec{v}(x, u(x)) \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)), \\ u(x) = u_0(x) \text{ für } x \in M. \end{cases} \quad (4.11)$$

**Beweis.** Dieser ist ähnlich wie der für Proposition 4.4. ■

**Beispiel 4.7** Wir betrachten

$$\begin{cases} u(x, y) u_x(x, y) + u_y(x, y) = 0, \\ u(x, 0) = \frac{1}{2}\pi - \arctan x. \end{cases} \quad (4.12)$$

Um dieses System mit dem obigen Ansatz zu lösen, betrachtet man

$$\begin{cases} x'(t) = U(t) & \text{mit } x(0) = s, \\ y'(t) = 1 & \text{mit } y(0) = 0, \\ U'(t) = 0 & \text{mit } U(0) = \frac{1}{2}\pi - \arctan s. \end{cases}$$

Es folgt, wenn wir nach  $t$  integrieren und anschließend die Anfangswerte einsetzen, dass

$$\begin{aligned} U(t) &= U(0) = \frac{1}{2}\pi - \arctan s, \\ y(t) &= y(0) + t = t, \\ x(t) &= x(0) + \int_0^t U(\tau) d\tau = s + t \left( \frac{1}{2}\pi - \arctan s \right), \end{aligned}$$

und

$$U(t) = u(x(t), y(t)) = u\left(s + t \left( \frac{1}{2}\pi - \arctan s \right), t\right) = \frac{1}{2}\pi - \arctan s. \quad (4.13)$$

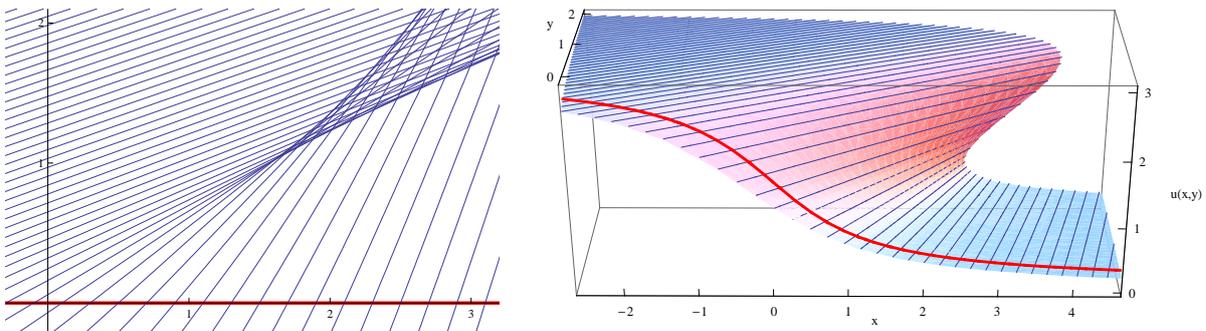


Abbildung 4.3: Skizzen zu Beispiel 4.7. Links die teilweise sich überschneidenden charakteristischen Kurven und rechts eine Skizze zu den Parametrisierungen  $(s, t) \mapsto (x(t; s), y(t; s), U(t; s))$ . In rot ist die Bedingung  $u(x, 0) = \frac{1}{2}\pi - \arctan x$  dargestellt. Die Mannigfaltigkeit  $(s, t) \mapsto (x(t; s), y(t; s), U(t; s))$  lässt sich nur bedingt als Graph einer Funktion  $(x, y) \mapsto u(x, y)$  darstellen.

Wenn wir versuchen die Lösung in  $x$  und  $y$  darzustellen, dann folgt  $t = y$  und  $s$  sollen wir lösen aus

$$x = s + y \left( \frac{1}{2}\pi - \arctan s \right). \quad (4.14)$$

Das ist möglich, wenn  $y \leq 1$ , denn dann ist die Funktion  $s \mapsto s - y \arctan s$  monoton. Für  $y > 1$  ist diese Funktion nicht monoton und (4.14) ist dann nicht eindeutig lösbar in  $s$ .

### 4.2.1 Stoßwellen

Bei quasilinearen Transportgleichungen gibt es also Probleme, weil charakteristische Kurven abhängen von der Lösung selber. Das bedeutet, dass die Differentialgleichung für die charakteristischen Kurven nicht autonom ist und die Lösungen zu den verschiedenen Anfangswerten sich schneiden können. Bei einer autonomen Differentialgleichung mit Lipschitz-Bedingung ist solches nicht möglich. In diesem Abschnitt werden wir erklären, wie man bei einem solchen Fall vorgeht. Wir werden uns beschränken auf zwei Dimensionen und sogar auf Anfangswertprobleme der Gestalt:

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.15)$$

Kommen wir zurück auf Beispiel 4.7. Die Differentialgleichung  $u u_x + u_y = 0$  nennt man die *nicht-viskose Burgersgleichung*<sup>1</sup>. Üblicherweise wird sie geschrieben als

$$u_t + \frac{1}{2} (u^2)_x = 0, \quad (4.16)$$

wobei  $t$  die Zeit- und  $x$  die Raumvariable ist. Sie wird als ein einfaches Modell für eine eindimensionale Strömung gesehen wie zum Beispiel für die Verkehrsdichte im Straßenverkehr. Im letzten Beispiel haben wir gesehen, dass sich dieses Modell an bestimmten Stellen nicht mehr eindeutig fortsetzen lässt. Man hat nun zwei Möglichkeiten: Entweder verwirft man dieses Modell als nicht tauglich oder man erweitert den Lösungsbegriff, das heißt, man lässt allgemeinere Lösungstypen zu.

Eine erste Möglichkeit, die man für (4.15) in Betracht zieht, ist wenn man statt (4.16) die *viskose Burgersgleichung* betrachtet:

$$u_t + \frac{1}{2} (u^2)_x = \varepsilon u_{xx}, \quad (4.17)$$

mit  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Diese Gleichung ist zweiter Ordnung und passt nicht in dieses Kapitel.

Eine zweite Möglichkeit wäre zum Beispiel distributionelle Lösungen zu betrachten. Wir passen die Definition von distributionelle Lösung an für beschränkte Funktionen und nehmen zusätzlich die Anfangswertbedingung mit herein:

**Definition 4.8** Wir nennen  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  eine *Integrallösung* von (4.15), wenn

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} (u \varphi_t + F(u) \varphi_x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty)). \quad (4.18)$$

Dieses Integral ist so gewählt, dass die Integralgleichung für klassische Lösungen erfüllt ist. Denn für  $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$  und  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$  gilt mit partieller Integration nach  $t$  beziehungsweise nach  $x$ , dass

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} u \varphi_t dx dt &= - \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx - \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} u_t \varphi dx dt, \\ \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} F(u) \varphi_x dx dt &= - \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} F(u)_x \varphi dx dt, \end{aligned}$$

und (4.15) liefert (4.18). Und umgekehrt, wenn  $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$  ist und (4.18) erfüllt, dann folgt sowohl die Differentialgleichung im klassischen Sinne als auch die Anfangswertbedingung.

<sup>1</sup>Johannes Martinus Burgers (1895–1981), Technische Hogeschool Delft, 1940.

Die Frage ist nun, ob diese Definition auch reicht, um eine Lösung auszuwählen die fast überall eindeutig definiert ist. Oder, anders gesagt, welchen charakteristischen Kurven sollen wir in dem mehrfach belegten Gebiet folgen? Eine vernünftige Lösung scheint zu sein, dass wir annehmen, dass es eine trennende Kurve gibt. An dieser trennenden Kurve wird die Lösung einen Sprung haben.

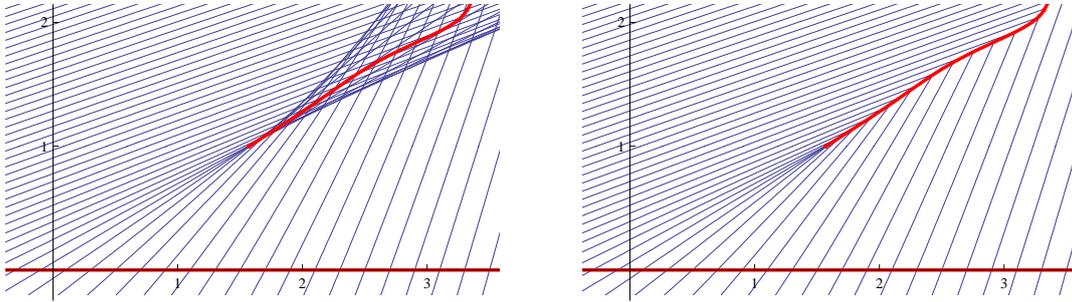


Abbildung 4.4: Welche Unstetigkeitskurve ist die richtige?

Nennen wir das Gebiet links von der Stoßwelle  $\Omega_\ell$  und rechts  $\Omega_r$ . Die Trennkurve nennen wir  $S$  und wir nehmen an, dass sie  $C^1$  ist. Links und rechts haben wir klassische Lösungen  $u_\ell$  und  $u_r$ . Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} (u \varphi_t + F(u) \varphi_x) dx dt = \\ &= \iint_{\Omega_\ell} (u_\ell \varphi_t + F(u_\ell) \varphi_x) dx dt + \iint_{\Omega_r} (u_r \varphi_t + F(u_r) \varphi_x) dx dt \\ &= \int_S \varphi \begin{pmatrix} F(u_\ell) \\ u_\ell \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu}_\ell d\sigma + \int_S \varphi \begin{pmatrix} F(u_r) \\ u_r \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu}_r d\sigma \\ &= \int_S \varphi \begin{pmatrix} F(u_\ell) - F(u_r) \\ u_\ell - u_r \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu}_\ell d\sigma. \end{aligned}$$

Weil dies für alle Testfunktionen  $\varphi$  gilt, folgt

$$\begin{pmatrix} F(u_\ell) - F(u_r) \\ u_\ell - u_r \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu}_\ell = 0.$$

Wir kennen so die Richtung von  $S$ . Eine Parametrisierung von  $S$  findet man durch

$$\vec{\gamma}'(\tau) = \begin{pmatrix} F(u_\ell(\vec{\gamma}(\tau))) - F(u_r(\vec{\gamma}(\tau))) \\ u_\ell(\vec{\gamma}(\tau)) - u_r(\vec{\gamma}(\tau)) \end{pmatrix} \text{ mit } \vec{\gamma}(0) = S_0, \quad (4.19)$$

wenn  $S_0$  der Anfang der Unstetigkeitskurve ist. Statt (4.19) kann man auch wie folgt parametrisieren

$$\begin{pmatrix} x'(\tau) \\ t'(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F(u_\ell(\vec{\gamma}(\tau))) - F(u_r(\vec{\gamma}(\tau)))}{u_\ell(\vec{\gamma}(\tau)) - u_r(\vec{\gamma}(\tau))} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x(0) \\ t(0) \end{pmatrix} = S_0 \quad (4.20)$$

und man findet die Kurve  $(x(t), t)$  durch

$$x'(t) = \frac{F(u_\ell(x(t), t)) - F(u_r(x(t), t))}{u_\ell(x(t), t) - u_r(x(t), t)}.$$

Die Geschwindigkeit der Unstetigkeit an der Stelle  $S = x(t)$  ist  $v_S = x'(t)$ . Anders gesagt, es gilt:

**Bedingung 4.9 (Die Rankine-Hugoniot-Bedingung)**<sup>2 3</sup>

$$(u_\ell - u_r) v_S = (F(u_\ell) - F(u_r)). \quad (4.21)$$

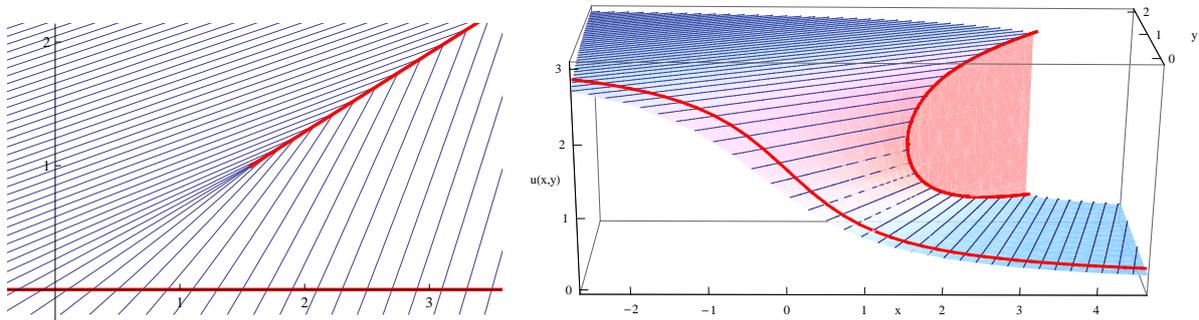


Abbildung 4.5: Die Unstetigkeitskurve, die die Rankine-Hugoniot-Bedingung erfüllt. Vergleichen Sie mit Abbildung 4.3

Diese Bedingung soll wie folgt gelesen werden. Das Teilgebiet, in dem die Unstetigkeitskurve liegen sollte, also das Gebiet in dem mehrere charakteristische Kurven aufeinander treffen, wird sowohl durch charakteristische Kurven von rechts als auch durch charakteristische Kurven von links beschrieben (und sogar auch noch durch charakteristische Kurven dazwischen). Man definiert in diesem Teilgebiet  $u_\ell$  durch die charakteristischen Kurven von links und  $u_r$  durch die charakteristischen Kurven von rechts. Auf dem Teilgebiet ist nun sowohl  $u_\ell$  als  $u_r$  definiert und so auch die Bedingung in (4.21).

**Beispiel 4.10** Wir kommen zurück auf Beispiel 4.7. Welche Unstetigkeitskurve erfüllt die Rankine-Hugoniot-Bedingung? Für das Randwertproblem (4.12) gilt  $F(u) = \frac{1}{2}u^2$  und es folgt

$$v_S = \frac{\frac{1}{2}u_\ell^2 - \frac{1}{2}u_r^2}{u_\ell - u_r} = \frac{u_\ell + u_r}{2}.$$

Wir können zeigen, dass die Unstetigkeitskurve durch  $(x(t), t)$  mit  $x(t) = \frac{1}{2}\pi t$  parametrisiert wird. Denn an der Stelle  $(\frac{1}{2}\pi t, t)$  mit  $t > 1$  treffen sich die linke und die rechte charakteristische Kurve für

$$s_r = -s_\ell = \mu(t),$$

wobei  $\mu(t)$  die positive Lösung von  $\mu = t \arctan \mu$  sei. Es gilt, dass

$$x'(t) = \frac{u_\ell + u_r}{2} = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\arctan s_\ell + \arctan s_r) = \frac{1}{2}\pi.$$

Die passenden Bilder stehen in Abbildung 4.5. Die Kurve  $\{(x(t), t); t \geq 1\}$  ist eine Stoßwelle.

<sup>2</sup>Pierre-Henri Hugoniot (1851–1887), Französischer Mathematiker und Artillerieoffizier.

<sup>3</sup>William John Macquorn Rankine (1820–1872), Schottischer Physiker, Bauingenieur und Dichter:

The Three Foot Rule

When I was bound apprentice and learnt to use my hands  
Folk never talked of measures that came from foreign lands  
Now I'm a British Workman, too old to go to school  
So whether the chisel or file I hold, I'll stick to my three-foot rule.

Some talk of millimetres and some of kilograms  
And some of decilitres to measure beer and drams  
But I'm a British Workman, too old to go to school  
So by pounds I'll eat, and by quarts I'll drink, and I'll work by my three-foot rule.

A party of astronomers went measuring the Earth  
And 40 million metres they took to be its girth  
Five hundred million inches though, go through from pole to pole  
So let's stick to inches, feet and yards and the good old three-foot rule.

The great Egyptian pyramid's a thousand yards about  
And when the masons finished it they raised a joyful shout  
The chap that planned that building, I'm bound he was no fool  
And now 'tis proved beyond a doubt he used a three-foot rule.

Here's health to every learned man that goes by common sense  
And would not plague the workman by any vain pretence  
But as for those philanthropists who'd send us back to school  
Oh! bless their eyes, if ever they tries to put down the three-foot rule.

J. M. RANKINE

### 4.2.2 Verdünnungswellen

Lösungen, wie sie in Definition 4.8 definiert sind, erlauben es, Anfangswerte  $u_0$  in  $L^\infty(\mathbb{R})$  zu nehmen. Betrachten wir das Problem

$$\begin{cases} u(x, t) u_x(x, t) + u_t(x, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (4.22)$$

mit

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x \geq 0. \end{cases} \quad (4.23)$$

Die Lösung mit Hilfe der charakteristischen Kurven findet man durch

$$\begin{cases} x'(t) = U(t) & \text{mit } x(0) = s, \\ T'(t) = 1 & \text{mit } T(0) = 0, \\ U'(t) = 0 & \text{mit } U(0) = u_0(s), \end{cases}$$

nämlich

$$\begin{aligned} U(t) &= u_0(s), \\ x(t) &= s + t u_0(s), \\ T(t) &= t. \end{aligned}$$

Für  $s < 0$  finden wir  $x(t) = s$  und so folgt  $u(x, t) = 0$  für  $x < 0$  und  $t \geq 0$ . Für  $s \geq 0$  gilt  $x(t) = s + t$ , und es folgt  $u(x, t) = 1$  für  $x \geq t \geq 0$ . Also

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \text{ und } t \geq 0 \\ 1 & \text{für } x \geq t \text{ und } t \geq 0 \end{cases}$$

Diese Methode gibt uns aber keine Lösung auf der Menge

$$\{(x, t); t > 0 \text{ und } x \in [0, t)\}.$$

Mathematisch gibt es viele Möglichkeiten, dieses Dreieck zu füllen. Wir geben mal drei an:

$$1) \quad u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < t \text{ und } t \geq 0, \\ 1 & \text{für } x \geq t \text{ und } t \geq 0, \end{cases} \quad (4.24)$$

$$2) \quad u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \frac{1}{2}t \text{ und } t \geq 0, \\ 1 & \text{für } x \geq \frac{1}{2}t \text{ und } t \geq 0, \end{cases} \quad (4.25)$$

$$3) \quad u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \text{ und } t \geq 0, \\ x/t & \text{für } x \in (0, t) \text{ und } t \geq 0 \\ 1 & \text{für } x \geq t \text{ und } t \geq 0. \end{cases} \quad (4.26)$$

Keine dieser drei Funktionen ist eine klassische Lösung. Die erste hat ein Problem auf der Geraden  $x = t$ ; die zweite auf  $x = \frac{1}{2}t$ ; die dritte sowohl auf  $x = 0$  als auch auf  $x = t$ . Die Funktionen in 2) und 3) sind beide Integrallösungen. Welche würde physikalisch passen?

In der Physik gibt es die sogenannte Entropie-Bedingung. Grob kann man diese Bedingung wie folgt beschreiben: Man meide Unstetigkeitskurven, wenn sie nicht notwendig sind. Wenn die Geschwindigkeit  $x'(t)$  einer charakteristischen Kurve  $(x(t), t)$  rechts von einer Unstetigkeit größer wäre als die Geschwindigkeit einer charakteristischen Kurve links von dieser Unstetigkeit bräuchte man keine Unstetigkeit, sondern hätte es durch eine Funktion, wie in (4.26), lösen können. Wenn für

$$u_t + F(u)_x = 0$$

die Funktion  $F(u)_x$  eine Unstetigkeit in  $S$  hat, sagt man:

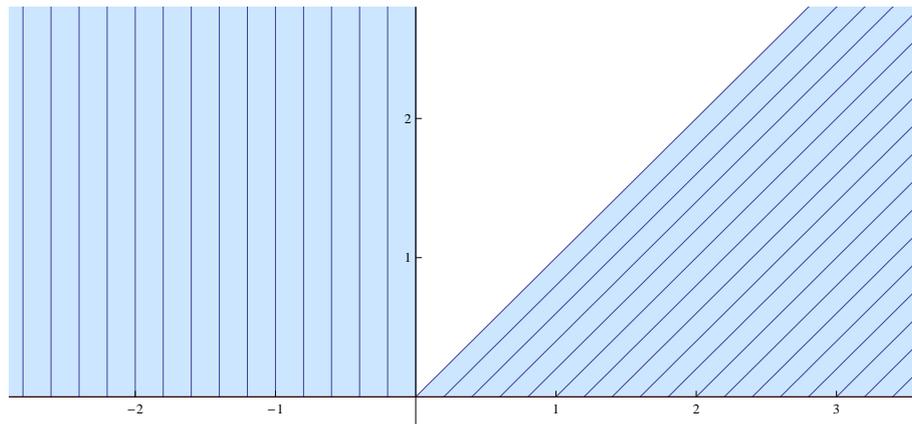


Abbildung 4.6: Wie füllt man das leere Dreieck?

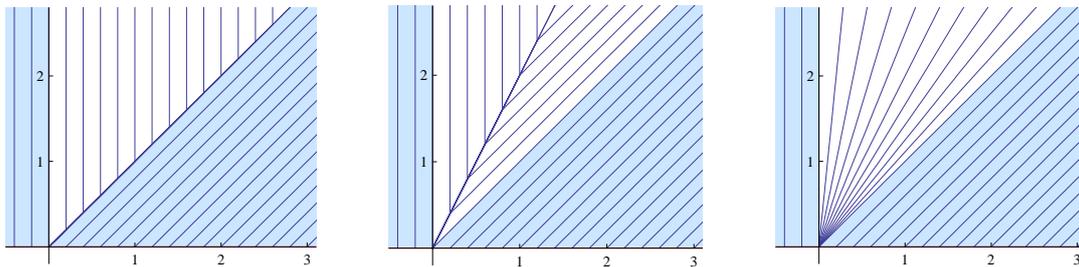


Abbildung 4.7: Einige Möglichkeiten: die in der Mitte und rechts wären mathematisch vertretbar; physikalisch sinnvoll ist wegen der Entropie-Bedingung nur die rechte Lösung.

**Bedingung 4.11** Die Entropie-Bedingung ist erfüllt für eine Lösung von (4.15), wenn an einer Unstetigkeitsstelle  $S$  gilt

$$F'(u_\ell) > F'(u_r). \quad (4.27)$$

Wenn  $S = \{(\sigma(t), t) ; t \in (t_1, t_2)\}$ , dann ist mit (4.27) gemeint, dass

$$F'(\lim_{x \uparrow \sigma(t)} u(x, t)) > F'(\lim_{x \downarrow \sigma(t)} u(x, t)) \text{ für alle } t \in (t_1, t_2).$$

Die Geschwindigkeit der charakteristischen Kurve an der Stelle  $(x, t)$  ist übrigens  $F'(u(x, t))$ , denn wenn  $(x(\tau), t(\tau))$  eine charakteristische Kurve ist, gilt

$$\begin{pmatrix} x'(\tau) \\ t'(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F'(u(x(\tau), t(\tau))) \\ 1 \end{pmatrix}$$

und es folgt  $t = \tau$  und  $x'(\tau) = F'(u(x(\tau), \tau))$ .

Für eine streng konvexe Funktion  $F$  ist  $F'$  eine streng wachsende Funktion und bedeutet (4.27)  $u_\ell > u_r$ . Man sieht nun auch sofort, dass diese Entropie-Bedingung für einen Unterschied sorgt bezüglich der „Zeit“-Richtung. Bei charakteristischen Kurven war es nicht wesentlich in welche Richtung man entlang geht; die Rankine-Hugoniot und die Entropie-Bedingung sind richtungsabhängig.

**Definition 4.12** Die Funktion  $u$  ist eine physikalische relevante Lösung von (4.15),

1. wenn  $u$  konstant ist entlang charakteristischen Kurven mit Ausnahme von Unstetigkeitskurve(n)  $S$ , und

2. wenn es eine Unstetigkeitskurve  $S$  gibt, ist da die Rankine-Hugoniot Bedingung und die Entropie-Bedingung erfüllt.

**Bemerkung 4.12.1** Diese Bedingungen liefern das folgende:

- Wenn die anfänglichen charakteristischen Kurven ein Teilgebiet eindeutig beschreiben, ist die Lösung konstant entlang jeder dieser Kurven.
- Wenn ein Teilgebiet mehrfach durch charakteristische Kurven beschrieben wird, ist dieses Teilgebiet derart aufgeteilt, dass bei der Grenzkurve die Rankine-Hugoniot-Bedingung und die Entropie-Bedingung erfüllt sind. Das heißt, die Grenzkurve wird bestimmt von (4.21) und man darf bei dieser Kurve nur eine Unstetigkeit in der von (4.27) festgelegten Richtung haben. Unstetigkeitskurven, die diese Bedingungen erfüllen, nennt man Stoßwellen<sup>4</sup>.
- Wenn ein Teilgebiet nicht durch die anfänglichen charakteristischen Kurven beschrieben wird, sind da neue charakteristische Kurven zu definieren. Die Entropie-Bedingung erlaubt nur Unstetigkeiten in eine Richtung und verhindert so das Entstehen von Unstetigkeitskurven am unteren Rand dieses Teilgebiets. Das bedeutet, dass man an der Stelle, wo dieses Gebiet sich auftut, nur eine stetige Verdünnungswelle<sup>5</sup> als Lösung zulassen kann.

**Bemerkung 4.12.2** Man kann zeigen, dass die Rankine-Hugoniot-Bedingung und die Entropie-Bedingung derartig sind, dass die Lösungen von (4.15) im Abhängigkeit vom Anfangswert robust sind. Die genaue Beschreibung in welchem Sinne geben wir hier nicht.

Die physikalische relevante Lösung zu (4.22)-(4.23) hat eine Verdünnungswelle. Diese Lösung ist die dritte Möglichkeit (4.26). Eine Skizze findet man in Abbildung 4.8.

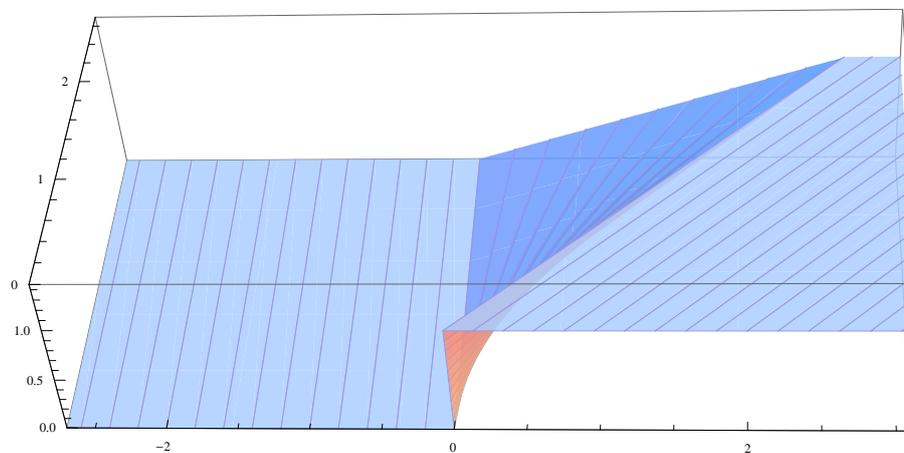


Abbildung 4.8: Eine physikalisch relevante Lösung zu (4.22)-(4.23).

## 4.3 Übersicht

Wir gehen davon aus, dass die Transversalitätsbedingung im Folgenden erfüllt ist. Übrigens, wenn man hier Lösen schreibt, bedeutet es, dass man den Satz von Picard-Lindelöf verwenden kann für das zugehörige Anfangswertproblem der gewöhnlichen Differentialgleichung. In konkreten Fällen kann man nur selten eine explizite Lösung finden.

<sup>4</sup>Shock wave.

<sup>5</sup>Als Übersetzung von rarefaction wave.

**Linear und semilinear mit konstanten Koeffizienten**

$$\begin{cases} \vec{v} \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)), \\ u(x) = u_0(x) \text{ für } x \in M. \end{cases}$$

1. Die charakteristischen Kurven sind  $t \mapsto x_0 + t\vec{v}$ .
2. Man löse  $U(t; x_0)$  aus

$$\begin{cases} U'(t) = f(x_0 + t\vec{v}, U(t)), \\ U(0) = u_0(x_0) \text{ für } x_0 \in M. \end{cases}$$

3. Setze

$$u(x_0 + t\vec{v}) := U(t; x_0)$$

und transformiere nach Standardkoordinaten mittels  $x = x_0 + t\vec{v}$ .

**Linear und semilinear mit variablen Koeffizienten:**

$$\begin{cases} \vec{v}(x) \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)), \\ u(x) = u_0(x) \text{ für } x \in M. \end{cases}$$

1. Man löse die charakteristischen Kurven  $\vec{x}(t; x_0)$  aus

$$\begin{cases} \vec{x}'(t) = \vec{v}(\vec{x}(t)), \\ \vec{x}(0) = x_0 \text{ für } x_0 \in M. \end{cases}$$

2. Man löse  $U(t; x_0)$  aus

$$\begin{cases} U'(t) = f(\vec{x}(t), U(t)), \\ U(0) = u_0(x_0) \text{ für } x_0 \in M. \end{cases}$$

3. Setze

$$u(\vec{x}(t)) := U(t; x_0)$$

und transformiere nach Standardkoordinaten mittels  $x = \vec{x}(t)$ . Diese Transformation ist eindeutig; die Existenz ist nur lokal garantiert.

**Quasilinear:**

$$\begin{cases} \vec{v}(x, u(x)) \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)), \\ u(x) = u_0(x) \text{ für } x \in M. \end{cases}$$

1. & 2. Man löse gleichzeitig die charakteristischen Kurven  $\vec{x}(t; x_0, u_0)$  und die Funktionen  $U(t; x_0, u_0)$  entlang dieser Kurven aus

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \vec{x}(t) \\ U(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \vec{v}(\vec{x}(t), U(t)) \\ f(\vec{x}(t), U(t)) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \vec{x}(0) \\ U(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ u_0(x_0) \end{pmatrix} \text{ für } x_0 \in M. \end{cases}$$

3. Setze

$$u(\vec{x}(t)) := U(t; x_0, u_0)$$

und transformiere nach Standardkoordinaten mittels  $x = \vec{x}(t; x_0, u_0)$ . Für  $C^1$ -Funktionen  $\vec{v}$  und  $u_0$  existiert diese Transformation lokal und ist lokal eindeutig.

Man definiert physikalisch begründete Stoßwellen mithilfe des schwachen Lösungsbegriffs, wenn die Eindeutigkeit der Transformation fehlt. Bei unstetigen Anfangsbedingungen können auch Verdünnungswellen physikalisch Sinn machen.

# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 5



## Klassifizierung zweiter Ordnung

### 5.1 Die einfachsten Fälle als Begründung

#### 5.1.1 Das Symbol

Wir betrachten in diesem Abschnitt partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei Dimensionen und mit konstanten Koeffizienten. Das heißt, diese Differentialgleichungen sind wie folgt:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = \varphi, \quad (5.1)$$

mit  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ . Eine solche Differentialgleichung ist rein zweiter Ordnung, wenn  $d = e = f = 0$ :

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = \varphi \quad (5.2)$$

**Definition 5.1** Sei  $L(\partial_x, \partial_y)$  ein linearer partieller Differentialoperator. Dann nennt man  $L(\xi, \eta)$  das Symbol des Operators.

**Bemerkung 5.1.1** Man ersetzt  $\partial_x$  durch  $\xi$  und  $\partial_y$  durch  $\eta$ . Das Symbol ist ein Polynom in  $(\xi, \eta)$ .

**Bemerkung 5.1.2** Auch bei linearen partiellen Differentialoperatoren  $L(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$  in höheren Dimensionen und bei höherer Ordnung definiert man das Symbol durch  $L(\xi)$  mit  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Der Grad des Polynoms ist dann genau die Ordnung des Differentialoperators.

Für (5.1) beziehungsweise (5.2) wird dieses Symbol

$$\begin{aligned} L(\xi, \eta) &= a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 + d\xi + e\eta + f, \\ L_0(\xi, \eta) &= a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (5.1,5.2) kann man schreiben als

$$\begin{aligned} L(\partial_x, \partial_y) u &= \varphi, \\ L_0(\partial_x, \partial_y) u &= \varphi. \end{aligned}$$

Wenn  $a \neq 0$  gilt, kann man ohne Verlust der Allgemeinheit  $a = 1$  setzen in (5.1). Auf den Fall, dass  $a = 0$ , kommen wir noch zurück.

### 5.1.2 Zerlegung des Symbols in Linearterme

Für  $a = 1$  versuchen wir das Symbol in Linearterme zu zerlegen:

$$\begin{aligned} L(\xi, \eta) &= (\xi - \tau_1\eta + \sigma_1)(\xi - \tau_2\eta + \sigma_2), \\ L_0(\xi, \eta) &= (\xi - \tau_1\eta)(\xi - \tau_2\eta). \end{aligned}$$

Die Idee, die dahinter steckt, ist, dass man dann vielleicht die Differentialgleichung als zwei Gleichungen erster Ordnung lösen kann:

$$L_0(\partial_x, \partial_y)u = (\partial_x - \tau_1\partial_y)(\partial_x - \tau_2\partial_y)u.$$

Wenn es eine solche Zerlegung gibt, dann sind  $\tau_1, \tau_2$  die Lösungen der algebraischen Gleichung<sup>1</sup>

$$\tau^2 + 2b\tau + c = 0. \quad (5.3)$$

Es gibt grundsätzlich drei Möglichkeiten:

- I. wenn  $b^2 > c$  folgt  $\tau_1 \neq \tau_2 \in \mathbb{R}$ .
- II. wenn  $b^2 = c$  folgt  $\tau_1 = \tau_2 \in \mathbb{R}$ .
- III. wenn  $b^2 < c$  folgt  $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  und  $\tau_1 = \overline{\tau_2}$ .

Dies sieht man sofort, indem man (5.3) löst:

$$\tau_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - c} \text{ oder } \tau_{1,2} = -b \pm i\sqrt{c - b^2}.$$

Wir werden nun diese drei Fälle detaillierter anschauen.

**zu I.** Wenn  $\tau_1 \neq \tau_2 \in \mathbb{R}$  folgt

$$(\xi - \tau_1\eta)(\xi - \tau_2\eta) = \xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2.$$

Man kann (5.2) (mit  $a = 1$ ) umschreiben als

$$\begin{cases} (\partial_x - \tau_2\partial_y)v = \varphi, \\ (\partial_x - \tau_1\partial_y)u = v, \end{cases} \quad (5.4)$$

ein System erster Ordnung. Dieses System kann man in zwei Schritten als zwei Transportgleichungen lösen.

Wenn  $\tau_1 \neq \tau_2$  kann man für (5.1)  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$  finden derart, dass

$$(\xi - \tau_1\eta + \sigma_1)(\xi - \tau_2\eta + \sigma_2) = \xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 + d\xi + e\eta + \sigma_1\sigma_2.$$

Dann kann man (5.1) (mit  $a = 1$ ) umschreiben als

$$\begin{pmatrix} \partial_x - \tau_1\partial_y & 0 \\ 0 & \partial_x - \tau_2\partial_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ f - \sigma_1\sigma_2 & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Dieses System lässt sich nicht mehr als zwei aufeinanderfolgende Transportgleichungen lösen aber man kann es trotzdem mit ähnlichen Methoden angehen.

Wir kommen nun zurück auf  $a = 0$ . Für  $a = 0$  (und  $b \neq 0$ ) gilt ähnliches wie soeben beschrieben, denn es gilt

$$0\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 = (2b\xi + c\eta)\eta.$$

Man kommt wie vorher beschrieben weiter, wenn man nun die Rollen von  $x$  und  $y$  vertauscht. Wenn  $a = b = 0$  und  $c \neq 0$  ist man in der nächsten Kategorie.

<sup>1</sup>Man kann  $L_0(\xi, \eta)$  in ein Produkt von Lineartermen  $(\xi - \tau_1\eta)(\xi - \tau_2\eta)$  zerlegen, wenn  $L_0(\xi, \eta) = 0$  für  $\xi = \tau_i\eta$ . Also findet man diese  $\tau_i$  als Nullstellen von  $\tau \mapsto L_0(\tau\eta, \eta) = (\tau^2 + 2b\tau + c)\eta^2$ .

**zu II.** Wenn  $\tau_1 = \tau_2$  funktioniert diese Aufspaltung nicht unbedingt. Für (5.2) findet man  $(\partial_x - \tau_1 \partial_y)^2 u = \varphi$  und dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung. Für (5.1) findet man

$$(\partial_x - \tau_1 \partial_y + \sigma_1)^2 u + (\lambda \partial_x - \mu \partial_y + \rho) u = \varphi.$$

Wenn  $\mu \neq \lambda \tau_1$  gilt, kann man diese letzte Differentialgleichung nicht als System erster Ordnung schreiben. Ein typisches Beispiel einer solchen Differentialgleichung ist

$$u_{xx} - u_y = \varphi.$$

**zu III.** Wenn die Wurzeln von (5.3) nicht reell sind, scheint es zuerst hoffnungslos diese Differentialgleichung zu spalten, denn wie soll man mit komplexen Termen umgehen? Ein typisches Beispiel ist

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (5.6)$$

Das zugehörige Symbol ist  $L(\xi, \eta) = \xi^2 + \eta^2 = (\xi - i\eta)(\xi + i\eta)$ . Lässt man komplexe Zahlen zu, dann kann man (5.6) mit  $\varphi = 0$  auch schreiben als

$$(\partial_x - i\partial_y)(\partial_x + i\partial_y)u = 0$$

und man findet die folgenden Lösungen

$$u(x, y) = u_1(x + iy) + u_2(x - iy), \quad (5.7)$$

wobei  $u_1$  und  $u_2$  beliebige differenzierbare Funktionen sind. Für komplexe Funktionen macht dies Sinn<sup>2</sup>.

## 5.2 Standardbeispiele zu diesen Fällen

Wir werden einige typische Gleichungen zu diesen unterschiedlichen Fällen betrachten.

### 5.2.1 Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 - \partial_y^2$

Betrachten wir  $u_{xx} - u_{yy} = f$ . Diese Gleichung kann man auch schreiben als

$$(\partial_x + \partial_y)(\partial_x - \partial_y)u = f \quad (5.8)$$

und man könnte sie lösen, indem man nacheinander den charakteristischen Kurven in Richtung  $(1, -1)$  und in Richtung  $(1, 1)$  folgt. In dem neuen Koordinatensystem

$$x = s + t \text{ und } y = s - t$$

---

<sup>2</sup>Eine Funktion, die (5.6) erfüllt, nennt man harmonisch. In einer Vorlesung Funktionentheorie lernt man, dass der Realteil einer analytischen Funktion harmonisch ist. Das gleiche gilt für den Realteil einer anti-analytischen Funktion. Eine Funktion  $f$  ist analytisch auf  $\Omega_{\mathbb{C}} = \{x + iy \in \mathbb{C}; (x, y) \in \Omega\}$ , wenn  $f$  komplex differenzierbar ist auf  $\Omega_{\mathbb{C}}$ . Eine Funktion  $f$  ist anti-analytisch, wenn  $\bar{f}$  komplex differenzierbar ist. Man findet auch so Lösungen wie in (5.7), nämlich durch

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy)) + \operatorname{Re}(g(x - iy)),$$

wobei  $f$  und  $g$  (komplex) differenzierbare Funktionen sind.

wird dies etwas leichter. Setzen wir  $U(s, t) = u(s + t, s - t)$  und  $F(s, t) = f(s + t, s - t)$ , so ändert sich die Differentialgleichung (5.8) über

$$(\partial_x^2 - \partial_y^2) U \left( \frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \right) = \left( \frac{1}{4}U_{ss} + \frac{1}{2}U_{st} + \frac{1}{4}U_{tt} \right) - \left( \frac{1}{4}U_{ss} - \frac{1}{2}U_{st} + \frac{1}{4}U_{tt} \right)$$

in

$$\partial_s \partial_t U = F. \quad (5.9)$$

Welche Art von Randwertbedingungen würde eindeutig eine Lösung bestimmen?

Betrachten wir den Fall  $\Omega = B_1(0)$ . Für (5.9) finden wir

$$\partial_t U(s, t) = \partial_t U(\psi(t), t) + \int_{\psi(t)}^s F(\sigma, t) d\sigma \quad (5.10)$$

und als nächstes

$$U(s, t) = U(s, \varphi(s)) + \int_{\varphi(s)}^t \partial_t U(\psi(\tau), \tau) d\tau + \int_{\varphi(s)}^t \int_{\psi(\tau)}^s F(\sigma, \tau) d\sigma d\tau. \quad (5.11)$$

Hier beschreibt  $t = \varphi(s)$  einen Randteil für  $t$  als Funktion von  $s$  und  $s = \psi(t)$  beschreibt einen Randteil für  $s$  als Funktion von  $t$ . Um die Integrale in (5.11) durch eine Bedingung am Rande festzulegen, hat man die Möglichkeit „rechts unten“ und „links oben“; ähnlich für (5.10) wird es „links unten“ oder „rechts oben“. Betrachten wir den Fall „unten“, dann hat man  $\varphi(s) = -\sqrt{\frac{1}{2} - s^2}$  und  $\psi(t) = -\sqrt{\frac{1}{2} - t^2}$ . Für ein Paar  $(x, y)$  werden die Integralkurven in Abbildung 5.1 skizziert. Schreiben wir  $\Gamma_{[\alpha, \beta]} = \{(\cos \varphi, \sin \varphi); \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$ .

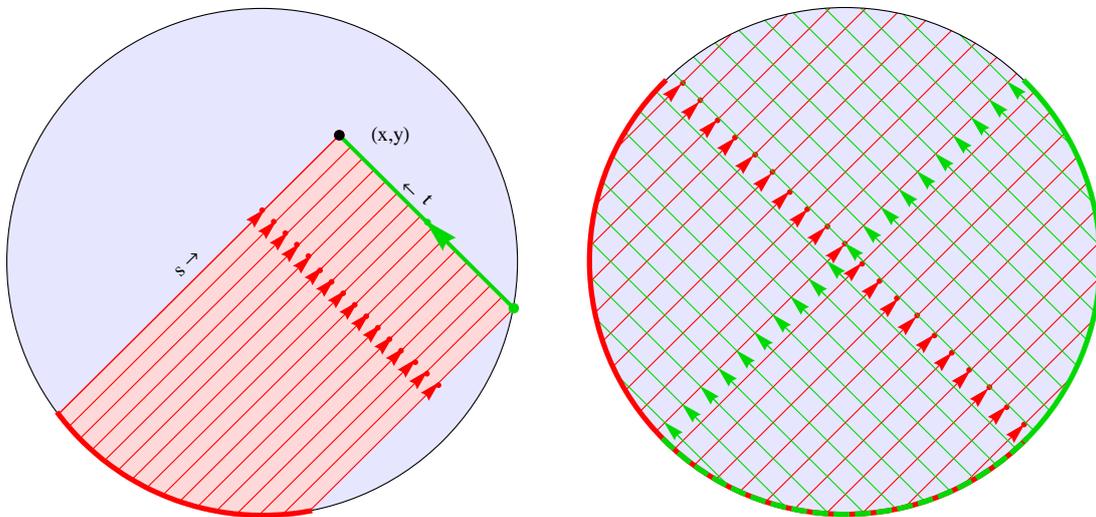


Abbildung 5.1: Links: Um in  $(x, y)$  den Wert  $u(x, y)$  zu bestimmen, braucht man zum Beispiel  $u_t$  auf dem roten Randteil und  $u$  im grünen Randpunkt. Rechts: Um  $u$  auf der ganzen Kreisscheibe festzulegen, passt es  $u_t$  auf dem roten Randteil und  $u$  auf dem grünen Randteil vorzugeben.

Wenn man  $u$  auf der ganzen Kreisscheibe festlegen will, braucht man

$$\partial_t U \text{ auf } \Gamma_{[\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi]} \text{ und } U \text{ auf } \Gamma_{[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]}.$$

Aus Symmetriegründen, man vertausche  $s$  und  $t$ , passt auch

$$U \text{ auf } \Gamma_{[\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi]} \text{ und } \partial_s U \text{ auf } \Gamma_{[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]}.$$

Auf einem Rand, auf dem  $U$  und  $\partial_\nu U$  bekannt sind und wobei  $v$  eine nicht-tangentiale Richtung hat, und wenn  $U \in C^1$  gilt, kennt man alle Richtungsableitungen. So kann man sich sogar davon überzeugen, dass auch folgendes passt:

$$U \text{ auf } \Gamma_{\left[\frac{3}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi\right]} \text{ und } \partial_\nu U \text{ auf } \Gamma_{\left[\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right]}.$$

Wenn man sich dieses Beispiel genau anschaut, kann man folgendes Ergebnis bekommen.

**Proposition 5.2** Sei  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^2$  mit  $\partial\Omega \in C^1$ . Man setzt

$$\begin{aligned} \Gamma_R &= \{x \in \partial\Omega; \text{ es gibt zwei aufwärts gerichtete charakteristische Kurven in } x\}, \\ \Gamma_G &= \{x \in \partial\Omega; \text{ es gibt nur eine aufwärts gerichtete charakteristische Kurve in } x\}. \end{aligned}$$

Wenn die Randwerte es erlauben (stetig sind und mögliche Kompatibilitätsbedingungen erfüllen) kann man mit Hilfe der charakteristischen Kurven, eine (distributionelle) Lösung in  $C(\bar{\Omega})$  von

$$\begin{cases} u_{yy} - u_{xx} = f & \text{in } \Omega, \\ u = u_0 & \text{auf } \Gamma_R \cup \Gamma_G, \\ \partial_\nu u = v_0 & \text{auf } \Gamma_R, \end{cases}$$

konstruieren. Wenn die Randwerte zweimal differenzierbar sind und mögliche zusätzliche Kompatibilitätsbedingungen erfüllen, ist diese Funktion  $u$  sogar in  $C^2(\bar{\Omega})$ .

**Bemerkung 5.2.1** Kompatibilitätsbedingungen müssen erfüllt sein, wenn  $\Gamma_R$  oder  $\Gamma_G$  nicht zusammenhängend sind oder tangential an charakteristischen Kurven verlaufen.

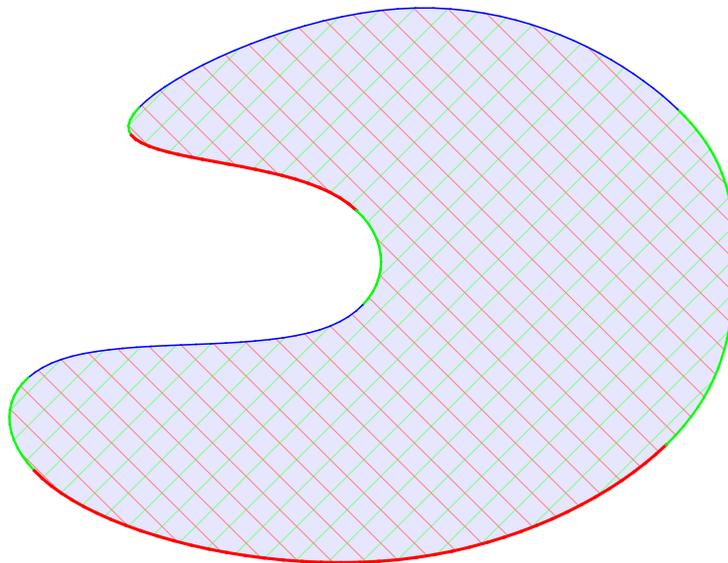


Abbildung 5.2: Auf dem roten Rand  $\Gamma_R$  gibt man  $u$  und  $\partial_\nu u$  an, auf dem grünen  $\Gamma_G$  nur  $u$  und auf dem blauen nichts, und man hat höchstens eine Lösung.

**Beweis.** Die Konstruktion einer Lösung entlang charakteristischer Kurven liefert die Existenz einer schwachen Lösung. Ist diese Lösung eindeutig? Ja, ein direkter Beweis ist sehr geometrisch. Er geht zurück auf  $U_{st} = F$ . Man sucht eine Zick-Zack-Kurve, entlang welcher  $s$  konstant oder  $t$  konstant ist und die auf dem roten Rand anfängt.

Und wieso liegt die Lösung in  $C^2(\bar{\Omega})$ , wenn die Randwerte es erlauben? Erstens soll  $u_0$  und  $v_0$  genügend glatt sein. Zweitens, wie man in Abbildung 5.2 sehen kann, ist  $\Gamma_R$  und auch  $\Gamma_G$  nicht unbedingt zusammenhängend. Um eine  $C^2(\bar{\Omega})$ -Lösung zu finden, soll jeder „Sprung“ von einer Komponente  $\Gamma_R \cup \Gamma_G$  zu  $\partial\Gamma_R$  und  $\partial\Gamma_G$  kompatibel sein. ■

Wir können noch einen Schritt weiter gehen:

**Proposition 5.3** Sei  $L, T \in \mathbb{R}^+$  und sei  $(0, L) \times (0, T)$  das Gebiet in  $\mathbb{R}^2$ . Sei  $f, u_\ell, u_r, u_0$  und  $v_0$  gegeben. Wenn

$$\begin{cases} u_{yy}(x, y) - u_{xx}(x, y) = f(x, y) & \text{für } (x, y) \in (0, L) \times (0, M), \\ u(0, y) = u_\ell(y) & \text{für } y \in (0, M), \\ u(L, y) = u_r(y) & \text{für } y \in (0, M), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in [0, L], \\ u_y(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in [0, L], \end{cases} \quad (5.12)$$

eine Lösung  $u \in C^2([0, L] \times [0, M])$  hat, dann kann man diese Lösung berechnen mit Hilfe der charakteristischen Kurven. Dieses Randwertproblem hat also höchstens eine klassische Lösung.

**Beweis.** Man soll bemerken, dass wenn  $u_0(x)$  gegeben ist und  $u(x, 0) = u_0(x)$  gilt, man auch  $u_x(x, 0)$  kennt, nämlich  $u_x(x, 0) = u'_0(x)$ . Weil auch  $u_y(x, 0) = v_0(x)$  auf  $[0, L] \times \{0\}$  gegeben ist, findet man auf  $[0, L] \times \{0\}$  alle Richtungsableitungen durch

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} u(x, 0) = \mathbf{v} \cdot \begin{pmatrix} u_x(x, 0) \\ u_y(x, 0) \end{pmatrix}$$

und also auch  $U_t$  und  $U_s$ . Für die vertikalen Ränder braucht man nur  $U = u = u_{\ell/r}$ . Man findet da  $u_y$  und  $U_s$  oder  $U_t$  and so auch wieder alle Richtungableitungen. Wenn  $M > L$ , dann kann man schrittweise hochklettern. ■

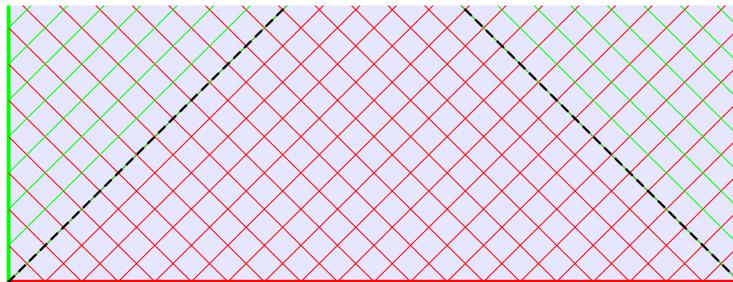


Abbildung 5.3: Unten zwei, links und rechts eine und oben keine. So kann man die passenden Randbedingungen für (5.12) beschreiben.

## 5.2.2 Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 + \partial_y^2$

Statt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  werden wir wechseln zu  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Betrachten wir also die partielle Differentialgleichung  $u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = f$ . Wie nehmen auch ein spezielles Gebiet, nämlich die Einheitskugel  $B_1(0)$  und ändern auch noch ein Vorzeichen. Das heißt, wir betrachten

$$-\Delta u = f \text{ auf } B_1(0). \quad (5.13)$$

Wir betrachten eine besondere Funktion:

**Definition 5.4** Die Greensche Funktion  $G : \overline{B_1(0)} \times \overline{B_1(0)} \rightarrow [0, \infty]$  für (5.13) wird definiert durch

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left( \log \left( \left\| x \|y\| - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \right) - \log (\|x - y\|^2) \right). \quad (5.14)$$

Diese Funktion hat folgende Eigenschaften:

**Lemma 5.5** Die Funktion  $x \mapsto G(x, y)$  aus (5.14) ist

1. *symmetrisch*:  $G(x, y) = G(y, x)$  für alle  $x, y \in \overline{B_1(0)}$ ;
2.  $G$  ist unendlich oft differenzierbar in  $x, y \in \overline{B_1(0)}$  mit  $x \neq y$ , und  $x \mapsto G(x, y)$  ist harmonisch auf  $B_1(0) \setminus \{y\}$ , das heißt,  $\Delta_x G(x, y) = 0$  für alle  $x \in B_1(0) \setminus \{y\}$ ;
3. erfüllt  $G(x, y) = 0$  für  $\|x\| = 1$  und  $y \in B_1(0)$ .

**Beweis.** Weil

$$\begin{aligned} \left\| x \|y\| - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 &= \langle x \|y\|, x \|y\| \rangle - 2 \left\langle x \|y\|, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle + \left\langle \frac{y}{\|y\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = \\ &= \|y\|^2 \|x\|^2 - 2 \langle x, y \rangle + 1 \end{aligned}$$

sieht man, dass  $G(x, y) = G(y, x)$ . Außerdem findet man, dass  $G$  unendlich oft differenzierbar ist sowohl in  $x$  als auch in  $y$ , wenn  $x \notin \{y, \|y\|^{-2}y\}$ . Auf  $\overline{B_1(0)} \times \overline{B_1(0)}$  trifft dies zu, wenn  $x \neq y$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \Delta_x \log (\|x - y\|^2) &= \nabla_x \cdot \nabla_x \log (\|x - y\|^2) = \\ &= \nabla_x \cdot \frac{2(x - y)}{\|x - y\|^2} = 2 \frac{2}{\|x - y\|^2} - \frac{4(x - y) \cdot (x - y)}{\|x - y\|^4} = 0. \end{aligned}$$

Weil

$$\log \left( \left\| x \|y\| - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \right) = \log (\|x - z\|^2) + \log (\|y\|^2)$$

mit  $z = \|y\|^{-2}y$  gilt, ist auch die Funktion  $x \mapsto \log \left( \left\| x \|y\| - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \right)$  harmonisch. Für  $\|y\| = 1$  findet man  $G(x, y) = 0$  und dies gilt wegen der Symmetrie auch wenn  $\|x\| = 1$ . ■

Sei  $u$  eine Lösung von  $-\Delta u = f \in C(\overline{B_1(0)})$ . Dann gilt, mit  $\nu$  den auswärtigen Normalenvektor, dass

$$\begin{aligned} \int_{B_1(0)} G(x, y) f(y) dy &= - \int_{B_1(0)} G(x, y) \Delta u(y) dy = - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{B_1(0) \setminus B_\varepsilon(x)} G(x, y) \Delta u(y) dy \\ &= - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \int_{\partial(B_1(0) \setminus B_\varepsilon(x))} (G(x, y) \partial_\nu u(y) - \partial_{\nu_y} G(x, y) u(y)) d\sigma_y + \right. \\ &\quad \left. + \int_{B_1(0) \setminus B_\varepsilon(x)} \Delta G(x, y) u(y) dy \right) \\ &= \int_{\partial B_1(0)} \partial_{\nu_y} G(x, y) u(y) d\sigma_y + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} (G(x, y) \partial_\nu u(y) - \partial_{\nu_y} G(x, y) u(y)) d\sigma_y. \end{aligned}$$

Für  $y \in \partial B_\varepsilon(x)$  gilt

$$G(x, y) = \mathcal{O}(\log \varepsilon)$$

und mit  $\nu_y = -\frac{y-x}{\|y-x\|}$  auf  $\partial B_\varepsilon(x)$ , dass

$$-\partial_{\nu_y} G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{(x-y)}{\|x-y\|^2} \cdot \nu_y + \mathcal{O}(1) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} + \mathcal{O}(1).$$

Es folgt für  $\varepsilon \downarrow 0$ , weil  $\|\nabla u\|_\infty$  beschränkt ist, dass

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} G(x, y) \partial_{\nu_y} u(y) d\sigma_y &= 2\pi\varepsilon \mathcal{O}(\log \varepsilon) \rightarrow 0, \\ \int_{\partial B_\varepsilon(x)} -\partial_{\nu_y} G(x, y) u(y) d\sigma_y &= 2\pi\varepsilon \left( \frac{1}{2\pi\varepsilon} + \mathcal{O}(1) \right) (u(x) + \mathcal{O}(\varepsilon)) \rightarrow u(x). \end{aligned}$$

Zusammen wird es:

$$u(x) = - \int_{B_1(0)} G(x, y) \Delta u(y) dy - \int_{\partial B_1(0)} \partial_{\nu_y} G(x, y) u(y) d\sigma_y. \quad (5.15)$$

Diese Formel liefert uns eine Eigenschaft einer Lösung zu

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B_1(0), \\ u = u_0 & \text{auf } \partial B_1(0). \end{cases} \quad (5.16)$$

Wir fassen dieses Ergebnis zusammen in:

**Proposition 5.6** Sei  $G$  die Funktion in (5.14) und seien  $f \in C(\overline{B_1(0)})$  und  $u_0 \in C(\partial B_1(0))$ . Wenn  $u \in C^2(\overline{B_1(0)})$  eine Lösung ist von (5.16), dann gilt (5.15).

Die interessante Frage wäre, ob man, wenn  $u_0$  und  $f$  gegeben sind, eine Lösung  $u$  von (5.16) mit Hilfe von

$$u(x) = \int_{B_1(0)} G(x, y) f(y) dy - \int_{\partial B_1(0)} \partial_{\nu_y} G(x, y) u_0(y) d\sigma_y. \quad (5.17)$$

finden würde. Das ist tatsächlich so, aber braucht noch einen Beweis. Dann hätte man die Existenzfrage geklärt.

Nehmen wir an, diese Existenz-Frage sei geklärt. Die nächste Frage nach Hadamard ist dann, ob (5.17) die einzige Lösung ist zu (5.16). Diese Frage lässt sich sofort beantworten:

**Proposition 5.7** Es gibt höchstens eine Lösung  $u \in C^2(\overline{B_1(0)})$  zu (5.16).

**Beweis.** Wenn es zwei Lösungen geben würde, nennen wir sie  $u_1$  und  $u_2$ , dann ist  $w = u_1 - u_2$  eine harmonische Funktion und es gilt  $w = 0$  auf  $\partial B_1(0)$ . Wegen Korollar 3.5 hat  $w$  kein Extremum innerhalb von  $\overline{B_1(0)}$ . Es folgt, dass  $w \leq 0$  auf  $B_1(0)$ . Ähnliches gilt für  $-w$ . Dann gilt also  $w = 0$  auf  $\overline{B_1(0)}$  und  $u_1$  und  $u_2$  wären identisch. ■

**Bemerkung 5.7.1** Diesen letzten Beweis kann man verwenden für beliebige Gebiete.

### 5.2.3 Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 - \partial_y$

Diese Gleichung erscheint bei der Wärmeleitung. Weil  $y$  die Zeit darstellt, werden wir  $t$  statt  $y$  benutzen. Ein einfaches, physikalisches Problem wäre die Temperaturverteilung in einem Stab. Wir nehmen an, dieser Stab ist isoliert, außer an den beiden Enden. Die Anfangstemperatur nehmen wir 20 und die Enden halten wir auf 0. Das Problem wird:

$$\begin{cases} (\partial_t - \partial_x^2) u = 0 & \text{in } (0, \ell) \times (0, T), \\ u(x, 0) = 20 & \text{auf } (0, \ell), \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 & \text{auf } (0, T). \end{cases}$$

Wenn man  $u(x, 0) = \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)$  statt 20 hätte, findet man als Lösung

$$u(x, t) = e^{-\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right).$$

Man kontrolliert direkt, dass sowohl die Differentialgleichung als auch die Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt sind. Hat man  $u(x, 0) = \sum_{k=1}^{138} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)$  folgt, weil die Differentialgleichung linear ist, als Lösung

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{138} c_k e^{-\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right).$$

Als nächstes wenden wir an, dass

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell}x\right) \quad \text{für } 0 < x < \ell$$

und versuchen für die Lösung

$$u(x, t) = 20 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell}x\right). \quad (5.18)$$

Konvergiert diese Reihe? Erfüllt sie die Differentialgleichung? Erfüllt sie die Rand- und Anfangsbedingungen? Die Antworten lauten: ja, ja und fast überall. Für die Beweise dieser Aussagen braucht man Kenntnisse von Fourierreihen.

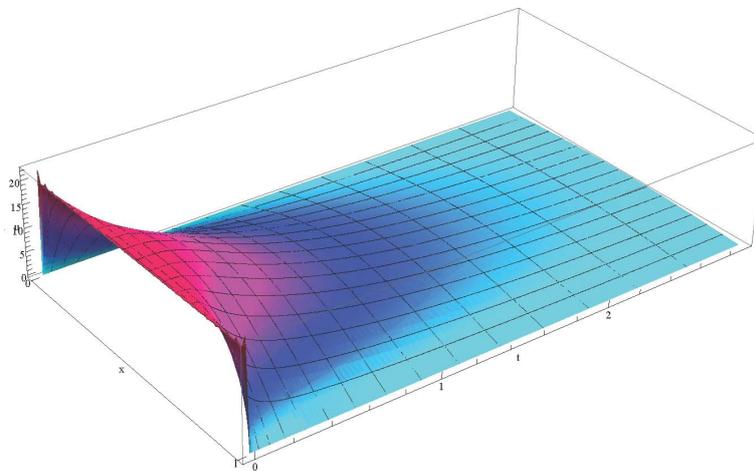


Abbildung 5.4: Eine Skizze der Funktion in (5.18)

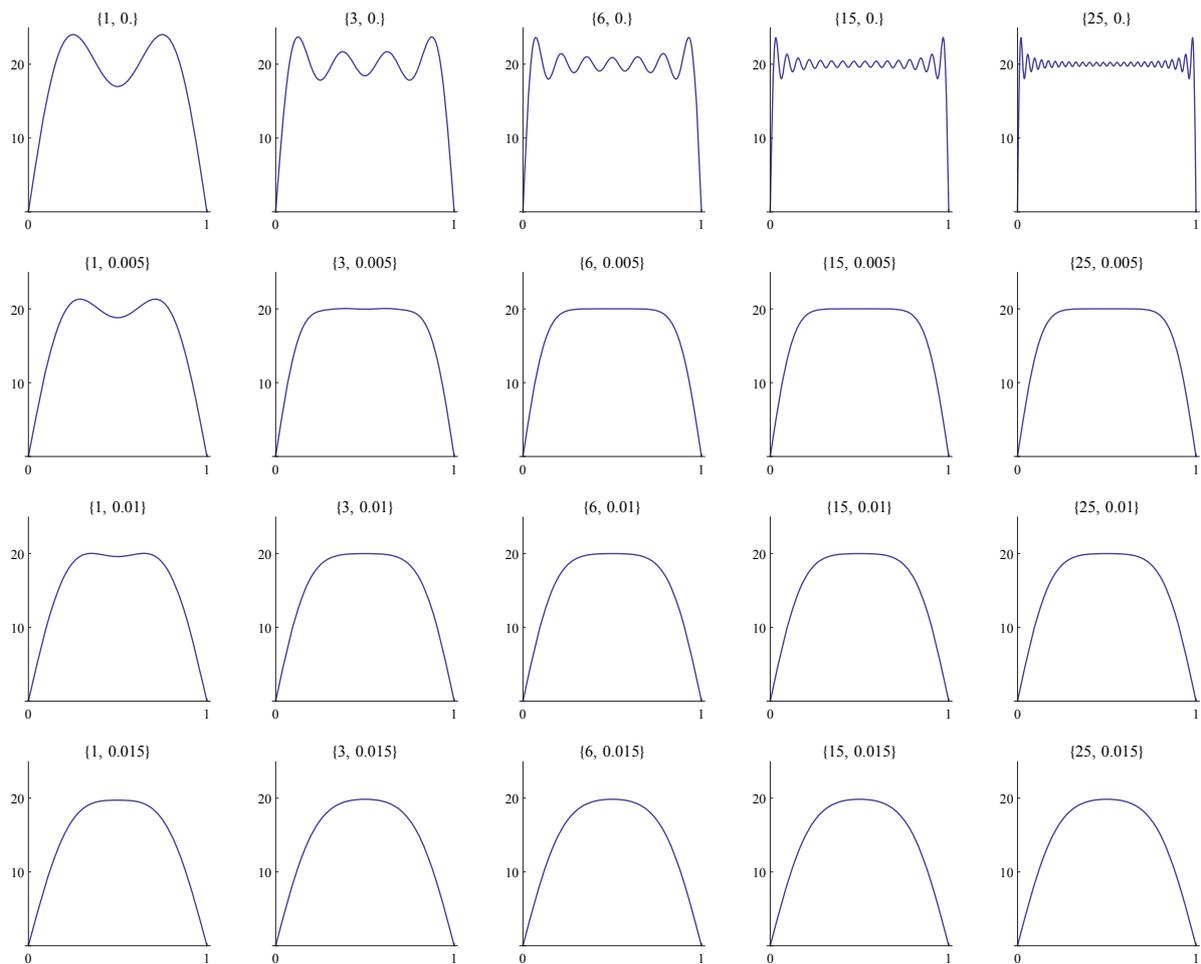


Abbildung 5.5: Skizzen einiger Funktionen die (5.18) approximieren, wo  $\infty$  ersetzt ist durch  $n$ , für  $n \in \{1, 3, 6, 15, 25\}$  und für fest gewählte  $t \in \{0, 0.005, 0.01, 0.015\}$ . Nach rechts ist  $n$  zunehmend; nach unten wird  $t$  größer.

Das Bild in Abbildung 5.4 gibt uns Hoffnung, dass man tatsächlich mit einer konvergenten Reihe zu tun hat. In Abbildung 5.5 finden Sie die Approximationen für  $\ell = 1$  und kleine  $t$  mit endlich vielen Termen an.

Schreibt man

$$u(x, t) = 20 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \left( e^{-\ell^{-2}\pi^2 t} \right)^{(2k+1)^2} \sin \left( \frac{(2k+1)\pi}{\ell} x \right), \quad (5.19)$$

dann folgt  $e^{-\ell^{-2}\pi^2 t} < 1$  für  $t > 0$  und man zeigt, dass die Reihe in (5.19) absolut konvergent ist. Innerhalb des Konvergenzradius ist das Ableiten nach  $z := e^{-\ell^{-2}\pi^2 t}$  wohldefiniert und mit Hilfe der Kettenregel existiert auch die Ableitung nach  $t$ . Ähnliches gilt für höhere Ableitungen und Ableitungen nach  $x$ . Weil man so den Limes in den Ableitungen und den Limes in der Summe vertauschen kann für  $t > 0$ , folgt aus

$$(\partial_t - \partial_x^2) e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin \left( \frac{(2k+1)\pi}{\ell} x \right) = 0,$$

dass die Differentialgleichung erfüllt ist für  $t > 0$ . Diese absolute Konvergenz liefert auch

$$u(0, t) = 0 = u(\ell, t) \text{ für } t > 0.$$

Die Stetigkeit von  $u$  bei  $t = 0$  ist nur erfüllt für  $x \in (0, \ell)$ . Um dies zu zeigen verwendet man eine Version vom Konvergenztest von Abel:

**Lemma 5.8 (Abel)** Sei  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ . Wenn  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert, dann konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$  für  $r \in [0, 1]$  und es gilt

$$\lim_{r \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

**Beweis.** Wenn  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert, hat  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  einen Konvergenzradius  $R \geq 1$ . Also  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$  konvergiert für  $|r| < 1$ . Wenn  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert, gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  einen  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  derart, dass  $|\sum_{n=N}^{\infty} a_n| < \varepsilon$  für alle  $N > N_\varepsilon$ . Dann folgt für  $m > N > N_\varepsilon$ , dass

$$\left| \sum_{n=N}^m a_n \right| \leq \left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n - \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \right| < 2\varepsilon. \quad (5.20)$$

Außerdem gilt für  $m > N$ , dass  $a_n r^n = a_n r^m + a_n \sum_{k=n}^{m-1} (r^{k+1} - r^k)$  und

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^m a_n r^n &= \sum_{n=N}^m a_n r^m + \sum_{n=N}^m a_n \sum_{k=n}^{m-1} (r^{k+1} - r^k) \\ &= \sum_{n=N}^m a_n r^m + \sum_{k=N}^{m-1} \sum_{n=N}^k a_n (r^{k+1} - r^k). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^m a_n r^n \right| &\leq \left| \sum_{n=N}^m a_n r^m \right| + \left| \sum_{k=N}^{m-1} \sum_{n=N}^k a_n (r^{k+1} - r^k) \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=N}^m a_n \right| r^m + \sum_{k=N}^{m-1} \left| \sum_{n=N}^k a_n \right| |r^{k+1} - r^k| \\ &\leq 2\varepsilon r^m + \sum_{k=N}^{m-1} 2\varepsilon |r^{k+1} - r^k| = 2\varepsilon r^N \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

und ähnlich wie in (5.20) hat man

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n r^n \right| \leq 4\varepsilon. \quad (5.21)$$

Die Konvergenz von  $\sum_{n=N}^{\infty} a_n r^n$  ist also gleichmäßig bezüglich  $r \in [0, 1]$ .

Betrachte das Polynom  $p(r) = \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} a_n r^n$ . Nehme  $\delta > 0$  derartig, dass  $|r - 1| < \delta$  impliziert

$$|p(1) - p(r)| < \varepsilon, \quad (5.22)$$

so folgt aus (5.20), (5.21) und (5.22), dass

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \right| < 7\varepsilon.$$

Das Lemma ist bewiesen. ■

### 5.2.4 Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 + \partial_y$

Wenn wir versuchen auf ähnliche Art das folgende Problem zu lösen

$$\begin{cases} (\partial_t + \partial_x^2) u = 0 & \text{in } (0, \ell) \times (0, T), \\ u(x, 0) = 20 & \text{auf } (0, \ell), \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 & \text{auf } (0, T), \end{cases}$$

erhält man die Formel

$$u(x, t) = 20 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} e^{-(\frac{(2k+1)\pi}{\ell})^2 t} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell} x\right). \quad (5.23)$$

Auch hier müssen wir uns fragen, ob diese Reihe konvergiert?

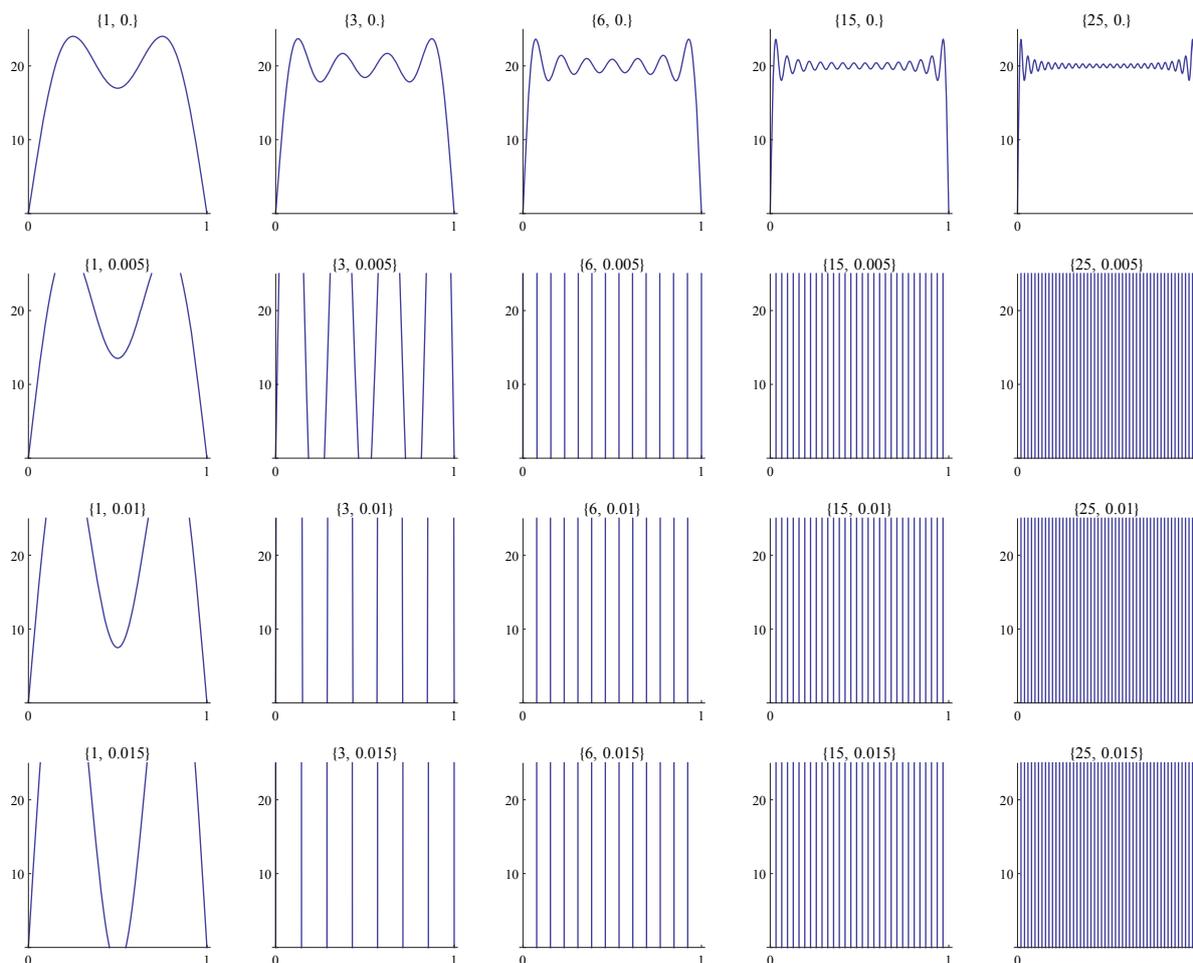


Abbildung 5.6: Skizzen der Funktionen  $x \mapsto 20 \sum_{k=0}^n \frac{4}{(2k+1)\pi} e^{-(2k+1)^2 \pi^2 t} \sin((2k+1)\pi x)$  für  $n \in \{1, 3, 6, 15, 25\}$  und  $t \in \{0, 0.005, 0.01, 0.015\}$ . Man vergleiche mit den Bildern in Fig. 5.5.

In Abbildung 5.5 stehen Skizzen zu den ersten Termen aus (5.18) und in Abbildung 5.6 ähnliche aus (5.23):

$$u_n(x, t) = 20 \sum_{k=0}^n \frac{4}{(2k+1)\pi} e^{-(\frac{(2k+1)\pi}{\ell})^2 t} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell} x\right) \quad (5.24)$$

Es hat den Anschein, dass die Formel aus (5.24) nicht konvergiert für  $t = .01$ . Kann man sich mit analytischen Mitteln überzeugen?

### 5.2.5 Welche Randbedingungen passen?

Wir haben keineswegs jetzt schon den kompletten Beweis gegeben, welche Randbedingungen zu einem wohl-definierten Randwertproblem im Sinne von Hadamard führen werden. Die Vermutungen kann man jedoch schon mal bildlich darstellen.

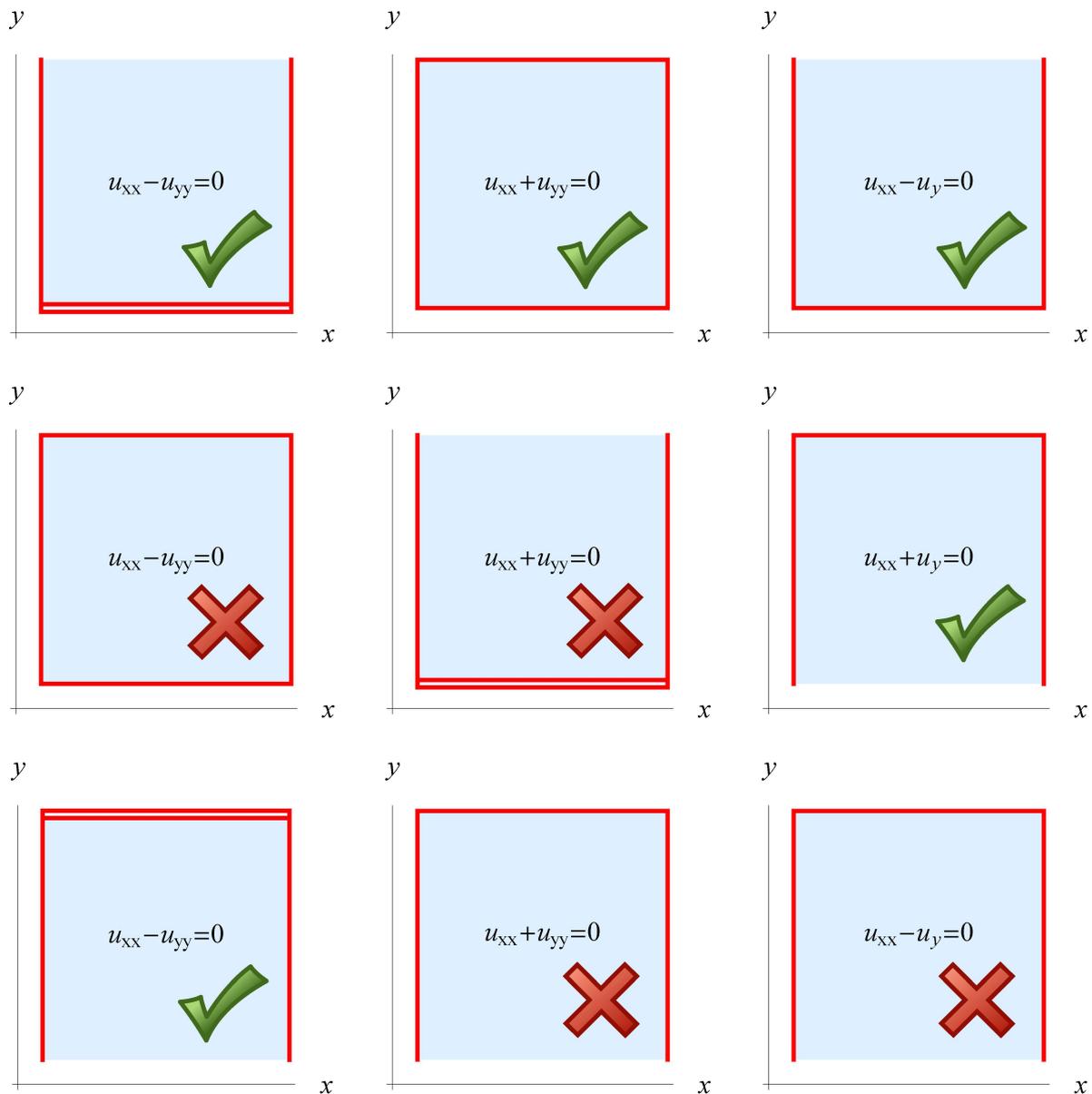


Abbildung 5.7: Ein roter Strich bedeutet, dass man einen Randwert vorschreibt. Bei zwei Strichen braucht es einen zweiten unabhängigen Randwert. Es gibt wohl-definierte (✓) und nicht-wohl-definierte Probleme (✗) im Sinne von Hadamard. Zu der Aussage in fast jedem dieser Beispiele gehört ein nicht-trivialer Beweis.

## 5.3 Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung

### 5.3.1 In zwei Dimensionen

Die allgemeine Form einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung sahen wir schon in (5.1):

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = \varphi, \quad (5.25)$$

mit  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ . Das Symbol ist

$$L(\xi, \eta) = a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 + d\xi + e\eta + f. \quad (5.26)$$

**Definition 5.9** Sei das Symbol wie in (5.26). Dann heißt (5.25)

- *elliptisch*, wenn es  $\lambda \in \mathbb{R}$  gibt derart, dass  $L(\xi, \eta) = \lambda$  die Gleichung einer Ellipse darstellt;
- *hyperbolisch*, wenn es  $\lambda \in \mathbb{R}$  gibt derart, dass  $L(\xi, \eta) = \lambda$  die Gleichung einer Hyperbel darstellt;
- *parabolisch*, wenn es  $\lambda \in \mathbb{R}$  gibt derart, dass  $L(\xi, \eta) = \lambda$  die Gleichung einer Parabel darstellt.

**Bemerkung 5.9.1** Wenn  $a, \dots, e$  von  $x$  und  $y$  abhängt, dann kann es sein, dass der Typ verschieden ist an verschiedenen Stellen. Hyperbolisch und elliptisch wird bestimmt durch  $a, b, c$ .

**Lemma 5.10** Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- *i.* Wenn  $L(\xi, \eta) = \lambda$  eine Ellipse darstellt, dann gilt  $b^2 < ac$ .  
*ii.* Wenn  $b^2 < ac$  gilt, dann beschreibt  $L(\xi, \eta) = \lambda$  mit  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$  entweder eine Ellipse oder einen Punkt oder die leere Menge.
- *i.* Wenn  $L(\xi, \eta) = \lambda$  eine Hyperbel darstellt, dann gilt  $b^2 > ac$ .  
*ii.* Wenn  $b^2 > ac$  gilt, dann beschreibt  $L(\xi, \eta) = \lambda$  mit  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$  entweder eine (doppelte) Hyperbel oder zwei sich schneidende Geraden.
- *i.* Wenn  $L(\xi, \eta) = \lambda$  eine Parabel darstellt, dann gilt  $b^2 = ac$  und<sup>3</sup>

$$\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \notin \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \right\}. \quad (5.27)$$

- ii.* Wenn  $b^2 = ac$  und (5.27) gilt, beschreibt  $L(\xi, \eta) = \lambda$  eine Parabel.

Für konstante Koeffizienten kann man (5.25) auch schreiben als

$$\left( \nabla \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \nabla + \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \cdot \nabla + f \right) u = \varphi.$$

---

<sup>3</sup> $\text{Span}\{\vec{\varphi}, \vec{\psi}\} = \{c_1\vec{\varphi} + c_2\vec{\psi}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$

**Lemma 5.11** Seien  $\mu_1, \mu_2$  die Eigenwerte von  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ .

- $\mu_1\mu_2 > 0 \Leftrightarrow (5.25)$  ist elliptisch.
- $\mu_1\mu_2 < 0 \Leftrightarrow (5.25)$  ist hyperbolisch.
- $\mu_1\mu_2 = 0$  und (5.27) gilt  $\Leftrightarrow (5.25)$  ist parabolisch.

**Beispiel 5.12** Die Tricomi-Gleichung  $u_{xx} + xu_{yy} = 0$  ist elliptisch für  $x > 0$  und hyperbolisch für  $x < 0$ .

**Beispiel 5.13** Die Differentialgleichung  $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = \varphi$  gehört nicht zu einem dieser drei Typen, denn (5.27) ist nicht erfüllt. Mit der Koordinatentransformation  $s = x + y$  und  $t = x - y$  wird die Differentialgleichung  $4u_{ss} + 2u_s = \varphi$  und die ist eine gewöhnliche Differentialgleichung.

### 5.3.2 In höheren Dimensionen

Eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in  $n$  Dimensionen kann man wie folgt schreiben:

$$(\nabla \cdot M \nabla + \vec{v} \cdot \nabla + c) u = f, \quad (5.28)$$

mit  $M$  eine symmetrische und reelle  $n \times n$  Matrix,  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  und  $c \in \mathbb{R}$  und  $f$  eine vorgeschriebene Funktion.

**Definition 5.14** Seien  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  die Eigenwerte von  $M$ . Man nennt die partielle Differentialgleichung in (5.28)

- elliptisch, wenn die Eigenwerte entweder alle positiv oder alle negativ sind;
- hyperbolisch, wenn  $n - 1$  letzte Eigenwert ein entgegengesetztes Vorzeichen hat;
- parabolisch, wenn  $n - 1$  Eigenwerte das gleiche Vorzeichen haben, der letzte Eigenwert gleich 0 ist und es außerdem gilt, dass  $\vec{v} \notin \text{Spaltenraum}(M)$ .

**Bemerkung 5.14.1** Man erinnere sich aus der Vorlesung Lineare Algebra, dass eine symmetrische und reelle  $n \times n$  Matrix  $M$  eine Basis aus Eigenvektoren besitzt. Man sollte sich auch erinnern, dass für eine  $n \times n$  Matrix  $M$  die Determinante dem Produkt seiner Eigenwerte  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  (mit algebraischer Multiplizität) gleich:

$$\det(M) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

Es gilt übrigens auch, dass  $\sum_{i=1}^n M_{ii} =: \text{spur}(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ .

**Bemerkung 5.14.2** Lemma 5.11 zeigt, dass diese Klassifizierung auch gilt für Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei Dimensionen.

**Bemerkung 5.14.3** Diese Aufteilung umfasst nicht alle Möglichkeiten. Die wichtigsten partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung aus physikalischen Modellen sind aber erfasst.

**Theorem 5.15** Sei  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  eine invertierbare Matrix. Unter der Koordinatentransformation  $x = Ay$  ändert sich der Typ der partiellen Differentialgleichung in (5.28) aus Definition 5.14 nicht.

**Beweis.** Setze  $U(y) = u(Ay)$ . Weil

$$\frac{\partial}{\partial y_i} U(y) = \frac{\partial}{\partial y_i} (u(Ay)) = \sum_{j=1}^n A_{ij} \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) (Ay)$$

findet man  $\nabla_y U(y) = A (\nabla_x u)(Ay)$  und  $A^{-1} \nabla_y U(y) = (\nabla_x u)(Ay)$ . Setzen wir  $B = A^{-1}$ , so ändert sich (5.28) mit  $F(y) = f(Ay)$  in

$$(B \nabla_y \cdot MB \nabla_y + \vec{v} \cdot B \nabla_y + c) U = F,$$

und dies gleicht

$$(\nabla_y \cdot B^T MB \nabla_y + \vec{v} \cdot B \nabla_y + c) U = F.$$

Hier ist  $B^T$  der Transponierte von  $B$ . Weil  $M$  symmetrisch ist, ist auch  $B^T MB$  symmetrisch:

$$(B^T MB)^T = B^T M^T (B^T)^T = B^T MB.$$

Man soll zeigen, dass die Zahl der positiven, beziehungsweise negativen und Null-Eigenwerte von  $M$  und  $B^T MB$  identisch sind. Dies wäre einfach, wenn  $B$  orthogonal wäre, aber das dürfen wir nicht voraussetzen. Für eine allgemeine invertierbare Matrix  $B \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  braucht man mehrere Schritten, die u.a. Ergebnisse aus der Matrixrechnung verwenden:

- $(BB^T)$  ist eine symmetrische positiv definite Matrix.
- Es gibt eine orthogonale Matrix  $S \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ , also  $S^T = S^{-1}$ , und eine Diagonalmatrix  $D \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  mit  $D_{ii} > 0$  derart, dass  $(BB^T) = S^T D S$ .
- Für  $\theta \in \mathbb{R}$  sei  $D^\theta$  der Diagonalmatrix mit  $(D^\theta)_{ii} = (D_{ii})^\theta$ . Dann ist  $(BB^T)^\theta := S^T D^\theta S$  wohldefiniert.
- $B^T MB$  und  $(BB^T)^{1/2} M (BB^T)^{1/2}$  haben die gleichen Eigenwerte.
- Der Dimension von  $\{v \in \mathbb{R}^n; (BB^T)^\theta M (BB^T)^\theta v = 0\}$  ist konstant bezüglich  $\theta$ .
- Die Nullstellen  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{C}^n$  vom Polynom

$$p(\lambda; \vec{a}) := \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

kann man lokal so anordnen, dass sie stetig abhängig sind von  $\vec{a} \in \mathbb{C}^n$ . Dies ist ein Ergebnis von Ostrowski aus 1939.

- Das charakteristische Polynom  $\det \left( (BB^T)^\theta M (BB^T)^\theta - \lambda I \right)$  hat für alle  $\theta \in \mathbb{R}$  gleich viel positive, beziehungsweise negative Nullstellen.

Kombiniert man diese Ergebnisse, dann folgt, dass die Zahl der positiven, beziehungsweise negativen und Null-Eigenwerte von  $M$  und  $B^T MB$  identisch sind. Die zusätzliche Bedingung für die Parabolizität lässt sich direkt kontrollieren. ■

### 5.3.3 Bei variablen Koeffizienten

Wenn die Differentialgleichung Koeffizienten hat, die nicht konstant sind, kann die Klassifizierung ortsabhängig sein. Dann wird klassifiziert, indem man den Parameter einfriert. Das heißt, man nennt eine semilineare Differentialgleichung

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_{x_j} u(x) = f(x, u) \quad (5.29)$$

elliptisch (beziehungsweise parabolisch, hyperbolisch) an der Stelle  $x_0$ , wenn

$$L := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x_0) \partial_{x_j}$$

elliptisch (beziehungsweise parabolisch, hyperbolisch) ist. Bei einer quasilinearen Differentialgleichung

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u(x), \nabla u(x)) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(x) = f(x, u(x), \nabla u(x)) \quad (5.30)$$

wird dieses Einfrieren sogar von der Lösung selber abhängen. Man nennt (5.30) elliptisch (beziehungsweise hyperbolisch) an der Stelle  $x_0$ , wenn gilt:

$$L := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0, u(x_0), \nabla u(x_0)) \partial_{x_i} \partial_{x_j}$$

ist elliptisch.

**Beispiel 5.16** Eine einfache Differentialgleichung für eine stationäre Potentialströmung von einem Gas in zwei Dimensionen ist

$$(c^2 - u_x^2) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (c^2 - u_y^2) u_{yy} = 0. \quad (5.31)$$

Hier ist  $u$  das Potential und  $\nabla u$  die Geschwindigkeit. Weil

$$\det \begin{pmatrix} c^2 - u_x^2 & -u_x u_y \\ -u_x u_y & c^2 - u_y^2 \end{pmatrix} = (c^2 - u_x^2)(c^2 - u_y^2) - (u_x u_y)^2 = c^2 (c^2 - |\nabla u|^2)$$

gilt, folgt, dass (5.31) elliptisch ist für  $|\nabla u|^2 < c^2$  und hyperbolisch ist für  $|\nabla u|^2 > c^2$ . Bei einer solchen Potentialströmung ist  $c$  die Schallgeschwindigkeit in dem Gas. Diese Gleichung trifft auch zu, wenn das Gas zum Beispiel Luft ist und ein Flugzeug sich durch dieses Gas bewegt. Wenn sich das Flugzeug schneller als die Schallgeschwindigkeit bewegt, gibt es Stellen an denen  $|\nabla u| > c$  gilt. Das bedeutet, dass man dann für die Gleichung (5.31) sowohl „elliptische“ Gebiete als auch „hyperbolische“ Gebiete hat. Die Modellierung für Überschall- und für Unterschallflug sind dann auch wesentlich verschieden.



# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 6



## Die Wellengleichung

Eine typische hyperbolische partielle Differentialgleichung ist die Wellengleichung:

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0. \quad (6.1)$$

Die Variable  $t$  repräsentiert meistens die Zeit; der Differentialoperator  $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$  ist die Summe der zweiten Ableitungen bezüglich der Raumvariablen. In Raumdimension 1 beschreibt diese Gleichung zum Beispiel die Schwingungen einer Saite, in Dimension 2 die Wellen in einem Teich und in Dimension 3 beschreibt sie, wie die Stimme eines Sängers sein Publikum erreicht.

### 6.1 Die Wellengleichung in Raumdimension 1

Die Wellengleichung in einer Dimension haben wir schon betrachtet in Paragraph 5.2.1. Die folgende partielle Differentialgleichung ist gemeint:

$$u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t).$$

Diese Differentialgleichung ist hyperbolisch. Man kann durch Skalierung  $c = 1$  erhalten, so wie es in Paragraph 5.2.1 gemacht wird. Weil  $c$  genau die Geschwindigkeit ist, mit der die Wellen sich seitwärts bewegen, lässt man der Anschaulichkeit halber  $c$  oft auch stehen.

Die Funktion  $f$  ist gegeben und man versucht, bei geschickt gewählten Anfangs- und Randwerten, die Existenz einer eindeutigen Lösung zu zeigen. Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t) & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (6.2)$$

ist ein solches Problem.

**Proposition 6.1 (Die Formel von d'Alembert)** Sei  $f = 0$ ,  $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$  und  $v_0 \in C^1(\mathbb{R})$ . Dann hat (6.2) genau eine Lösung in  $C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ , nämlich

$$u(x, t) = \frac{1}{2}u_0(x - ct) + \frac{1}{2}u_0(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y) dy. \quad (6.3)$$

**Bemerkung 6.1.1** Wenn  $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$  und  $v_0 \in C(\mathbb{R})$ , dann liefert (6.3) immer noch eine schwache Lösung  $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ .

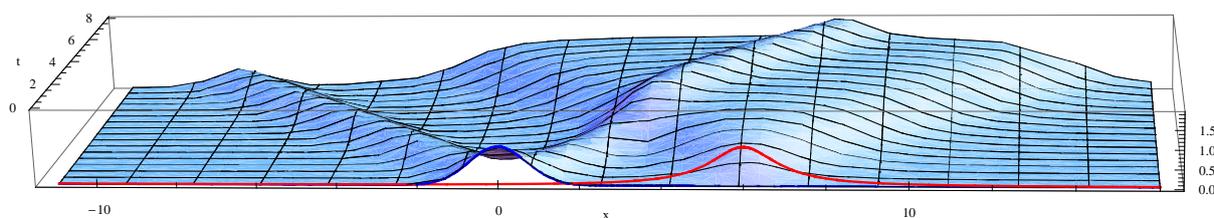


Abbildung 6.1: Skizze der Lösung nach d'Alembert von (6.2) mit  $u_0(x) = e^{-x^2}$  (in blau) und  $v_0(x) = \frac{1}{1+(x-6)^2}$  (in rot).

**Beweis.** Wenn  $f$ ,  $u_0$  und  $v_0$  diesen obengenannten Funktionenräumen angehören, ist  $u$  zweimal stetig differenzierbar. Die erste Anfangsbedingung folgt direkt:

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Man findet

$$u_t(x, t) = -\frac{1}{2}cu'_0(x - ct) + \frac{1}{2}cu'_0(x + ct) + \frac{1}{2}v_0(x + ct) + \frac{1}{2}v_0(x - ct),$$

und es folgt

$$u_t(x, 0) = v_0(x).$$

Nochmals nach  $t$  ableiten ergibt

$$u_{tt}(x, t) = \frac{1}{2}c^2u''_0(x - ct) + \frac{1}{2}c^2u''_0(x + ct) + \frac{1}{2}cv'_0(x + ct) - \frac{1}{2}cv'_0(x - ct).$$

Die Ableitungen nach  $x$  sind

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= \frac{1}{2}u'_0(x - ct) + \frac{1}{2}u'_0(x + ct) + \frac{1}{2c}v_0(x + ct) - \frac{1}{2c}v_0(x - ct), \\ u_{xx}(x, t) &= \frac{1}{2}u''_0(x - ct) + \frac{1}{2}u''_0(x + ct) + \frac{1}{2c}v'_0(x + ct) - \frac{1}{2c}v'_0(x - ct). \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung ist erfüllt und  $u$  in (6.3) ist eine Lösung.

Dass diese Lösung die einzige ist, findet man durch Verfolgung der charakteristischen Kurven. ■

**Proposition 6.2 (Prinzip von Duhamel)** Sei  $f \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ ,  $u_0 = v_0 = 0$ . Dann hat (6.2) genau eine Lösung in  $C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ , nämlich

$$u(x, t) = \int_0^t U(x, t; s) ds \quad (6.4)$$

wobei  $U(\cdot, \cdot; s)$  für  $s > 0$  die Lösung ist von

$$\begin{cases} U_{tt}(x, t; s) - c^2U_{xx}(x, t; s) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > s, \\ U(x, t; s) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t = s, \\ U_t(x, t; s) = f(x, s) & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t = s. \end{cases} \quad (6.5)$$

**Bemerkung 6.2.1** Die Funktionen  $(x, t) \mapsto U(x, t; s)$  sind wohldefiniert für  $t \geq s$ . Dies bedeutet auch, dass  $u$  in (6.4) wohldefiniert ist.

**Bemerkung 6.2.2** Die Differentialgleichung ist linear. Das bedeutet, dass die Summe von (6.3) und (6.4) eine Lösung liefert für (6.2) mit  $u_0$ ,  $v_0$  und  $f$  ungleich 0.



Abbildung 6.2: Links: Jean Le Rond d'Alembert, 1717 - 1783. Rechts: Jean Marie Constant Duhamel, 1797 - 1872.

**Beweis.** Aus Proposition 6.1 folgt

$$U(x, t; s) = \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy.$$

Wenn  $f \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ , dann ist auch  $(x, t, s) \mapsto U(x, t; s)$  zweimal stetig differenzierbar. Man findet<sup>1</sup>

$$u_t(x, t) = U(x, t; t) + \int_0^t U_t(x, t; s) ds = \int_0^t U_t(x, t; s) ds$$

und

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= U_t(x, t; s)_{s=t} + \int_0^t U_{tt}(x, t; s) ds = \\ &= f(x, t) + \int_0^t c^2 U_{xx}(x, t; s) ds = \\ &= f(x, t) + c^2 u_{xx}(x, t). \end{aligned}$$

Weil

$$u(x, 0) = \int_0^0 U(x, 0; s) ds = 0 \text{ und } u_t(x, 0) = \int_0^0 U_t(x, 0; s) ds = 0,$$

sind auch die Anfangsbedingungen erfüllt. ■

Noch eine Bemerkung zu (6.3) und (6.4): In (6.3) steht, wie sich der Einfluß der Anfangswerte  $u_0$  und  $v_0$  auswirkt. In (6.4) sieht man, wo  $f$  an der Stelle  $(x, t)$  seinen Einfluss hat. Umgekehrt kann man sehen, wie der Wert von  $u(x, t)$  abhängt von  $u_0$ ,  $v_0$  und  $f$ . Man nennt diese Teilgebiete Einflußbereich und Abhängigkeitsbereich. Für  $u_0$  sind es Kegelflächen. Für  $v_0$  und  $f$  sind es *Einflußkegel*<sup>2</sup> und *Abhängigkeitskegel*<sup>3</sup>. Siehe

<sup>1</sup>Für  $g(t) = \int_0^t f(t, s) ds$  mit stetig differenzierbarem  $f$  gilt

$$\begin{aligned} g'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_0^{t+h} f(t+h, s) ds - \int_0^t f(t, s) ds \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(t+h, s) ds + \int_0^t \frac{f(t+h, s) - f(t, s)}{h} ds \right) = \\ &= f(t, t) + \int_0^t f_t(t, s) ds. \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Cone of influence

<sup>3</sup>Cone of dependance

Abbildung 6.3.

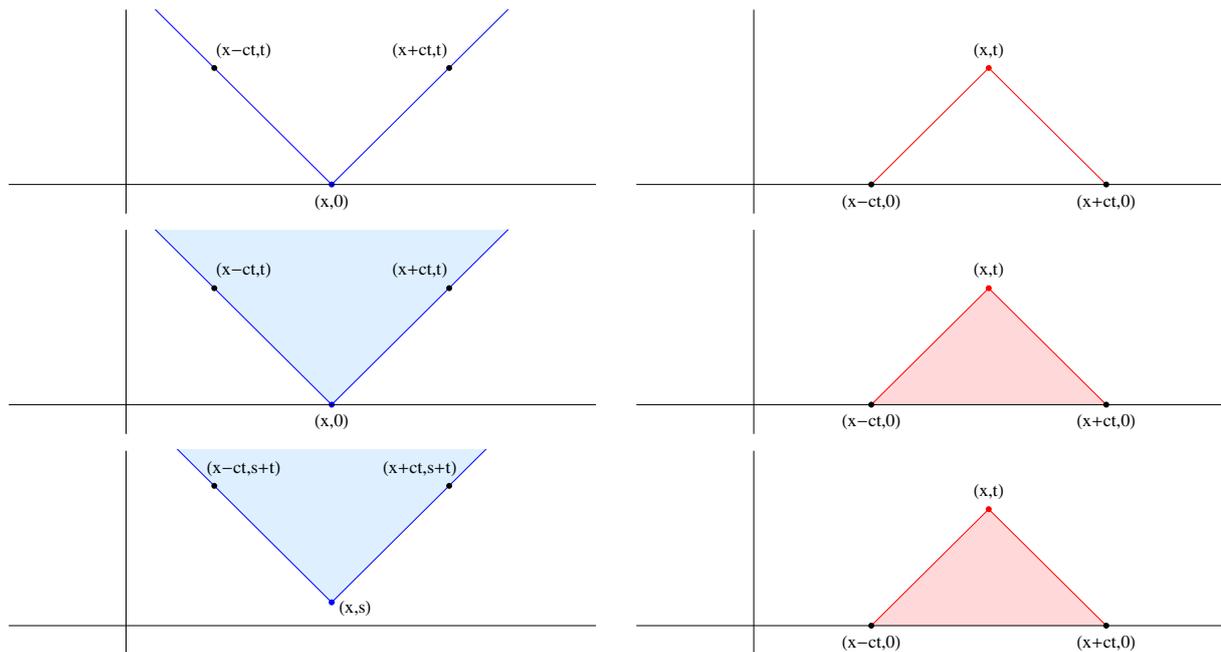


Abbildung 6.3: Oben: Das Einflußgebiet und das Abhängigkeitsgebiet zu  $u_0$ . Mitte: Der Einflußkegel und der Abhängigkeitskegel zu  $v_0$ . Unten: Der Einflußkegel und der Abhängigkeitskegel zu  $f$ .

## 6.2 Die 1d-Wellengleichung auf einem Intervall

Wie man in Paragraph 5.2.1 schon gesehen hat, kann man für beschränkte Gebiete eine Lösung finden, wenn man die Funktionen  $u_0$ ,  $v_0$  und  $f$  geschickt fortsetzt. Wir betrachten dies in den nächsten Beispielen.

**Beispiel 6.3** Betrachte das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t) & \text{für } x > 0 \text{ und } t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x > 0, \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für } x > 0, \\ u(0,t) = 0 & \text{für } t > 0. \end{cases} \quad (6.6)$$

Man definiere

$$\begin{aligned} \bar{f}(x,t) &= \begin{cases} f(x,t) & \text{für } x \geq 0, \\ -f(-x,t) & \text{für } x < 0, \end{cases} \\ \bar{u}_0(x) &= \begin{cases} u_0(x) & \text{für } x \geq 0, \\ -u_0(-x) & \text{für } x < 0, \end{cases} \\ \bar{v}_0(x) &= \begin{cases} v_0(x) & \text{für } x \geq 0, \\ -v_0(-x) & \text{für } x < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

und betrachte (6.2) mit diesen erweiterten rechten Seiten. Wenn  $f(0,t)$ ,  $u_0(0)$  und  $v_0(0)$  nicht identisch 0 sind, sind diese erweiterten Funktionen nicht länger stetig. Und sogar

wenn diese Kompatibilitätsbedingung erfüllt ist, reicht es noch nicht für die Differenzierbarkeit. Sei  $\bar{u}(x, t)$  nun definiert durch (6.3) und (6.4). Dann folgt aus der antisymmetrischen Fortsetzung von  $f$ ,  $u_0$  und  $v_0$ , dass auch  $x \mapsto \bar{u}(x, t)$  antisymmetrisch ist, das heißt

$$\bar{u}(x, t) = -\bar{u}(-x, t).$$

Ist also die Kompatibilitätsbedingung erfüllt, findet man durch

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t)|_{x \geq 0}$$

eine distributionelle Lösung  $u \in C([0, \infty) \times [0, \infty))$ .

**Beispiel 6.4** Für das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t) & \text{für } x > 0 \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x > 0, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x > 0, \\ u_x(0, t) = 0 & \text{für } t > 0, \end{cases} \quad (6.7)$$

findet man eine Lösung durch symmetrische Fortsetzung.

**Beispiel 6.5** Für das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t) & \text{für } x \in (0, \ell) \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in (0, \ell), \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in (0, \ell), \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 & \text{für } t > 0, \end{cases} \quad (6.8)$$

findet man eine Lösung durch periodische Fortsetzung. Man definiert

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0(x) &= \begin{cases} u_0(x) & \text{für } x \in [0, \ell), \\ -u_0(2\ell - x) & \text{für } x \in [\ell, 2\ell), \end{cases} \\ \bar{u}_0(x) &= \tilde{u}_0(x - \left[ \frac{x}{2\ell} \right] 2\ell). \end{aligned}$$

Hier ist  $[s] = \max\{k \in \mathbb{N}; k \leq s\}$ . Auf ähnliche Weise werden  $f(\cdot, t)$  und  $v_0$  fortgesetzt. Eine solche Fortsetzung findet man in Abbildung 6.4.

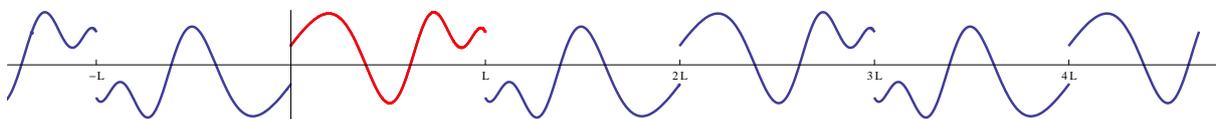


Abbildung 6.4: Periodische Fortsetzung einer auf  $[0, L]$  definierten Funktion, die außerdem antisymmetrisch ist bezüglich 0 und  $L$ .



# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 7



## Intermezzo zu Distributionen

Die Physik hat der Mathematik die *Dirac- $\delta$ -Funktion*<sup>1</sup> gebracht. Diese  $\delta$ -Funktion soll folgende Eigenschaften haben:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \text{ für jedes } \varphi \in C_0(\mathbb{R}^n).$$

Wenn  $\delta$  eine integrierbare Funktion wäre, folgt aus dem Satz von Lusin, dass  $\delta$  stetig ist auf jedem beschränkten Gebiet mit Ausnahme einer beliebig kleinen Menge. Wenn  $\delta$  stetig ist in  $x \neq 0$ , folgt mit dem Hauptlemma der Variationsrechnung (Lemma 2.15), dass  $\delta(x) = 0$ . Es gilt also  $\delta = 0$  fast überall. Dann folgt aber, dass  $\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) \varphi(x) dx = 0$ , und das ist ein Widerspruch.

Das bedeutet nicht, dass es diese Dirac- $\delta$ -Funktion nicht gibt, sondern, dass wir etwas mehr Sorgfalt walten lassen müssen, wenn wir dieses  $\delta$  definieren. Dazu brauchen wir Objekte, die den Begriff der Funktion erweitern. Diese Erweiterung hat den Namen Distribution bekommen.

### 7.1 Testfunktionen

Die Dirac- $\delta$ -Funktion ist etwas, das sich nur definieren lässt durch seine Wirkung auf Testfunktionen  $\varphi$ . Man betrachtet im Wesentlichen nur zwei Sorten von Testfunktionen:

**Definition 7.1**  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  ist der Vektorraum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger.

**Beispiel 7.2** Die Funktion  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases} \quad (7.1)$$

ist eine Funktion in  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

**Definition 7.3**  $C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n) := \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) ; \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha D^\beta u(x) = 0 \text{ für alle Multiindizes } \alpha, \beta\}$  ist der Vektorraum der sogenannten schnell fallenden, beliebig oft differenzierbaren Funktionen.

---

<sup>1</sup>Paul Adrien Maurice Dirac, 1902 Bristol (GB) – 1984 Tallahassee (USA), Nobel Preis in Physik 1933

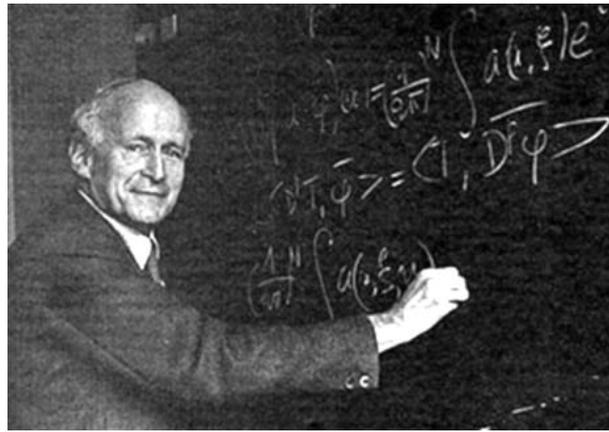


Abbildung 7.1: Laurent Schwartz, 1915 - 2002, Französischer Mathematiker.

**Bemerkung 7.3.1** Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  und  $x \in \mathbb{R}^n$  setzt man  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$  und  $D^\beta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\beta_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\beta_n}$

**Beispiel 7.4** Die Funktion  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$\varphi(x) = e^{-|x|^2}$$

ist eine Funktion in  $C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Sowohl für  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  als auch für  $C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n)$  wollen wir Folgenkonvergenz festlegen. Wenn eine passende Norm zur Verfügung steht, wäre das einfach. Man könnte zwar zum Beispiel die  $\|\cdot\|_\infty$ -Norm verwenden, doch die gibt nicht genügend Struktur. Stattdessen verwenden wir die folgende Konvergenz.

**Definition 7.5** Sei  $\{\varphi_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Dann sagen wir

$$\varphi_\ell \rightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{D},$$

wenn:

1. es eine kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  gibt derart, dass für alle Träger  $\text{supp}(\varphi_\ell)$  gilt

$$\text{supp}(\varphi_\ell) \subset K,$$

2. und für alle  $\beta \in \mathbb{N}^n$  gilt  $\|D^\beta \varphi_\ell - D^\beta \varphi\|_\infty \rightarrow 0$ , wenn  $\ell \rightarrow \infty$ .

**Bemerkung 7.5.1** Schwartz nannte den Vektorraum  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  versehen mit dieser Konvergenz  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  oder nur  $\mathcal{D}$ . Der Buchstabe  $D$  wurde von Schwartz verwendet wegen Differenzieren.

Für  $u \in C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n)$  definieren wir die folgende Normen:

$$\|u\|_{m,k}^* := \sum_{\substack{|a| \leq k \\ |\beta| \leq m}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta u(x)|. \quad (7.2)$$

**Definition 7.6** Sei  $\{\varphi_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n)$  und sei  $\varphi \in C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Dann sagen wir

$$\varphi_\ell \rightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{S},$$

wenn für alle  $m, k \in \mathbb{N}$  gilt

$$\|\varphi_\ell - \varphi\|_{m,k}^* \rightarrow 0 \text{ wenn } \ell \rightarrow \infty.$$

**Bemerkung 7.6.1** Um Schwartz zu ehren nannte man den Vektorraum  $C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , versehen mit dieser Konvergenz,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  oder nur  $\mathcal{S}$ .

**Bemerkung 7.6.2** Um die Konvergenz in  $\mathcal{S}$  zu definieren verwendet man (abzählbar) unendlich viele Normen. Wenn man endlich viele Normen hätte, dann würde man  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  als einen normierten Vektorraum darstellen können. Dies gelingt leider nicht.

Man sieht direkt, dass  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n)$  und dass  $C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n)$  echt größer als  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  ist. Wie verhalten sich die beiden Konvergenzdefinitionen?

**Lemma 7.7** Sei  $\{\varphi_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

1. Wenn  $\varphi_\ell \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{D}$ , dann gilt auch  $\varphi_\ell \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{S}$ .
2. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

**Beweis.** Wir dürfen annehmen, dass  $\text{supp}(\varphi_\ell) \subset B_R(0)$  mit  $R \geq 1$ . Dann gilt

$$\|\varphi_\ell\|_{m,k}^* \leq R^k \|\varphi_\ell\|_{C^m(K)} \rightarrow 0 \text{ für } \ell \rightarrow \infty.$$

Für die Umkehrung nehmen wir ein nichttriviales  $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  und betrachten

$$\varphi_\ell(x) = \ell^{-1} \tilde{\varphi}(\ell^{-1}x).$$

Dann gilt  $\varphi_\ell \rightarrow 0$  in  $\mathcal{S}$  aber die Folge konvergiert nicht in  $\mathcal{D}$ , denn die Träger  $\text{supp}(\varphi_\ell)$  liegen nicht innerhalb eines gemeinsamen Kompaktums. Wenn man nicht mag, dass die Folge gegen 0 konvergiert, dann kann man stattdessen auch  $\varphi_\ell(x) = \ell^{-1} \tilde{\varphi}(\ell^{-1}x) + \tilde{\varphi}(x)$  betrachten. ■

## 7.2 Distributionen

Für einen normierten Raum  $X$  definiert man den Dualraum  $X'$  als den Raum der stetigen linearen Abbildungen. Um den Dualraum zu definieren, muss der Raum nicht unbedingt eine Norm haben, sondern es reicht, die Konvergenz definiert zu haben.

**Definition 7.8 (Schwartz-Distributionen)** Die Schwartz-Distributionen  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  sind die stetigen linearen Abbildungen von  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  nach  $\mathbb{R}$ . Das heißt,  $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , wenn

1.  $F$  ist linear:  $F(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1F(\varphi_1) + c_2F(\varphi_2)$  für alle  $c_i \in \mathbb{R}$  und  $\varphi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ;
2.  $F: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig:  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  impliziert  $|F(\varphi_n) - F(\varphi)| \rightarrow 0$  in  $\mathbb{R}$ .

**Bemerkung 7.8.1** Wenn  $F$  linear ist, dann reicht Stetigkeit in 0, um die Stetigkeit auf ganz  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  zu zeigen, denn  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{D}$  impliziert  $\varphi_n - \varphi \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}$ . Die Linearität liefert  $|F(\varphi_n) - F(\varphi)| = |F(\varphi_n - \varphi)|$ .

**Definition 7.9 (Temperierte Distributionen)** Die temperierten Distributionen  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  sind die stetigen linearen Abbildungen von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  nach  $\mathbb{R}$ . Linearität und Stetigkeit sind ähnlich definiert wie in Definition 7.8.

Weil  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C_{\text{s.f.}}^\infty(\mathbb{R}^n)$  gilt und wegen Lemma 7.7 kann man sagen  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Stetigkeit in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist also etwas, das für eine größere Menge Funktionen gelten soll als die Stetigkeit in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Dies bedeutet, dass

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Jede lokal Lebesgue-integrierbare Funktion  $f$  auf  $\mathbb{R}^n$  liefert durch

$$F_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx. \quad (7.3)$$

eine Abbildung  $F_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Eine solche Distribution nennt man regulär. Die Linearität von  $F_f$  folgt sofort. Für Stetigkeit betrachte man für  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit Träger in  $K$  die folgende Abschätzung:

$$|F_f(\varphi)| \leq \int_K |f(x)| |\varphi(x)| dx \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \int_K |f(x)| dx = \|f\|_{L^1(K)} \|\varphi\|_{L^\infty(K)}.$$

Wenn  $\varphi_n \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , findet man ein  $K \supset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{supp} \varphi_n$  und  $\|\varphi_n\|_{L^\infty(K)} \rightarrow 0$ . Es folgt, dass

$$|F_f(\varphi_n)| \leq \|f\|_{L^1(K)} \|\varphi_n\|_{L^\infty(K)} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Wenn die Funktion  $f$  höchstens polynomiales Wachstum hat, dann definiert (7.3) auch ein  $F_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Nimmt man jedoch eine Funktion wie  $f(x) = e^{|x|^2}$ , dann findet man, dass  $F_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  jedoch auch, dass  $F_f \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Lemma 7.10** Wenn  $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , dann ist  $F'$  definiert durch

$$F'(\varphi) := -F(\varphi'),$$

auch in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Das ähnliche Ergebnis gilt für  $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Bemerkung 7.10.1** Ähnliches gilt in höheren Dimensionen mit partiellen Ableitungen.

**Beweis.** Die Linearität von  $F'$  folgt aus der Linearität von  $F$ . Für die Stetigkeit von  $F'$  verwendet man die von  $F$ . Denn, wenn  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  oder  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  gilt, dann gilt auch  $\varphi'_n \rightarrow \varphi'$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  oder  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Weil

$$F'(\varphi_n) = -F(\varphi'_n) \rightarrow -F(\varphi') = F'(\varphi)$$

folgt das Ergebnis. ■

**Beispiel 7.11** Betrachtet man  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $f(x) = \frac{1}{2} \text{sign}(x)$ , dann ist die zugehörige Abbildung  $F$  auf  $C_0[-1, 1]$  definiert als

$$F(\varphi) = \int_{-1}^1 f(x)\varphi(x)dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 \varphi(x)dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi(x)dx.$$

Es gilt für  $F'$  auf  $C^1[-1, 1] \cap C_0[-1, 1]$ , dass

$$\begin{aligned} F'(\varphi) &= -F(\varphi') = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \varphi'(x)dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi'(x)dx = \\ &= \frac{1}{2}\varphi(0) - \frac{1}{2}\varphi(-1) - \frac{1}{2}\varphi(1) + \frac{1}{2}\varphi(0) = \varphi(0) = \delta(\varphi). \end{aligned}$$

Abbildung 7.2: Darstellung einer Funktion aus  $D(\mathbb{R})$ . Eine solche Funktion ist unendlich oft differenzierbar und hat einen kompakten Träger.

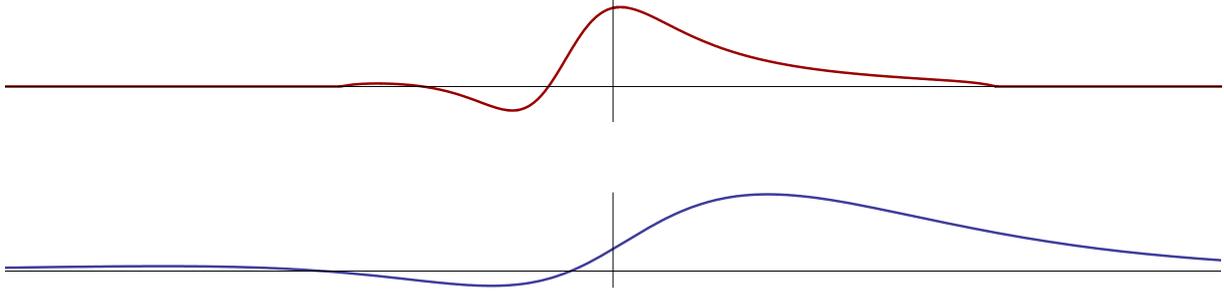


Abbildung 7.3: Darstellung einer Funktion aus  $S(\mathbb{R})$ . Eine solche Funktion ist unendlich oft differenzierbar und schnell fallend.

**Bemerkung 7.11.1** Die Dirac- $\delta$ -Funktion liegt sowohl in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  als auch in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , denn für  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \cup C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n)$  gilt

$$|\delta_0(\varphi)| = |\varphi(0)| \leq \|\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi\|_{0,0}^*.$$

Reguläre Distributionen sind Distributionen aus  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  oder  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , welche sich wie in (7.3) mit Hilfe einer Funktion definieren lassen.

Wir betrachten nochmals  $\varphi_\varepsilon$  aus (2.8):

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2 - \varepsilon^2}} & \text{für } |x| < \varepsilon, \\ 0 & \text{für } |x| \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (7.4)$$

und setzen

$$\psi_\varepsilon(x) = \frac{\varphi_\varepsilon(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x) dx}. \quad (7.5)$$

Ein Bild zu diesen Funktionen findet man in Abbildung 2.3. Setze

$$\Psi_\varepsilon(u)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(y-x) u(x) dx \text{ für } u \in C_B(\mathbb{R}^n). \quad (7.6)$$

Für  $\varepsilon > 0$  ist die Abbildung  $\Psi_\varepsilon : C_B(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_B(\mathbb{R}^n)$  wohldefiniert, und es gilt

$$u \in C_B(\mathbb{R}^n) \implies \Psi_\varepsilon(u) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C_B(\mathbb{R}^n).$$

**Definition 7.12** Der Operator  $\Psi_\varepsilon : C_B(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_B(\mathbb{R}^n)$  aus (7.6) nennt man den Friedrichs'schen<sup>2</sup> Glätter oder Mollifier.

**Lemma 7.13** Sei  $u \in C_B(\mathbb{R}^n)$ . Es gilt

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Psi_\varepsilon(u)(y) = u(y). \quad (7.7)$$

Für  $u \in C_B^1(\mathbb{R}^n)$  gilt sogar

$$|\Psi_\varepsilon(u)(y) - \delta_y u| \leq \|u\|_{C_B^1(\mathbb{R}^n)} \varepsilon. \quad (7.8)$$

<sup>2</sup>Kurt Otto Friedrichs, (1901 Kiel – 1982 New Rochelle, New York) war ein deutsch-amerikanischer Mathematiker

**Bemerkung 7.13.1** Man kann dieses Ergebnis wie folgt lesen:  $\{\Psi_\varepsilon(\cdot)(y)\}_{\varepsilon>0}$  sind reguläre Distributionen, die die Dirac- $\delta$ -Funktion an der Stelle  $y$  approximieren, wenn  $\varepsilon \downarrow 0$ .

**Bemerkung 7.13.2** Weil (7.7) gilt, sind  $\Psi_\varepsilon(u)$  für  $\varepsilon > 0$  unendlich oft differenzierbare Funktionen, die  $u \in C_B(\mathbb{R}^n)$  punktweise approximieren. Wenn  $u \in C_B^1(\mathbb{R}^n)$  ist diese Approximation wegen (7.8) sogar gleichmäßig.

**Beweis.** Da  $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(x) dx = 1$  gilt und  $u$  stetig ist, folgt

$$\begin{aligned} |\Psi_\varepsilon(u)(y) - u(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(y-x) (u(x) - u(y)) dx \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(y-x) \sup_{z \in B_\varepsilon(y)} |u(z) - u(y)| dx = \sup_{z \in B_\varepsilon(y)} |u(z) - u(y)| \rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \downarrow 0. \end{aligned}$$

Wenn  $u \in C_B^1(\mathbb{R}^n)$ , hat man  $|u(z) - u(y)| \leq \|u\|_{C_B^1(\mathbb{R}^n)} |z - y|$ , und es folgt die letzte Ungleichung. ■

### 7.3 Distributionen und Differentialgleichungen

**Beispiel 7.14** Man könnte versuchen Distributionen als Anfangswerte zuzulassen. Wir betrachten

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t) & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (7.9)$$

und nehmen hier statt die Funktion  $u_0$  die  $\delta$ -Distribution  $\delta_y$  und setzen  $v_0 = f = 0$ . Man bekomme formell eine distributionelle Lösung  $u(\cdot, t) = \frac{1}{2} \delta_{y-ct} + \frac{1}{2} \delta_{y+ct} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  ( $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ) Hätte man  $u_0 = \sum_i \delta_{y_i}$ , würde man durch die Linearität  $u(\cdot, t) = \frac{1}{2} \sum_i (\delta_{y_i-ct} + \delta_{y_i+ct})$  als Lösung haben. Für eine allgemeine Anfangsbedingung  $u_0(\cdot)$  kann man formell schreiben (wir tun mal so, als ob  $\delta_y$  eine Funktion wäre):

$$u_0(x) = \int_{y \in \mathbb{R}} \delta_y(x) u_0(y) dy.$$

Die Lösung wäre

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{y \in \mathbb{R}} \left( \frac{1}{2} \delta_{y-ct}(x) + \frac{1}{2} \delta_{y+ct}(x) \right) u_0(y) dy \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}} \left( \frac{1}{2} \delta_y(x+ct) + \frac{1}{2} \delta_y(x-ct) \right) u_0(y) dy = \frac{1}{2} u_0(x+ct) + \frac{1}{2} u_0(x-ct). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Wenn auch dies alles mathematisch erst noch mal zwielichtig ist, kann man leicht kontrollieren, dass das Endergebnis vernünftig ist. Für  $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$  ist (7.10) tatsächlich die klassische Lösung, die wir schon vorher sahen.

**Beispiel 7.15** Man betrachte  $f(x) = \frac{1}{2}|x|$ . Dann ist  $f'$  und  $f''$  nicht überall definiert. Definiert man  $F_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  oder  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  durch

$$F_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx,$$

dann folgt

$$\begin{aligned} F'_f(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \operatorname{sign}(x) \varphi(x) dx, \\ F''_f(\varphi) &= \varphi(0). \end{aligned}$$

Man bemerke, dass

$$f'(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sign}(x) \text{ für } x \neq 0.$$

Man zeigt diese Behauptungen durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} F'_f(\varphi) &= -F_f(\varphi') = - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} |x| \varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} x \varphi'(x) dx - \int_0^{\infty} \frac{1}{2} x \varphi'(x) dx = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \left[ \frac{1}{2} x \varphi(x) \right]_{-m}^0 - \int_{-m}^0 \frac{1}{2} \varphi(x) dx \right) - \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \left[ \frac{1}{2} x \varphi(x) \right]_0^m - \int_0^m \frac{1}{2} \varphi(x) dx \right) = \\ &= - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} \varphi(x) dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \operatorname{sign}(x) \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F''_f(\varphi) &= -F'_f(\varphi') = - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \operatorname{sign}(x) \varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} \varphi'(x) dx - \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \varphi'(x) dx = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \varphi(x) \right]_{-m}^0 - \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \varphi(x) \right]_0^m = \varphi(0) = \delta(\varphi). \end{aligned}$$

Im Sinne von Distributionen gilt also:

$$\left( \frac{1}{2} |\cdot| \right)' = \frac{1}{2} \operatorname{sign}(\cdot) \text{ und } \left( \frac{1}{2} \operatorname{sign}(\cdot) \right)' = \delta(\cdot).$$

**Beispiel 7.16** Sei  $f \in L^1_{\text{lokal}}(\mathbb{R}^n)$  mit  $n \geq 3$  definiert durch

$$f(x) = |x|^{2-n}.$$

Dann ist

$$F_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} \varphi(x) dx$$

wohldefiniert für  $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  oder  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Es folgt

$$\begin{aligned} (\Delta F_f)(\varphi) &= F_f(\Delta \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} \Delta \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} |x|^{2-n} \Delta \varphi(x) dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \int_{|x| = \varepsilon} (|x|^{2-n} \nabla \varphi(x) - \nabla |x|^{2-n} \varphi(x)) \cdot \nu d\sigma_x + \int_{|x| > \varepsilon} \Delta |x|^{2-n} \varphi(x) dx \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \varepsilon^{2-n} \mathcal{O}(\varepsilon^{n-1}) - \int_{|x| = \varepsilon} (2-n) |x|^{-n} x \varphi(x) \cdot \frac{-x}{|x|} d\sigma_x + 0 \right) = \\ &= - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x| = \varepsilon} (2-n) |x|^{-n} x \varphi(x) \cdot \frac{-x}{|x|} d\sigma_x = (2-n) \omega_n \varphi(0). \end{aligned}$$

Wir nehmen  $\omega_n = \int_{\partial B_1(0)} 1 d\sigma$  wie auf Seite 34. Dann gilt im Sinne von Distributionen:

$$-\Delta \left( \frac{1}{(n-2)\omega_n} |\cdot|^{2-n} \right) = \delta(\cdot).$$

Hier ist  $\delta$  das  $n$ -dimensionale Dirac-Funktional in 0:

$$\delta(\varphi) = \varphi(0) \text{ für } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ oder } \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$



# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 8



## Die Wellengleichung in mehr Dimensionen

### 8.1 Kirchhoff für Raumdimension 3

Das Anfangswertproblem für die Wellengleichung auf dem ganzen Raum  $\mathbb{R}^3$  ist

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^3, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (8.1)$$

**Bemerkung 8.0.1** Wir versuchen anzugeben, wie man zu einer Lösungsformel kommt. Dies ist erstmal kein Beweis, sondern ein Versuch die kreative Schritte anzugeben. Später muss das Ergebnis dann noch beweisen werden.

1) Man betrachte erst den radialsymmetrischen Fall:  $u(x_1, x_2, x_3, t) = U(|x|, t)$ . Weil in 3 Raumdimensionen  $\Delta u(|x|) = r^{-2} \partial_r r^2 \partial_r u(r)|_{r=|x|}$  gilt, wird die Differentialgleichung wie folgt

$$\left( \partial_t^2 - c^2 \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r \right) U(r, t) = 0.$$

Setzen wir  $V(r, t) = r U(r, t)$  so folgt mit Hilfe von

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r \frac{1}{r} V(r, t) &= \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \left( \frac{1}{r} V_r(r, t) - \frac{1}{r^2} V(r, t) \right) = \\ &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r V_r(r, t) - V(r, t)) = \frac{1}{r} V_{rr}(r, t), \end{aligned}$$

dass

$$(\partial_t^2 - c^2 \partial_r^2) V(r, t) = 0.$$

2) Diese Gleichung ist die Wellengleichung in einer Raumdimension und die Lösungen dieser Gleichung haben die Form

$$V(r, t) = \Phi(r - ct) + \Psi(r + ct).$$

Man findet

$$U(r, t) = \frac{1}{r} \Phi(r - ct) + \frac{1}{r} \Psi(r + ct).$$

und radialsymmetrische Lösungen der Wellengleichung in 3 Raumdimensionen durch

$$u(x, t) = \frac{1}{|x|} \Phi(|x| - ct) + \frac{1}{|x|} \Psi(|x| + ct).$$

Eine Funktion  $u(x, t) = \frac{1}{|x|} \Phi(|x| - ct)$  wäre eine radialsymmetrische Welle, die sich mit Geschwindigkeit  $c$  nach außen bewegt. Die nach innen bewegende Wellen geben Probleme bei  $|x| = 0$  und lassen wir mal außer Betrachtung.

3) Analog einer Raumdimension könnte man eine Distribution formal als generalisierte Lösung ansetzen:

$$u(x, t) = \frac{1}{|x|} \delta(|x| - ct) = \frac{1}{ct} \delta(|x| - ct).$$

Die letzte Gleichung folgt, weil  $|x| = ct$  gilt auf dem Träger von  $x \mapsto \delta(|x| - ct)$ . Als Distribution in  $\mathbb{R}^3$  mit  $t$  als Parameter wäre das:

$$\begin{aligned} F_{u(\cdot, t)}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{ct} \delta(|x| - ct) \varphi(x) dx = \\ &= \frac{1}{ct} \int_{|x|=ct} \varphi(x) d\sigma_x = ct \int_{|z|=1} \varphi(ctz) d\sigma_z =: ct \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} \varphi(ct\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Für  $\omega \in \mathbb{S}^2$  schreiben wir weiter  $|\omega| = 1$ . Es gilt

$$\lim_{t \downarrow 0} F_{u(\cdot, t)}(\varphi) = 0$$

und

$$\lim_{t \downarrow 0} \partial_t F_{u(\cdot, t)}(\varphi) = \lim_{t \downarrow 0} \int_{|\omega|=1} (c \varphi(ct\omega) + c^2 t \omega \cdot \nabla \varphi(ct\omega)) d\omega = 4\pi c \varphi(0).$$

Formal scheint  $F_{u(\cdot, t)}$  das nächste Anfangswertproblem als Distribution zu erfüllen

$$\begin{cases} \partial_t^2 F_{u(\cdot, t)} - c^2 \Delta F_{u(\cdot, t)} = 0 & \text{für } t > 0, \\ F_{u(\cdot, t)} = 0 & \text{für } t = 0, \\ \partial_t F_{u(\cdot, t)} = 4\pi c \delta_0 & \text{für } t = 0. \end{cases} \quad (8.2)$$

4) Ähnlich wäre  $u(x, t) = \frac{1}{4\pi c|x|} \delta(|x - y| - ct)$  so, dass die Distribution  $F_{u(\cdot, t)}$  eine Lösung ist von

$$\begin{cases} \partial_t^2 F_{u(\cdot, t)} - c^2 \Delta F_{u(\cdot, t)} = 0 & \text{für } t > 0, \\ F_{u(\cdot, t)} = 0 & \text{für } t = 0, \\ \partial_t F_{u(\cdot, t)} = \delta_y & \text{für } t = 0. \end{cases} \quad (8.3)$$

Welle, die in  $y$  startet. Wie in einer Dimension kann man vermuten, dass, wenn man die Delta-Funktionen durch eine Dichte  $v_0$  ersetzt, dies eine Lösung von (8.1) wäre mit  $f = u_0 = 0$ :

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi c^2 t} \delta(|x - y| - ct) v_0(y) dy \quad \text{“} = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y.$$

5) Hat man eine genügend oft differenzierbare Lösung  $u(x, t)$  von

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = 0 & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^3, \\ u(x, 0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (8.4)$$

dann erfüllt  $w(x, t) := \partial_t u(x, t)$  formal

$$w_{tt} = u_{ttt} = c^2 \Delta u_t = c^2 \Delta w$$

und

$$w(x, 0) = u_t(x, 0) = v_0(x),$$

und

$$w_t(x, 0) = u_{tt}(x, 0) = c^2 \Delta u_{xx}(x, 0) = 0.$$

Das folgende Theorem sagt, dass diese Bemerkung tatsächlich eine Lösung zu den Anfangswert  $v_0$  gibt.

**Theorem 8.1 (Die Formel von Kirchhoff<sup>1</sup>)** Sei  $f = 0$ ,  $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$  und  $v_0 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ . Dann hat (8.1) eine Lösung in  $C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ , nämlich

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y + \partial_t \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) \quad (8.5)$$

**Bemerkung 8.1.1** Betrachtet man wiederum das Einflussgebiet und das Abhängigkeitsgebiet wie auch in einer Dimension, dann bekommt man zwei Kegelränder, die schematisch (die Bodenplatte soll  $\mathbb{R}^3$  darstellen) in Abbildung 8.1 dargestellt sind.

**Bemerkung 8.1.2** Die Formel in (8.5) kann man auch wie folgt schreiben:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|=ct} (tv_0(y) + u_0(y) + \nabla u_0(y) \cdot (y-x)) d\sigma_y$$

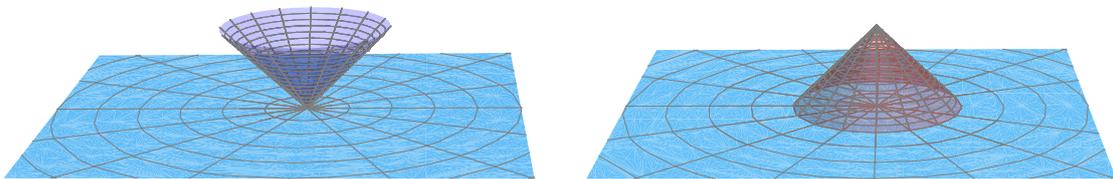


Abbildung 8.1: Einfluss- und Abhängigkeitsgebiet in 3 Dimensionen. Nach oben die Zeit; in blau das dreidimensionale(!)  $\mathbb{R}^3$  für  $t = 0$ . Nur der Rand des Kegels zählt.

**Beweis.** Wir zeigen erst, dass die Anfangsbedingungen erfüllt sind. Weil  $v_0$  stetig differenzierbar und  $u_0$  zweimal stetig differenzierbar ist, folgt für die erste Randwertbedingung:

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} v_0(x + ct\omega) d\omega = 0, \\ \lim_{t \downarrow 0} \partial_t \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) &= \lim_{t \downarrow 0} \partial_t \left( \frac{t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} u_0(x + ct\omega) d\omega \right) = \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} (u_0(x + ct\omega) + ct\omega \cdot \nabla u_0(x + ct\omega)) d\omega = u_0(x). \end{aligned}$$

Für die zweite Randwertbedingung finden wir

$$\lim_{t \downarrow 0} \partial_t \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y \right) = v_0(x)$$

<sup>1</sup>Gustav Robert Kirchhoff, Königsberg 1824 – Berlin 1887.

und

$$\begin{aligned} & \lim_{t \downarrow 0} \partial_t^2 \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) = \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \left( 2c\omega \cdot \nabla u_0(x + ct\omega) + ct \sum_{i,j=1}^3 \omega_i \omega_j \partial_{x_i} \partial_{x_j} u_0(x + ct\omega) \right) d\omega = \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{2c}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \omega \cdot \nabla u_0(x + ct\omega) d\omega = \frac{2c}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \omega \cdot \nabla u_0(x) d\omega = 0. \end{aligned}$$

Beim letzten Schritt haben wir benutzt, dass für  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  gilt

$$\int_{|\omega|=1} \omega \cdot \vec{v} d\omega = 0.$$

Bevor wir zeigen können, dass die Differentialgleichung erfüllt ist, brauchen wir das folgende Lemma. ■

**Lemma 8.2** Sei  $u \in C^2(\overline{B_R(0)})$  mit  $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$  und  $n > 2$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{|y|<R} \frac{-\Delta u(y)}{|y|^{n-2}} dy = \\ &= u(0) - \frac{1}{(n-2)\omega_n R^{n-2}} \int_{|y|=R} \nabla u(y) \cdot \nu d\sigma_y - \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{|y|=R} u(y) d\sigma_y. \end{aligned}$$

**Bemerkung 8.2.1** Für  $n = 3$  folgt

$$\int_{|y|<R} \frac{-\Delta u(y)}{4\pi|y|} dy = u(0) - \frac{1}{4\pi R} \int_{|y|=R} \nabla u(y) \cdot \nu d\sigma_y - \frac{1}{4\pi R^2} \int_{|y|=R} u(y) d\sigma_y.$$

**Beweis.** Man braucht Gauß,

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} (v \nabla u - \nabla v u) d\sigma_x + \int_{\Omega} (\Delta v) u dx,$$

die Tatsache, dass  $y \mapsto |y|^{2-n}$  harmonisch außerhalb 0 ist,

$$\Delta |y|^{2-n} = \nabla \cdot \nabla |y|^{2-n} = \nabla \cdot ((2-n)|y|^{-n} y) = (2-n)(-n|y|^{-n-2} y \cdot y + n|y|^{-n}) = 0$$

und, dass  $y \mapsto |y|^{2-n}$  integrierbar ist bei 0:

$$\begin{aligned} & \int_{|y|<R} \frac{-\Delta u(y)}{|y|^{n-2}} dy = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon < |y| < R} \frac{-\Delta u(y)}{|y|^{n-2}} dy = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \left( \int_{|y|=R} - \int_{|y|=\varepsilon} \right) (-|y|^{2-n} \nabla u(y) + u(y) \nabla |y|^{2-n}) \cdot \nu d\sigma_y + \right. \\ & \quad \left. + \int_{\varepsilon < |y| < R} -\Delta |y|^{2-n} u(y) dy \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \left( \int_{|y|=R} - \int_{|y|=\varepsilon} \right) \left( -|y|^{2-n} \nabla u(y) \cdot \nu + u(y) (2-n) |y|^{-n} y \cdot \frac{y}{|y|} \right) d\sigma_y \right) = \\ &= \int_{|y|=R} (-R^{2-n} \nabla u(y) \cdot \nu + u(y) (2-n) R^{1-n}) d\sigma_y + \\ & \quad + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y|=\varepsilon} (\varepsilon^{2-n} \nabla u(y) \cdot \nu + u(y) (n-2) \varepsilon^{1-n}) d\sigma_y = \\ &= \frac{-1}{R^{n-2}} \int_{|y|=R} \nabla u(y) \cdot \nu d\sigma_y - \frac{n-2}{R^{n-1}} \int_{|y|=R} u(y) d\sigma_y + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{O}(\varepsilon) + (n-2)\omega_n u(0). \end{aligned}$$

Beim letzten Schritt ist verwendet worden, dass der Flächeninhalt von  $\partial B_\varepsilon(0)$  gleich  $\omega_n \varepsilon^{n-1}$  ist. ■

### Fortsetzung des Beweises von Theorem 8.1. .

Wir zeigen nun, dass die Differentialgleichung erfüllt ist und fangen an mit dem Teil, der zu  $v_0$  gehört:

$$\begin{aligned}
& c^2 \Delta_x \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y = \Delta_x \frac{c^2 t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} v_0(x + ct\omega) d\omega = \\
& = \frac{c^2 t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \Delta_x v_0(x + ct\omega) d\omega = \frac{c^2 t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} (\Delta v_0)(x + ct\omega) d\omega = \\
& = \frac{1}{4\pi t} \int_{|z|=ct} \Delta v_0(x + z) d\sigma_z = \int_{|z|=ct} \frac{c}{4\pi |z|} \Delta v_0(x + z) d\sigma_z = \\
& = \partial_t \int_{r=0}^{ct} \int_{|z|=r} \frac{1}{4\pi |z|} \Delta v_0(x + z) dr d\sigma_z = \partial_t \int_{|z|<ct} \frac{1}{4\pi |z|} \Delta v_0(x + z) dz = \\
& = \partial_t \left( -v_0(x) + \frac{1}{4\pi ct} \int_{|z|=ct} \nabla v_0(x + z) \cdot \nu d\sigma_z + \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|z|=ct} v_0(x + z) d\sigma_z \right) = (*).
\end{aligned}$$

Beim letzten Schritt ist das Lemma verwendet worden. Es folgt weiter, dass

$$\begin{aligned}
(*) & = \frac{1}{4\pi} \partial_t \left( \int_{|z|=ct} \frac{1}{|z|} \nabla v_0(x + z) \cdot \nu d\sigma_z + \int_{|z|=ct} \frac{1}{|z|^2} v_0(x + z) d\sigma_z \right) \\
& = \partial_t \left( \frac{1}{4\pi} \int_{|z|=ct} \frac{1}{|z|^2} \nu \cdot \nabla (|z| v_0(x + z)) d\sigma_z \right) \\
& = \partial_t^2 \left( \frac{1}{4\pi c} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon < |z| < ct} \frac{1}{|z|^2} \nu \cdot \nabla (|z| v_0(x + z)) dz \right) \\
& = \partial_t^2 \left( \frac{1}{4\pi c} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|\omega|=1} \left( \int_{\varepsilon < r < ct} \frac{1}{r^2} \partial_r (r v_0(x + r\omega)) r^2 dr \right) d\omega \right) \\
& = \partial_t^2 \left( \frac{1}{4\pi c} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|\omega|=1} (ct v_0(x + ct\omega) - \varepsilon v_0(x + \varepsilon\omega)) d\omega \right) \\
& = \partial_t^2 \left( \frac{t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} v_0(x + ct\omega) d\omega \right) = \partial_t^2 \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y \right).
\end{aligned}$$

Für den zweiten Teil können wir uns nun kurz fassen:

$$\begin{aligned}
c^2 \Delta_x \partial_t \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) & = \partial_t c^2 \Delta_x \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) \\
& = \partial_t^2 \partial_t \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right),
\end{aligned}$$

und der Beweis ist komplett. ■

Auch hier kann man für  $f$  das Prinzip von Duhamel verwenden. Da dieses Prinzip in jeder Dimension gilt, betrachten wir gleich die allgemeine Version.

## 8.2 Ergebnisse für beliebige Dimensionen

**Proposition 8.3 (Prinzip von Duhamel)** Sei  $f \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ ,  $u_0 = v_0 = 0$ . Wenn für jedes  $s \geq 0$  die Funktion

$$(x, t) \mapsto U(x, t; s) \in C^2(\{(x, t, s); x \in \mathbb{R}^n \text{ und } 0 \leq s \leq t < \infty\})$$

eine Lösung ist von

$$\begin{cases} U_{tt}(x, t; s) - c^2 \Delta U(x, t; s) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t > s, \\ U(x, t; s) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t = s, \\ U_t(x, t; s) = f(x, s) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t = s, \end{cases} \quad (8.6)$$

dann ist

$$u(x, t) = \int_0^t U(x, t; s) ds. \quad (8.7)$$

eine Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (8.8)$$

**Beweis.** Ähnlich wie in einer Dimension zeigt man:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \int_0^t U(x, t; s) ds &= \partial_t \left( U(x, t; s)_{s=t} + \int_0^t \partial_t U(x, t; s) ds \right) = \partial_t \int_0^t \partial_t U(x, t; s) ds = \\ &= (\partial_t U(x, t; s))_{s=t} + \int_0^t \partial_t^2 U(x, t; s) ds = f(x, s) + \int_0^t c^2 \Delta U(x, t; s) ds. \end{aligned}$$

■

Die Ableitung der Kirchhoffschen Formel mag rätselhaft erscheinen. Wenn man hinterher zeigen kann, dass das Ergebnis stimmt, soll uns das eigentlich keine Sorgen bereiten. Trotzdem ist es vernünftig, dieser Ableitung etwas Beachtung zu geben. Die Idee ist wie folgt gekommen. Die  $\Delta$ -Differentialoperator ist drehungsinvariant:

$$\Delta(u \circ R) = (\Delta u) \circ R \text{ für beliebige Drehungen } R,$$

denn sei  $M$  eine orthogonale Matrix, so findet man  $MM^T = I$  und

$$\begin{aligned} \Delta(u(Mx)) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j,k=1}^n M_{ji} M_{ki} (\partial_k \partial_j u)(Mx) = \sum_{j,k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n M_{ji} M_{ki} \right) (\partial_k \partial_j u)(Mx) = \\ &= \sum_{j,k=1}^n (MM^T)_{jk} (\partial_k \partial_j u)(Mx) = \sum_{k=1}^n (\partial_k^2 u)(Mx) = (\Delta u)(Mx). \end{aligned}$$

**Proposition 8.4 (Euler - Poisson - Darboux<sup>2</sup>)** Wenn  $(t, x) \mapsto u(t, x)$  eine Lösung ist in  $C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  von

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t > 0, \\ u(x, t) = g(x) \text{ und } u_t(x, t) = h(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (8.9)$$

dann ist

$$U(r, t) := \frac{\int_{\partial B_r(x)} u(y, t) d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(x)} 1 d\sigma_y} \quad (8.10)$$

<sup>2</sup> • Leonhard Euler, Basel 1707 – St. Petersburg 1783. • Siméon Denis Poisson, 1781 – 1840, hat sich nie weit von Paris entfernt. Die folgende Aussage wird ihm zugeschrieben: *La vie n'est bonne qu'à deux choses: à faire des mathématiques et à les professer.* Siehe Seite 96 für ein Bild. • Jean Gaston Darboux, Nîmes 1842 – Paris 1917.

mit

$$G(r) := \frac{\int_{\partial B_r(x)} g(y) d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(x)} 1 d\sigma_y} \quad \text{und} \quad H(r) := \frac{\int_{\partial B_r(x)} h(y) d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(x)} 1 d\sigma_y} \quad (8.11)$$

eine Lösung in  $C^2((0, \infty) \times [0, \infty))$  von

$$\begin{cases} U_{tt}(r, t) - c^2 r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r U(r, t) = 0 & \text{für } r > 0 \text{ und } t > 0, \\ U(r, t) = G(r) \text{ und } U_t(r, t) = H(r) & \text{für } r > 0, \end{cases} \quad (8.12)$$

mit  $\lim_{r \downarrow 0} U(r, t) = u(x, t)$ ,  $\lim_{r \downarrow 0} U_r(r, t) = 0$  und  $\lim_{r \downarrow 0} U_{rr}(r, t) = \frac{1}{n} \Delta u(x, t)$ .

**Bemerkung 8.4.1** Die Differentialgleichung in (8.12) nennt man die Euler-Poisson-Darboux Gleichung.

**Beweis.** Man hat

$$\frac{\int_{\partial B_r(x)} u(y, t) d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(x)} 1 d\sigma_y} = \frac{\int_{|\omega|=1} u(x + r\omega, t) r^{n-1} d\omega}{\int_{|\omega|=1} r^{n-1} d\omega} = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\omega|=1} u(x + r\omega, t) d\omega$$

und so folgt mit Gauß

$$\begin{aligned} \partial_r U(r, t) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{|\omega|=1} \nabla u(x + r\omega, t) \cdot \omega d\omega \\ &= \frac{r^{1-n}}{\omega_n} \int_{|z|=r} \nabla u(x + z, t) \cdot \nu d\sigma_z = \frac{r^{1-n}}{\omega_n} \int_{|z|<r} \Delta u(x + z, t) dz. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Aus (8.13) folgt

$$\partial_r U(r, t) = \frac{r \int_{|z|<r} \Delta u(x + z, t) dz}{n \int_{|z|<r} 1 dz}$$

und anschließend  $\lim_{r \downarrow 0} U_r(r, t) = 0$  und  $\lim_{r \downarrow 0} U_{rr}(r, t) = \frac{1}{n} \Delta u(x, t)$ . Weiter folgt aus (8.13), dass

$$\begin{aligned} c^2 \partial_r r^{n-1} \partial_r U(r, t) &= \partial_r \left( \frac{1}{\omega_n} \int_{|z|<r} u_{tt}(x + z, t) dz \right) \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{|z|=r} u_{tt}(x + z, t) d\sigma_z = r^{n-1} \frac{\int_{\partial B_r(x)} u_{tt}(y, t) d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(x)} 1 d\sigma_y} = r^{n-1} U_{tt}(r, t). \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingungen für  $U$  zeigt man direkt. ■

Diese letzte Proposition liefert uns auch die Eindeutigkeit der Lösung in Raumdimension 3.

**Theorem 8.5** Das Anfangswertproblem für die Wellengleichung in (8.1) hat höchstens eine Lösung in  $C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ .

**Beweis.** Wenn (8.1) zwei Lösungen hat, sagen wir  $u_1$  und  $u_2$ , dann löst  $w = u_1 - u_2$  das Randwertproblem mit  $f = u_0 = v_0 = 0$ . Nehmen wir an, es gibt  $w(\tilde{x}, \tilde{t}) \neq 0$ . Ohne Verlust der Allgemeinheit nehmen wir  $\tilde{x} = 0$ . Weil  $\Delta$  invariant unter orthogonalen Abbildungen ist, folgt  $U_{tt} - c^2 r^{-2} \partial_r r^2 \partial_r U = 0$  für

$$U(r, t) = \frac{\int_{\partial B_r(0)} w(y, t) d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(0)} 1 d\sigma_y}.$$

Setzen wir

$$V(r, t) = rU(r, t)$$

so folgt

$$r^{-2}\partial_r r^2 \partial_r U = r^{-2}\partial_r r^2 \partial_r r^{-1}V = r^{-2}\partial_r (-V + r\partial_r V) = r^{-1}\partial_r^2 V$$

und weiter, dass  $V(r, t)$  eine Lösung der Wellengleichung in einer Dimension ist mit  $V(r, 0) = V_t(r, 0) = 0$  für  $r > 0$  und  $V(0, t) = 0$ . Diese Lösung ist eindeutig und daher gilt  $V(r, t) = 0$  für alle  $r, t > 0$  und auch  $U(r, t) = 0$  für alle  $r, t > 0$ . Dann findet man

$$w(0, \tilde{t}) = \frac{1}{4\pi} \int_{M \in SO(3)} w(M0, \tilde{t}) d\sigma = \frac{1}{4\pi} U(0, \tilde{t}) = 0,$$

und dies ist ein Widerspruch. ■

### 8.3 Poisson für Raumdimension 2

Eine Lösungsformel wie die von Kirchhoff lässt sich in 2 Dimensionen nicht direkt herleiten. Wenn man die Formel in drei Dimensionen verwendet für Funktionen die in einer Richtung konstant sind, bekommt man eine Formel für das zweidimensionale Problem. Anders gesagt, statt



$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ und } u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (8.14)$$

betrachten wir das ähnliche Problem in  $\mathbb{R}^3$  mit  $\tilde{u}_0(x_1, x_2, x_3) = u_0(x_1, x_2)$  und  $\tilde{v}_0(x_1, x_2, x_3) = v_0(x_1, x_2)$ . Die Kirchhoffsche Formel gibt uns eine Lösung  $\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ , nämlich

$$\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\substack{|y-x|=ct \\ y \in \mathbb{R}^3}} \tilde{v}_0(y) d\sigma_y + \partial_t \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\substack{|y-x|=ct \\ y \in \mathbb{R}^3}} \tilde{u}_0(y) d\sigma_y \right).$$

Weil  $\tilde{u}_0$  und  $\tilde{v}_0$  jedoch nicht von  $x_3$  abhängen, hängt auch  $\tilde{u}$  nicht von  $x_3$  ab. Es folgt außerdem, dass

$$\begin{aligned} \int_{|y-x|=ct, y \in \mathbb{R}^3} \tilde{u}_0(y_1, y_2, y_3) d\sigma_y &= \int_{|y-(x_1, x_2, 0)|=ct, y \in \mathbb{R}^3} u_0(y_1, y_2) d\sigma_y = \\ &= 2 \int_{|z| \leq ct, z \in \mathbb{R}^2} u_0(x + z) \sqrt{1 + |\nabla w(z)|^2} dz. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Hier beschreibt  $w$  die Höhe  $y_3$  der Sphäre als Funktion von  $(z_1, z_2)$ , das heißt

$$(y_1, y_2, y_3) = \gamma(z_1, z_2) := (x_1 + z_1, x_1 + z_2, w(z_1, z_2)) \text{ mit } w(z_1, z_2) = \pm \sqrt{c^2 t^2 - z_1^2 - z_2^2}.$$

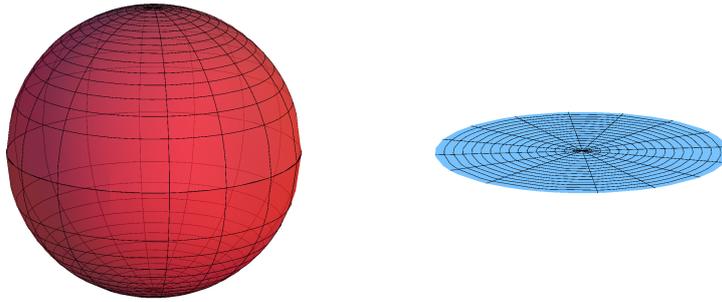


Abbildung 8.2: Statt über die Sphäre  $\partial B_{ct}(x_1, x_2, 0)$  in  $\mathbb{R}^3$  integriert man über eine Scheibe  $B_{ct}(x_1, x_2)$  in  $\mathbb{R}^2$ .

Die 2 in (8.15) folgt, weil man zwei Hälften hat. Der Faktor  $\sqrt{1 + |\nabla w(z)|^2}$  folgt aus der Parametrisierung  $\gamma$  durch

$$\sqrt{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z_1} & \frac{\partial \gamma}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z_1} & \frac{\partial \gamma}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z_2} \end{pmatrix}} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial w}{\partial z_1} & \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial w}{\partial z_2} \\ \frac{\partial w}{\partial z_2} \frac{\partial w}{\partial z_1} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z_2} \frac{\partial w}{\partial z_2} \end{pmatrix}} = \sqrt{1 + |\nabla w(z)|^2}.$$

Mit

$$\sqrt{1 + |\nabla w(z)|^2} = \sqrt{1 + \frac{|z|^2}{c^2 t^2 - |z|^2}} = \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - |z|^2}}$$

findet man:

**Theorem 8.6 (Die Formel von Poisson)** Sei  $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$  und  $v_0 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ . Die Lösung von (8.14) ist für  $x \in \mathbb{R}^2$  und  $t > 0$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_{|y-x| \leq ct} \frac{v_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy + \partial_t \left( \frac{1}{2\pi c} \int_{|y-x| \leq ct} \frac{u_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy \right). \quad (8.16)$$

**Bemerkung 8.6.1** Betrachtet man wiederum das Einflussgebiet und das Abhängigkeitsgebiet wie auch in einer Dimension, dann bekommt man in Dimension 2 zwei gefüllte Kegel die in Abbildung 8.3 dargestellt sind.

**Bemerkung 8.6.2** Wenn man auch für eine rechte Seite  $f(x, t)$  lösen möchte, kann man wiederum das Prinzip von Duhamel verwenden.

**Bemerkung 8.6.3** Diese Idee in der Dimension abzustiegen wird Hadamard zugeschrieben.

**Lemma 8.7** Man kann die Formel in (8.16) wie folgt umschreiben:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi ct} \int_{|y-x| \leq ct} \frac{tv_0(y) + u_0(y) + \nabla u_0(y) \cdot (y-x)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy.$$

**Beweis.** Wir brauchen nur die zweite Hälfte von (8.16) zu betrachten und benutzen da die Substitution  $y = x + ctr\omega$  mit  $r \in (0, 1)$  und  $\omega \in \mathbb{R}^2$  mit  $|\omega| = 1$ . Mit  $dy = c^2 t^2 r dr d\omega$  folgt

$$\begin{aligned} \partial_t \left( \frac{1}{2\pi c} \int_{|y-x| \leq ct} \frac{u_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy \right) &= \partial_t \left( \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega|=1} \int_{r=0}^1 \frac{t u_0(x + ctr\omega)}{\sqrt{1-r^2}} r dr d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega|=1} \int_{r=0}^1 \frac{u_0(x + ctr\omega) + t cr\omega \cdot \nabla u_0(x + ctr\omega)}{\sqrt{1-r^2}} r dr d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi ct} \int_{|y-x| \leq ct} \frac{u_0(y) + (y-x) \cdot \nabla u_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy. \end{aligned}$$

■

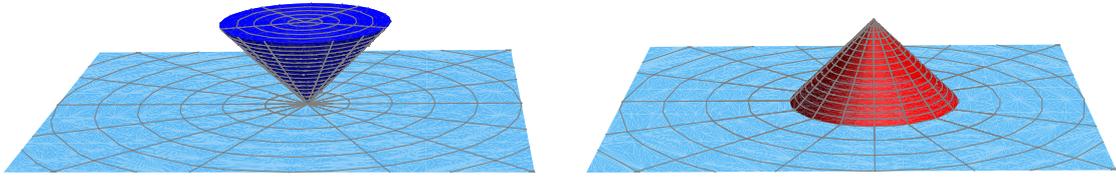


Abbildung 8.3: Einfluss- und Abhängigkeitsgebiet in 2 Dimensionen; die Zeit nach oben und in blau  $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ . Im Gegensatz zu 3 Dimensionen ist der Kegel nun gefüllt.

Die Eindeutigkeit der Lösung in zwei Raumdimensionen folgt aus der Eindeutigkeit in drei Raumdimensionen.

## 8.4 Raumdimensionen 4 und höher

Wir betrachten erst die ungeraden Raumdimensionen. Wenn wir da Existenz, Eindeutigkeit oder sogar eine explizite Formel für eine Lösung gefunden haben, können wir mit dem Absteigetricke von Hadamard auch die geraden Raumdimensionen angehen.

Wir definieren für eine Funktion  $(x, t) \mapsto u(x, t)$  die (8.9) erfüllt, wie in (8.10) die Funktion  $(r, t) \mapsto U(r, t)$ . Ähnlich werden auch  $G$  und  $H$  wie in (8.11) definiert.

**Lemma 8.8** Sei  $n \geq 3$  ungerade. Wenn  $(r, t) \mapsto U(r, t)$  eine  $\frac{1}{2}(n+1)$ -mal differenzierbare Lösung ist von

$$\begin{cases} U_{tt}(r, t) - c^2 r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r U(r, t) = 0 & \text{für } r > 0 \text{ und } t > 0, \\ U(r, t) = G(r) \text{ und } U_t(r, t) = H(r) & \text{für } r > 0, \end{cases} \quad (8.17)$$

dann ist  $(r, t) \mapsto \tilde{U}(r, t)$ , definiert durch

$$\tilde{U}(r, t) = (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} (r^{n-2} U(r, t))$$

eine Lösung von

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt}(r, t) - c^2 \partial_r^2 \tilde{U}(r, t) = 0 & \text{für } r > 0 \text{ und } t > 0, \\ \tilde{U}(r, t) = \tilde{G}(r) \text{ und } \tilde{U}_t(r, t) = \tilde{H}(r) & \text{für } r > 0, \end{cases} \quad (8.18)$$

für  $\tilde{G}(r) = (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} (r^{n-2} G(r))$  und  $\tilde{H}(r) = (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} (r^{n-2} H(r))$ .

**Beweis.** Schreibe  $k = \frac{1}{2}(n-3)$ . Man zeigt mit vollständiger Induktion nach  $k$ , dass

$$\partial_r^2 (r^{-1} \partial_r)^k r^{2k+1} f(r) = (r^{-1} \partial_r)^{k+1} r^{2k+2} \partial_r f(r).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} c^2 \partial_r^2 \tilde{U}(r, t) &= c^2 \partial_r^2 (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} (r^{n-2} U(r, t)) = \\ &= c^2 (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} (r^{-1} \partial_r) r^{n-1} \partial_r U(r, t) = \\ &= (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} r^{n-2} (c^2 r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r U(r, t)) = \\ &= \partial_t^2 (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} (r^{n-2} U(r, t)) = \partial_t^2 \tilde{U}(r, t). \end{aligned}$$

Die zugehörige Anfangsbedingungen kontrolliert man sofort. ■

Man kann nun wieder raten, wie die Lösungsformel in ungeraden Dimensionen sein wird für die Wellengleichung:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = 0 & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (8.19)$$

Verwendet man den Absteigetrick von Hadamard, dann findet man auch eine Formel für gerade Raumdimensionen.

Die Eindeutigkeit einer solchen Lösung kann man mit Hilfe von Lemma 8.8 wie in Theorem 8.5 beweisen.

**Theorem 8.9** Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ,  $f = 0$ ,  $u_0 \in C^{m+2}(\mathbb{R}^n)$  und  $v_0 \in C^{m+1}(\mathbb{R})$ .

- Wenn  $n$  ungerade ist, hat (8.19) die folgende Lösung:

$$u(x, t) = C_n \left( (t^{-1} \partial_t)^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{c^{n-1} t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y + \partial_t (t^{-1} \partial_t)^{\frac{n-3}{2}} \left( \frac{1}{c^{n-1} t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) \right).$$

$$\text{Es gilt } C_n = \frac{1}{\omega_n (n-2)(n-4) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1}.$$

- Wenn  $n$  gerade ist, hat (8.19) die folgende Lösung:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= D_n \left( (t^{-1} \partial_t)^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{c^{n-1}} \int_{|y-x| \leq ct} \frac{v_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} d\sigma_y + \right. \\ &\quad \left. + \partial_t (t^{-1} \partial_t)^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{c^{n-1}} \left( \int_{|y-x| \leq ct} \frac{u_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} d\sigma_y \right) \right). \end{aligned}$$

$$\text{Es gilt } D_n = \frac{1}{\omega_n n (n-2)(n-4) \dots 4 \cdot 2}.$$

$$\text{Wie vorher } \omega_n = \int_{\partial B_1(0)} 1 d\sigma.$$

Die Beweise dieser Formeln sind ähnlich wie die für die Formeln von Kirchhoff (8.5) und Poisson (8.16).

## 8.5 Gebiete mit Rand

Eine natürliche Frage ist was passiert wenn man die Wellengleichung nicht auf ganz  $\mathbb{R}^n$  sondern nur auf ein Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  lösen möchte. Man kann zeigen, dass das folgende Anfangs/Randwertproblem sinnvoll ist im Sinne von Hadamard:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \Omega, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x, t) = \varphi(x, t) & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (8.20)$$

Nur in einigen einfachen Fälle, wie zum Beispiel beim Halbraum  $\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ , kann man einen expliziten Formel für die Lösung herleiten. Für allgemeinere Gebiete gibt es kaum derartige explizite Formel und müssen wir andere mathematische Werkzeuge anwenden. Aber auch ohne solchen Formeln kann man die Fragen von Hadamard zu ein solches Problem angehen und für (8.20) Existenz, Eindeutigkeit und Robustheit zeigen.

**Theorem 8.10** Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$ . Dann hat (8.20) höchstens eine Lösung in  $C^2(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$ .

**Beweis.** Wenn es zwei Lösungen gäbe, sagen wir  $u_1$  und  $u_2$ , dann wäre  $u = u_1 - u_2$  eine Lösung von (8.20) mit  $f = u_0 = v_0 = \varphi = 0$ . Betrachte die Funktion

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t(x, t)^2 + c^2 |\nabla u(x, t)|^2) dx.$$

Man nennt diese Funktion die Energie. Es gilt

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{\Omega} (u_t(x, t) u_{tt}(x, t) + c^2 \nabla u(x, t) \cdot \nabla u_t(x, t)) dx = \\ &= \int_{\Omega} (u_t(x, t) u_{tt}(x, t) + c^2 \nabla u(x, t) \cdot \nabla u_t(x, t)) dx = \\ &= \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u(x, t) u_t(x, t) d\sigma_x + \int_{\Omega} u_t(x, t) (u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t)) dx = 0. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt verwenden man, dass  $u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = 0$  und dass aus  $u(x, t) = 0$  für  $(x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+$  folgt  $u_t = 0$  auf  $\partial\Omega \times \mathbb{R}^+$ . Also gilt

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t(x, 0)^2 + c^2 |\nabla u(x, 0)|^2) dx = 0.$$

Hier verwendet man  $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ . Weil in  $E(t)$  die Summe zweier Quadraten ist, folgt  $u_t(x, t) = 0 = \nabla u(x, t)$  für alle  $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$ . Wenn alle Ableitungen 0 sind, ist die Funktion konstant. Weil  $u$  am Rand 0 ist, gilt  $u = 0$  auf  $\Omega \times \mathbb{R}^+$ . Es gibt also nur eine Lösung. ■

# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 9



## Die Wärmeleitungsgleichung I

Eine typische Frage bei der parabolischen Differentialgleichung  $(\partial_t - \Delta)u = 0$  betrifft die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega. \end{cases} \quad (9.1)$$

Der Wert  $u(t, x)$  stellt die Temperatur an der Stelle  $x$  zur Zeit  $t$  dar bei durch  $u_0$  gegebenen Anfangswerten. Wenn  $\Omega = \mathbb{R}^n$  braucht man keine Randwerte. Wenn es einen Rand  $\partial\Omega$  gibt, kann man aus physikalischen Gründen vermuten, dass ein solcher Rand die Lösung mitbestimmt. Es wäre möglich den Fall zu betrachten, dass der Rand isoliert ist und dies würde bedeuten, dass keine Wärme herausfließt:  $\partial_\nu u(x, t) = 0$  für  $x \in \partial\Omega$ . Statt eines isolierten Randes könnte man am Rand die Temperatur festlegen:  $u(x, t) = \varphi(x, t)$  für  $x \in \partial\Omega$ . Im Gegensatz zu der Wellengleichung werden wir bei der Wärmeleitungsgleichung sehen, dass dieser Einfluss vom Randverhalten sich mit unendlicher Geschwindigkeit im Gebiet verbreitet. Physikalisch widerspricht es der Annahme, dass sich nichts schneller als die Lichtgeschwindigkeit verbreiten kann.

### 9.1 Diffusionskern

Die Wärmeleitungsgleichung in Raumdimension 1

$$(\partial_t - \partial_x^2) u(x, t) = 0 \quad (9.2)$$

hat die folgende Skalierungseigenschaft. Wenn  $(x, t) \mapsto u(x, t)$  eine Lösung ist, dann ist  $(x, t) \mapsto u(cx, c^2t)$  für jede  $c \in \mathbb{R}^+$  auch eine Lösung. Weil dies für jedes  $c > 0$  gilt, könnte man vielleicht sogar  $c = t^{-1/2}$  nehmen und es wäre

$$(x, t) \mapsto u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right)$$

eine Lösung. Dann hätte man eine Funktion, die nur von einer Variablen abhängt, nämlich  $\xi := \frac{x}{\sqrt{t}}$ . Setzt man

$$v(\xi) = u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right)$$

so folgt für  $v$  die folgende Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= (\partial_t - \partial_x^2) v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = v'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \frac{-x}{2t\sqrt{t}} - v''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \frac{1}{t} = \\ &= -\frac{1}{t} \left(\frac{1}{2}\xi v'(\xi) + v''(\xi)\right), \end{aligned}$$

und diese gewöhnliche Differentialgleichung kann man lösen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\xi v'(\xi) + v''(\xi) &= 0, \\ \frac{v''(\xi)}{v'(\xi)} &= -\frac{1}{2}\xi \quad (\text{oder } v'(\xi) = 0), \\ \ln |v'(\xi)| &= -\frac{1}{4}\xi^2 + c_1, \\ v'(\xi) &= c_2 e^{-\frac{1}{4}\xi^2}\end{aligned}$$

und man findet

$$u(x, t) = v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = c_2 \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi + c_3.$$

Wenn wir  $c_2 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$  und  $c_3 = 0$  setzen<sup>1</sup> folgt

$$U(x) := \lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Im Sinne von Distributionen gilt  $\partial_x U = \delta$  und mit einer Verschiebung

$$\partial_x U(\cdot - y) = \delta_y.$$

Dies läßt uns vermuten, dass man eine Lösung von

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (9.3)$$

bekommen könnte durch

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \partial_x \left( \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-y}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi \right) dy.$$

Es gilt

$$\partial_x \left( \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-y}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi \right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}$$

und das folgende Theorem.

**Theorem 9.1** Wenn  $u_0 \in C_b(\mathbb{R})$  (beschränkt und stetig), dann ist  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  wohldefiniert durch

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy \quad \text{für } t > 0.$$

Es gilt:

<sup>1</sup>Die Standardrechnung mit Polarkoordinaten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi = 2\sqrt{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{4}x^2} e^{-\frac{1}{4}y^2} dx dy} = 2\sqrt{\int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} r e^{-\frac{1}{4}r^2} dr d\varphi} = \sqrt{4\pi}.$$

- $u$  erfüllt die Differentialgleichung in (9.3);
- $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ ;
- $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = u_0(x)$  und
- für  $u$ , fortgesetzt durch  $u_0$  für  $t = 0$ , gilt  $u \in C_b(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ .

**Bemerkung 9.1.1** Die Funktion  $p(x, t) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{4t}}$  nennt man die Fundamentallösung oder der Diffusionskern für die Wärmeleitungsgleichung in Raumdimension 1. Eine Skizze findet man in Abbildung 9.1.

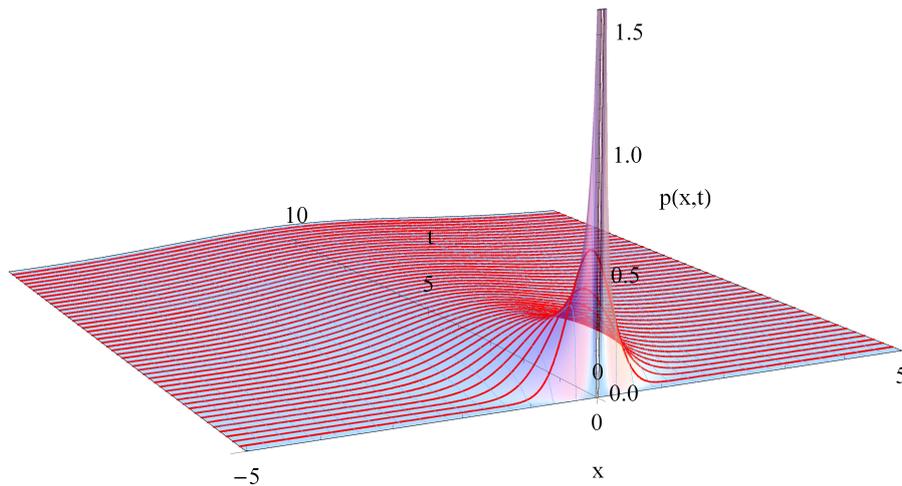


Abbildung 9.1: Eine Skizze des Diffusionskerns

**Bemerkung 9.1.2** Es gibt zwei wesentliche Unterschiede zu der Wellengleichung.

1. Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung hat eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.
2. Auch wenn  $u_0$  nur stetig ist, ist  $u(\cdot, t)$  für  $t > 0$  unendlich oft differenzierbar. Bei der Wellengleichung ist der Lösungsteil von  $u(\cdot, t)$  der von  $u_0$  abhängt genauso oft differenzierbar wie  $u_0$  (und der Teil von  $u(\cdot, t)$  der von  $v_0$  abhängt einmal mehr als  $v_0$ ).

**Beweis.** Die gleichmäßige Beschränktheit folgt aus

$$\left| \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy \right| \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \|u_0\|_{\infty} dy = \|u_0\|_{\infty}.$$

Stetigkeit und Differenzierbarkeit jeder Ordnung folgt für  $t > 0$  und  $x \in \mathbb{R}$  aus den Eigenschaften von  $\exp(-\frac{1}{4}(x-y)^2/t)$  und aus dem Satz zu dominierter Konvergenz<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Der Satz zu dominierter Konvergenz besagt, dass wenn

1.  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine positive Funktion ist mit  $\int_I g(x) dx < \infty$ ,
2. die Funktionen  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  derart sind, dass  $|f_n(x)| \leq g(x)$  für  $x \in I$ , und
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  konvergiert für fast alle  $x \in I$ ,

dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Man kann also die Folge von Differenzieren und Integrieren vertauschen und findet  $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ .

Die Differentialgleichung folgt aus

$$(\partial_t - \partial_x^2) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy = \int_{\mathbb{R}} (\partial_t - \partial_x^2) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy = 0 \text{ für } t > 0.$$

Für  $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = u_0(x)$  bemerkt man, dass

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} u_0(x - \xi\sqrt{t}) d\xi.$$

Aus der dominierten Konvergenz, die Stetigkeit von  $u_0$  und  $\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi = 1$  folgt

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} u_0(x - \xi\sqrt{t}) d\xi &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} \lim_{t \downarrow 0} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} u_0(x - \xi\sqrt{t}) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} u_0(x) d\xi = u_0(x). \end{aligned}$$

Es gilt also  $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = u_0(x)$  und diese Konvergenz ist gleichmäßig auf beschränkten Intervallen und sogar gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$  wenn  $u_0$  gleichmäßig stetig ist. Weil

$$|u(x, t) - u_0(y)| \leq |u(x, t) - u_0(x)| + |u_0(x) - u_0(y)|$$

folgt wiederum mit der lokal gleichmäßigen Stetigkeit von  $u_0$ , dass

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (y,0) \\ t > 0}} u(x, t) = u_0(y)$$

und so auch die Stetigkeit der Erweiterung von  $u(\cdot, t)$  bei  $t = 0$  mit  $u_0$ . ■

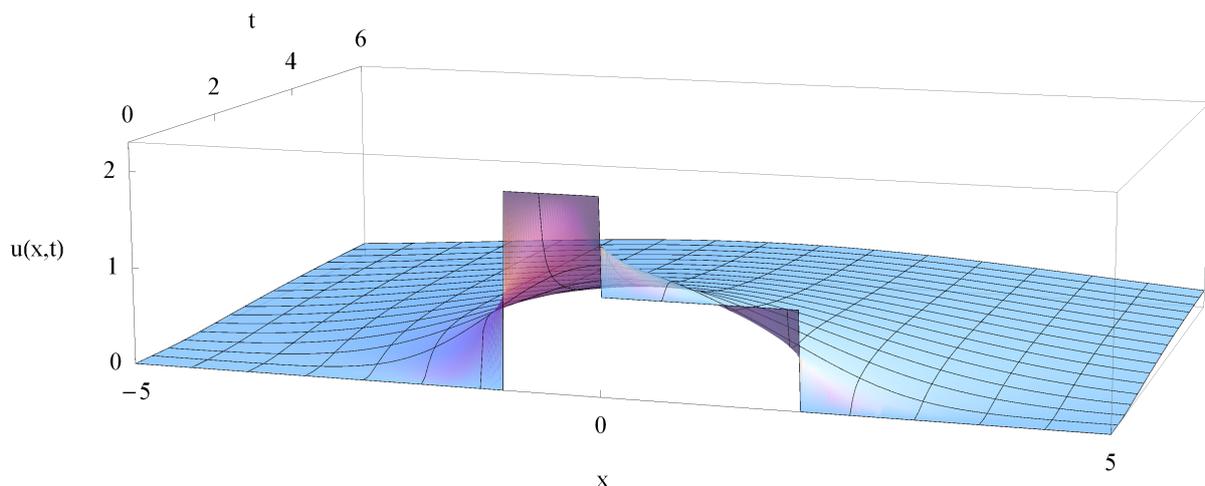


Abbildung 9.2: Darstellung der Funktion aus Beispiel 9.2.

**Beispiel 9.2** Man bekommt eine Lösung

$$u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \cap C^0(\mathbb{R} \times [0, \infty) \setminus \{(-1, 0), (0, 0), (2, 0)\})$$

von (9.3) mit

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (-\infty, -1), \\ 2 & \text{für } x \in [-1, 0), \\ 1 & \text{für } x \in [0, 2), \\ 0 & \text{für } x \in [2, \infty), \end{cases}$$

durch

$$u(x, t) = \operatorname{erf}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x-2}{2\sqrt{t}}\right)$$

mit

$$\operatorname{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-s^2} ds.$$

Obwohl diese Funktion nicht-stetige Anfangswerte hat, ist sie für  $t > 0$  sogar unendlich oft differenzierbar. Eine Skizze zu dieser Funktion findet man in Abbildung 9.2.

Für die Wärmeleitungsgleichung in mehr Dimensionen

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (9.4)$$

hat man:

**Theorem 9.3** Wenn  $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$  (beschränkt und stetig), dann ist  $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  wohldefiniert durch

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy \quad \text{für } t > 0. \quad (9.5)$$

Es gilt:

- $u$  erfüllt die Differentialgleichung in (9.4);
- $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ ;
- $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = u_0(x)$  und
- für  $u$ , fortgesetzt durch  $u_0$  für  $t = 0$ , gilt  $u \in C_b(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ .

**Bemerkung 9.3.1** Die Funktion  $p$ , definiert durch

$$p_n(x, t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t} \quad (9.6)$$

nennt man die Fundamentallösung oder Diffusionskern für die Wärmeleitungsgleichung in Raumdimension  $n$ .

**Beweis.** Wir zeigen, dass  $(x, t) \mapsto (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t}$  für  $t > 0$  die Differentialgleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} \partial_t \left( t^{-n/2} e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t} \right) &= t^{-n/2-1} \left( -\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}|x|^2 t^{-1} \right) e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t}, \\ \Delta \left( t^{-n/2} e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t} \right) &= \nabla \cdot \left( -\frac{1}{2}x t^{-n/2-1} e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t} \right) = t^{-n/2-1} \left( -\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}x \cdot x t^{-1} \right) e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t}. \end{aligned}$$

Der Rest des Beweises ist ähnlich wie in einer Dimension. ■

Wir betrachten anschließend die Wärmeleitungsgleichung mit einer Wärmequelle  $f$ :

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (9.7)$$

Dazu nehmen wir die Lösungen  $U(\cdot, \cdot; s)$  von

$$\begin{cases} \partial_t U(x, t; s) - \Delta U(x, t; s) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t > s, \\ U(x, s; s) = f(x, s) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (9.8)$$

Man bekommt eine Lösung von (9.8) durch eine Zeitverschiebung in (9.5):

$$U(x, t; s) = \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y, s) dy. \quad (9.9)$$

Ähnlich wie für die Wellengleichung hat man:

**Theorem 9.4 (Duhamel)** Sei  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ . Für die Funktion  $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$u(x, t) = \int_0^t U(x, t; s) ds, \quad (9.10)$$

mit  $U$  wie in (9.9), gilt

- $u$  erfüllt die Differentialgleichung in (9.7);
- $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = 0$ ;
- $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ .

**Beweis.** Weil  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  findet man  $U(\cdot, \cdot; s) \in C_b^2(\mathbb{R}^n \times [s, \infty))$  und es folgt<sup>3</sup>

$$\partial_t \int_0^t U(x, t; s) ds = U(x, t; s)|_{s=t} + \int_0^t \partial_t U(x, t; s) ds = f(x, t) + \int_0^t \partial_t U(x, t; s) ds.$$

Man bekommt

$$(\partial_t - \Delta) \int_0^t U(x, t; s) ds = U(x, t; s)|_{s=t} + \int_0^t (\partial_t - \Delta) U(x, t; s) ds = f(x, t)$$

und aus der Beschränktheit von  $f$ , die zur Beschränktheit von  $U$  führt, dass

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_0^t U(x, t; s) ds = 0.$$

Die letzte Aussage folgt aus  $U(\cdot, \cdot; s) \in C_b^2(\mathbb{R}^n \times [s, \infty))$ . ■

Kombiniert man (9.5), (9.9) und (9.10), so folgt:

---

<sup>3</sup>Sei  $v \in C^1(\{(s, t); 0 \leq s \leq t < \infty\})$ . Dann gilt für die rechte Ableitung von  $\int_0^t v(s, t) ds$ , dass:

$$\begin{aligned} \partial_t^+ \left( \int_0^t v(s, t) ds \right) &= \lim_{h \downarrow 0} \left( \frac{\int_0^{t+h} v(s, t+h) ds - \int_0^t v(s, t) ds}{h} \right) = \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \left( \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(s, t+h) ds + \int_0^t \frac{v(s, t+h) - v(s, t)}{h} ds \right) = \\ &= v(t, t) + \int_0^t \partial_t^+ v(s, t) ds. \end{aligned}$$

Ähnliches gilt auch für die linke Ableitung.

**Korollar 9.5** Sei  $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$  und  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ . Dann ist die Funktion

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)}{(4\pi t)^{n/2}} u_0(y) dy + \int_{s=0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right)}{(4\pi(t-s))^{n/2}} f(y, s) dy ds$$

eine Lösung von

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

## 9.2 Mittelwert und Maximum

Für harmonische Funktionen ist in Proposition 3.4 gezeigt, dass im Zentrum einer Kugel der Mittelwert über der Kugeloberfläche angenommen wird. Ein Ergebnis ähnlicher Art gilt für die Wärmeleitungsgleichung. Weil  $t$  und  $x$  sich nicht gleich verhalten, ist das Ergebnis komplizierter.

**Definition 9.6** Wir definieren eine „Wärmeleitungskugel“  $W(x, t, r) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  durch

$$W(x, t, r) = \left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; s < t \text{ und } (4\pi(t-s))^{n/2} e^{\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} < r^n \right\}. \quad (9.11)$$

**Bemerkung 9.6.1** Sei  $p_n$  der Diffusionskern. Dann gilt:

$$(4\pi(t-s))^{n/2} e^{\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} < r^n \quad \Leftrightarrow \quad 1 < r^n p_n(x-y, t-s).$$

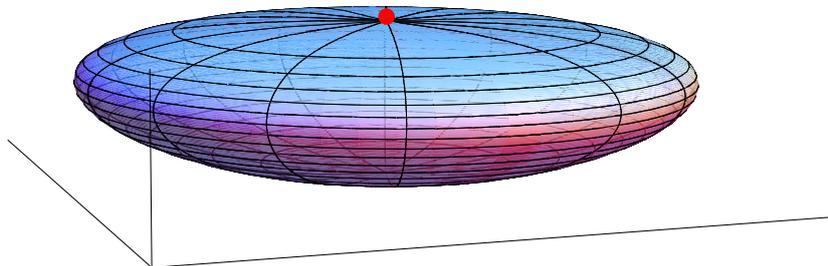


Abbildung 9.3: Eine Wärmeleitungskugel  $W(x, t, r)$  mit dem Punkt  $(x, t)$  in rot.

**Bemerkung 9.6.2** Einige Eigenschaften von  $W(x, t, r)$ .

- $\partial W(x, t, r) \in C^\infty$  für  $r > 0$ . Eine Wärmeleitungskugel ist ein konvexes Gebiet, bei dem  $(x, t)$  der höchste Punkt ist. Anders gesagt,  $(x, t)$  liegt in der Mitte oben auf  $W(x, t, r)$ .
- Für  $(y, s) \in W(x, t, r)$  gilt

$$t - \frac{1}{4\pi} r^2 < s < t \text{ und } |x - y| < c_n r$$

mit  $c_n = \left(\frac{n}{2\pi e}\right)^{n/2}$ . Das letztere folgt aus

$$\begin{aligned} |x - y|^n &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \frac{|x - y|^n}{(4(t-s))^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} (4\pi(t-s))^{n/2} e^{\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi^{n/2}} \sup_{\alpha > 0} \alpha^n e^{-\alpha^2} r^n = \left(\frac{n}{2\pi e}\right)^{n/2} r^n. \end{aligned}$$

- Weiter gilt

$$(y, s) \in W(x, t, c) \Leftrightarrow (ry, r^2s) \in W(rx, r^2t, rc).$$

**Lemma 9.7** Sei  $W(0, 0, r)$  wie in (9.11). Es gilt

$$\frac{1}{r^n} \iint_{W(0,0,r)} \frac{|y|^2}{4s^2} dy ds = 1.$$

**Beweis.** Der Ausdruck hängt nicht von  $r$  ab, denn es gilt

$$\frac{1}{r^n} \iint_{W(0,0,r)} \frac{|y|^2}{4s^2} dy ds = \frac{1}{r^n} \iint_{W(0,0,1)} \frac{|ry|^2}{4(r^2s)^2} r^n dy r^2 ds = \iint_{W(0,0,1)} \frac{|y|^2}{4s^2} dy ds.$$

Wir substituieren  $\sigma = -s$  und  $y = 2\sqrt{\sigma}z$ . Es folgt:

$$\begin{aligned} \iint_{W(0,0,1)} \frac{|y|^2}{4s^2} dy ds &= \int_{z \in \mathbb{R}^n} \int_{\sigma=0}^{\frac{1}{4\pi} e^{-2|z|^2/n}} \frac{4\sigma |z|^2}{4\sigma^2} (2\sqrt{\sigma})^n d\sigma dz = \\ &= \int_{z \in \mathbb{R}^n} \frac{2^{n+1}}{n} \left[ \sigma^{\frac{1}{2}n} \right]_0^{\frac{1}{4\pi} e^{-2|z|^2/n}} |z|^2 dz = \frac{2\omega_n}{\pi^{n/2}n} \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} r^{n+1} dr = \\ &= \frac{\omega_n}{\pi^{n/2}n} \int_{t=0}^{\infty} e^{-t} t^{n/2} dt = \frac{\omega_n}{\pi^{n/2}n} \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

Für den Flächeninhalt  $\omega_n$  der Einheitssphäre in  $\mathbb{R}^n$  gilt nämlich  $\omega_n = n\pi^{n/2}/\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)$ . ■

**Theorem 9.8 (Mittelwerteigenschaft für die Wärmeleitungsgleichung)** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$  ein Gebiet. Wenn die Funktion  $u \in C^2(U)$  die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \text{ auf } U$$

erfüllt, dann gilt

$$u(x, t) = \frac{1}{4r^n} \iint_{W(x,t,r)} u(y, s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dy ds$$

für jede Wärmeleitungskugel  $W(x, t, r)$  mit  $\overline{W(x, t, r)} \subset U$ .

**Beweis.** Ohne Verlust der Allgemeinheit können wir annehmen, dass  $x = 0$  und  $t = 0$ . Wir betrachten

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{1}{4r^n} \iint_{W(0,0,r)} u(y, s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = \\ &= \frac{1}{4r^n} \iint_{W(0,0,1)} u(ry, r^2s) \frac{|ry|^2}{(r^2s)^2} r^{n+2} dy ds = \frac{1}{4} \iint_{W(0,0,1)} u(ry, r^2s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \frac{1}{4} \iint_{W(0,0,1)} (y \cdot \nabla u(ry, r^2s) + 2rs \partial_t u(ry, r^2s)) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{W(0,0,r)} \left( \frac{|y|^2}{4s^2} y \cdot \nabla u(y, s) + \frac{|y|^2}{2s} \partial_t u(y, s) \right) dy ds = (*) \end{aligned}$$

Schreiben wir

$$\psi(y, s, r) = \log(r^n p_n(y, -s)) = n \log r - \frac{n}{2} \log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s}$$

so folgt  $\nabla\psi(y, s, r) = \frac{y}{2s}$  und  $\partial_s\psi(y, s, r) = -\frac{1}{2}ns^{-1} - \frac{1}{4}|y|^2 s^{-2}$ . Bemerke, dass

$$\psi(y, s, r) = 0 \text{ auf } \partial W(0, 0, r).$$

Wir finden, wenn wir nach  $y$ , nach  $s$  und wieder nach  $y$  partiell integrieren, dass

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{W(0,0,r)} \left( \frac{|y|^2}{4s^2} y \cdot \nabla u(y, s) + y \cdot \nabla\psi(y, s, r) \partial_s u(y, s) \right) dy ds = \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{W(0,0,r)} \left( \frac{|y|^2}{4s^2} y \cdot \nabla u(y, s) - \psi(y, s, r) (n \partial_s u(y, s) + y \cdot \nabla \partial_s u(y, s)) \right) dy ds = \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{W(0,0,r)} \left( \left( \frac{|y|^2}{4s^2} + \partial_s\psi(y, s, r) \right) y \cdot \nabla u(y, s) - n \psi(y, s, r) \partial_s u(y, s) \right) dy ds = \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{W(0,0,r)} \left( -\frac{n}{2s} y \cdot \nabla u(y, s) - n \psi(y, s, r) \Delta u(y, s) \right) dy ds = \\ &= \frac{-n}{r^{n+1}} \iint_{W(0,0,r)} (\nabla\psi(y, s, r) \cdot \nabla u(y, s) + \psi(y, s, r) \Delta u(y, s)) dy ds \\ &= \frac{-n}{r^{n+1}} \iint_{\partial W(0,0,r)} \psi(y, s, r) \nabla u(y, s) \cdot \nu_{y,s} d\sigma_{y,s} = 0. \end{aligned}$$

Hier ist  $\nu_{y,s}$  der auswärtigen Normalenvektor auf  $W(0, 0, r)$ . Also gilt

$$\phi(r) = \lim_{\rho \downarrow 0} \phi(\rho) = \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{1}{4\rho^n} \iint_{W(0,0,\rho)} u(y, s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = u(0, 0)$$

wegen der Stetigkeit von  $u$ . ■

### 9.3 Maximumprinzip und Eindeutigkeit

Für harmonische Funktionen folgt aus Korollar 3.5, dass eine harmonische Funktion ihr Maximum nur auf dem Rand annehmen kann. Auch für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung gilt ein ähnliches Ergebnis.

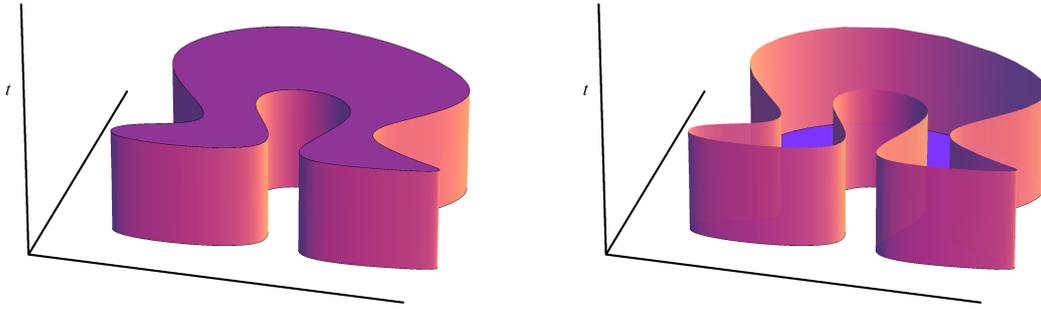
**Definition 9.9** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Man definiert den parabolischen Rand von  $\Omega \times (0, T)$  durch

$$\partial_P(\Omega \times (0, T)) = (\overline{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T]).$$

**Theorem 9.10 (Das starke Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung auf beschränkten Gebieten)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und zusammenhängend. Sei  $u \in C^2(\Omega \times (0, T)) \cap C(\overline{\Omega} \times [0, T])$  eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \text{ auf } \Omega \times (0, T).$$

Dann gilt:

Abbildung 9.4:  $\Omega \times (0, T)$  und sein parabolischer Rand  $\partial_P(\Omega \times (0, T))$ 

1. Das Maximum wird auf dem parabolischen Rand angenommen:

$$\max \{u(x, t); (x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]\} = \max \{u(x, t); (x, t) \in \partial_P(\Omega \times (0, T))\}.$$

2. Wenn das Maximum in  $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T]$  angenommen wird, also

$$u(x_0, t_0) = \max \{u(x, t); (x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]\},$$

dann ist  $u$  konstant auf  $\bar{\Omega} \times [0, t_0]$ .

**Beweis.** Wir setzen  $M = \max \{u(x, t); (x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]\}$  und nehmen an, dass es  $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T]$  gibt, mit  $u(x_0, t_0) = M$ .

Dann gilt für jede Wärmeleitungskugel  $W(x_0, t_0, r) \subset \bar{\Omega} \times [0, T]$ , dass

$$\begin{aligned} M &= u(x_0, t_0) = \frac{1}{4r^n} \iint_{W(x_0, t_0, r)} u(y, s) \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} dy ds \leq \\ &\leq \frac{1}{4r^n} \iint_{W(x_0, t_0, r)} M \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} dy ds = M. \end{aligned}$$

Gleichheit tritt nur auf, wenn  $u(y, s) = M$  für  $(y, s) \in W(x_0, t_0, r)$ . Wir können  $r$  so gross nehmen, dass  $\partial_P(\Omega \times (0, T))$  von  $W(x_0, t_0, r)$  berührt wird. In diese Berührungstelle  $(\tilde{x}, \tilde{t})$  gilt  $u(\tilde{x}, \tilde{t}) = M$  und die erste Aussage ist bewiesen.

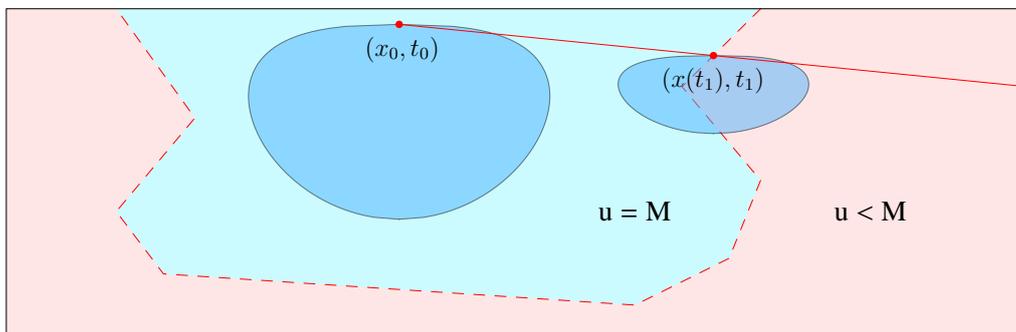


Abbildung 9.5: Die Verwendung von Wärmeleitungskugeln für das Maximumprinzip

Für die zweite Behauptung nehmen wir an, dass es  $(x_*, t_*) \in \bar{\Omega} \times [0, t_0)$  gibt mit  $u(x_*, t_*) < M$ . Sei  $x(\cdot) : [t_*, t_0] \rightarrow \Omega$  die Gerade, die  $x_*$  mit  $x_0$  verbindet. Dann verbindet  $t \mapsto (x(t), t)$  den Punkt  $(x_*, t_*)$  mit  $(x_0, t_0)$ . Setze

$$t_1 = \sup \{t \in [t_*, t_0]; u(x(t), t) < M\}. \quad (9.12)$$

Es gibt  $W(x(t_1), t_1, r) \subset \bar{\Omega} \times [0, T]$  mit  $r > 0$  und  $\varepsilon > 0$  derart, dass  $(x(t), t) \in W(x(t_1), t_1, r)$  für  $t \in (t_1 - \varepsilon, t_1)$ . Weil  $u(x(t_1), t_1) = M$  gilt, folgt aus dem ersten Teil des Beweises, dass  $u(x, t) = M$  auf  $W(x(t_1), t_1, r)$  und dies ist ein Widerspruch zu (9.12).

■

**Korollar 9.11 (Eindeutigkeit auf beschränkten Gebieten)** Sei  $\Omega$  ein offenes und beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und sei  $T > 0$ . Das Anfangs-/ Randwertproblem

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = f(x, t) & \text{für } (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x, t) = \varphi(x, t) & \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \end{cases}$$

hat höchstens eine Lösung  $u$  in  $C^2(\Omega \times (0, T)) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, T])$ .

**Beweis.** Wenn es zwei Lösungen  $u_1$  und  $u_2$  gibt, wendet man Theorem 9.10 an auf  $w = u_1 - u_2$  und auf  $-w$  für jede Zusammenhangskomponente von  $\bar{\Omega} \times [0, T]$ . ■



# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 10



## Die Wärmeleitungsgleichung II

### 10.1 Eindeutigkeit unter einer Wachstumsbedingung

**Theorem 10.1 (Ein starkes Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung auf  $\mathbb{R}^n$  unter einer Wachstumsbedingung)** Sei  $T > 0$  und sei  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \times (0, T),$$

die die folgende Bedingung erfüllt:

- Es gibt  $C$  &  $A$  derart, dass  $u(x, t) \leq Ce^{A|x|^2}$  für  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$ .

Dann gilt

$$\sup \{u(x, t); (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]\} = \sup \{u(x, 0); x \in \mathbb{R}^n\}.$$

**Beweis.** Nehme an, dass es  $(y, t_1) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$  gibt mit

$$u(y, t_1) > M := \sup \{u(x, 0); x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Wir fangen an mit dem Fall, dass  $t_1$  so klein ist, dass  $4At_1 < 1$ . Dann gibt es  $\varepsilon > 0$  mit  $4A(t_1 + \varepsilon) < 1$ . Man definiere für  $\delta > 0$  die Funktion

$$v_\delta(x, t) = u(x, t) - \frac{\delta}{(t_1 + \varepsilon - t)^{n/2}} \exp\left(\frac{|x - y|^2}{4(t_1 + \varepsilon - t)}\right)$$

und man nehme  $\delta$  so klein, dass

$$v_\delta(y, t_1) = u(y, t_1) - \frac{\delta}{\varepsilon^{n/2}} > M.$$

Es gilt  $(\partial_t - \Delta)v_\delta(x, t) = 0$  für  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, t_1 + \varepsilon)$ . Nehme  $\Omega_r = B_r(y)$ .

Wir haben

$$v_\delta(x, 0) \leq u(x, 0) \leq M \text{ für } x \in \Omega_r,$$

und für  $(x, t) \in \partial\Omega_r \times (0, t_1)$  gilt

$$\begin{aligned} v_\delta(x, t) &= u(x, t) - \frac{\delta}{(t_1 + \varepsilon - t)^{n/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(t_1 + \varepsilon - t)}\right) \leq \\ &\leq C \exp(A|x|^2) - \frac{\delta}{(t_1 + \varepsilon - t)^{n/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(t_1 + \varepsilon - t)}\right) \leq \\ &\leq C \exp(A(|y| + r)^2) - \frac{\delta}{(t_1 + \varepsilon)^{n/2}} \exp\left(\frac{1}{4(t_1 + \varepsilon)} r^2\right). \end{aligned}$$

Weil  $A < \frac{1}{4(t_1 + \varepsilon)}$ , folgt  $v_\delta(x, t) \rightarrow -\infty$  für  $(x, t) \in \partial B_r(y) \times (0, t_1)$ , wenn  $r \rightarrow \infty$ . Wir können dann  $r$  derart groß nehmen, dass

$$v_\delta(x, t) \leq M \text{ für } x \in \partial\Omega_r.$$

Mit Theorem 9.10 gilt

$$\begin{aligned} M &< \sup\{v_\delta(x, t); (x, t) \in \Omega_r \times (0, t_1)\} = \\ &\sup\{v_\delta(x, t); (x, t) \in \partial_P(\Omega_r \times (0, t_1))\} \leq M, \end{aligned}$$

ein Widerspruch.

Wenn die Annahme  $4At_1 < 1$  nicht erfüllt ist, teilt man das Intervall  $(0, t_1)$  auf in kleinere Intervalle und zeigt das Maximumprinzip nacheinander auf  $(0, \frac{1}{n}t_1)$ ,  $(\frac{1}{n}t_1, \frac{2}{n}t_1)$ , usw. ■

**Korollar 10.2 (Eindeutigkeit auf  $\mathbb{R}^n$  bei einer Wachstumsbedingung)** Sei  $T > 0$ . Betrachte das Randwertproblem

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u(x, t) = f(x, t) & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (10.1)$$

mit der folgenden Wachstumsbedingung:

- Es gibt  $C$  und  $A$  derart, dass

$$|u(x, t)| \leq Ce^{A|x|^2} \text{ für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]. \quad (10.2)$$

Dann gilt, dass höchstens eine Funktion  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  existiert, die sowohl (10.1) als auch (10.2) erfüllt.

**Beweis.** Man wende Theorem 10.1 an auf die Differenz zweier Lösungen. ■

## 10.2 Eindeutigkeit mit Hilfe der Energiefunktion

Die Eindeutigkeit für das Anfangs-/ Randwertproblem lässt sich bei beschränkten Gebieten  $\Omega$  mit  $\partial\Omega \in C^1$  einfacher zeigen. Wenn  $u_1$  und  $u_2$  Lösungen in  $C^2(\bar{\Omega} \times (0, T]) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, T])$  sind von

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u(x, t) = f(x, t) & \text{für } (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = \varphi(x, t) & \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (10.3)$$

definiert man für  $w = u_1 - u_2$  die *Energiefunktion*  $E$  durch

$$E(t) = \int_{\Omega} w(x, t)^2 dx. \quad (10.4)$$

**Lemma 10.3** Sei  $\Omega$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $w$  und  $E$  wie oben. Dann gilt  $E'(t) \leq 0$ .

**Korollar 10.4** Sei  $\Omega$  beschränkt mit  $\partial\Omega \in C^1$  und sei  $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ . Dann hat (10.3) mit  $u(x, 0) = u_0(x)$  höchstens eine Lösung in  $C^2(\bar{\Omega} \times (0, T]) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, T])$ .

**Beweis.** Man findet, dass

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{\Omega} 2w(x, t) \partial_t w(x, t) \, dx \\ &= \int_{\Omega} 2w(x, t) \Delta w(x, t) \, dx \\ &= 2 \int_{\partial\Omega} w(x, t) \frac{\partial}{\partial n} w(x, t) \, dx - 2 \int_{\Omega} |\nabla w(x, t)|^2 \, dx \\ &= -2 \int_{\Omega} |\nabla w(x, t)|^2 \, dx \leq 0. \end{aligned}$$

Wir haben die Differentialgleichung und partielle Integration verwendet, und außerdem dass  $w(x, t) = 0$  für  $x \in \partial\Omega$ . Das Lemma ist so bewiesen.

Für das Korollar bemerkt man, dass aus der Definition folgt, dass  $E(t) \geq 0$ . Also wenn  $E(0) = 0$  gilt, dann folgt, dass  $E(t) = 0$  für alle  $t \geq 0$ . Weil  $w(x, 0) = 0$  hat man  $E(0) = 0$  und so findet man

$$0 \leq E(t) \leq E(0) = 0.$$

Wenn  $E(t) = 0$  folgt  $w(x, t) = 0$  und die Eindeutigkeit. ■

Diese Energiefunktion  $E$  können wir auch verwenden um Eindeutigkeit der Anfangswerte zu zeigen. Dieses Problem ist wesentlich anders, denn eine Lösung rückwärts zu finden ist im Allgemeinen nicht möglich.

**Theorem 10.5** Wir betrachten (10.3) mit  $f$  und  $\varphi$  gegeben und  $u_0$  unbekannt. Das Gebiet  $\Omega$  sei beschränkt und  $\partial\Omega \in C^1$ . Wenn  $u_1, u_2 \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, T])$  Lösungen von

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = f(x, t) & \text{für } (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = \varphi(x, t) & \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (10.5)$$

sind (ohne  $u_0$  vorzuschreiben!) und

$$u_1(x, T) = u_2(x, T),$$

dann gilt  $u_1 = u_2$  auf  $\bar{\Omega} \times [0, T]$ .

**Beweis.** Wir betrachten  $E(t)$  aus (10.4). Es gilt

$$\begin{aligned} E''(t) &= -4 \int_{\Omega} \nabla w(x, t) \cdot \nabla \partial_t w(x, t) \, dx = \\ &= 4 \int_{\Omega} \Delta w(x, t) \partial_t w(x, t) \, dx = 4 \int_{\Omega} |\Delta w(x, t)|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Wir haben hier verwendet, dass  $w(x, t) = 0$  auf  $\partial\Omega \times [0, T]$  und daher auch  $\partial_t w(x, t) = 0$  auf  $\partial\Omega \times [0, T]$ . Mit Cauchy-Schwarz gilt dann, dass

$$E'(t) = 2 \int_{\Omega} w(x, t) \Delta w(x, t) \, dx \leq 2 \left( \int_{\Omega} w(x, t)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} \Delta w(x, t)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

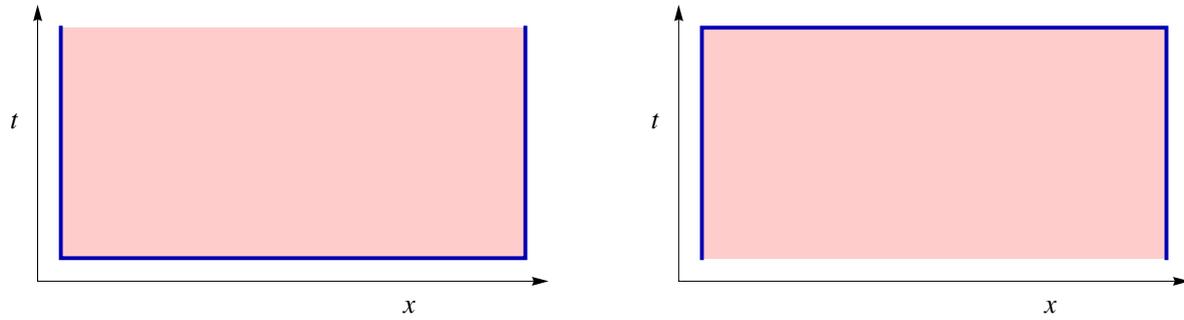


Abbildung 10.1: Schematische Darstellung vorgeschriebener Randwerte bei der Wärmeleitungsgleichung. Obwohl die Eindeutigkeit für beide Fälle gilt, heißt das noch nicht, dass beide Randwertprobleme wohldefiniert sind im Sinne von Hadamard. Mit Anfangswert  $u(x, 0) = u_0(x)$  und  $u_0 \in C(\bar{\Omega})$  kann man Existenz und Robustheit zeigen. Für  $u(x, T) = u_1(x)$  und  $u_1 \in C(\bar{\Omega})$  gilt dies nicht.

anders gesagt, dass

$$E'(t)^2 \leq E(t)E''(t).$$

Wegen unserer Annahme gilt  $E(T) = 0$ . Wenn  $E(t) = 0$  auf  $[0, T]$  wären wir fertig. Nehmen wir also an, es gibt ein Intervall  $[t_1, t_2] \subset [0, T]$  mit  $E(t) > 0$  für  $t \in [t_1, t_2)$  und  $E(t_2) = 0$ . Weil  $E(t) > 0$  auf diesem Intervall gilt, ist  $\log(E(t))$  wohldefiniert. Es folgt, dass

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 \log(E(t)) = \frac{d}{dt} \left(\frac{E'(t)}{E(t)}\right) = \frac{E''(t)E(t) - E'(t)^2}{E(t)^2} \geq 0.$$

Dann ist  $t \mapsto \log(E(t))$  convex auf  $[t_1, t_2)$  und für  $t \in [t_1, t_2)$  gilt

$$\log(E((1-s)t_1 + st)) \leq (1-s)\log(E(t_1)) + s\log(E(t)) \text{ für } s \in [0, 1].$$

Anders geschrieben wird dies

$$E((1-s)t_1 + st) \leq E(t_1)^{1-s} E(t)^s \text{ für } s \in [0, 1],$$

und weil  $E$  stetig ist, folgt

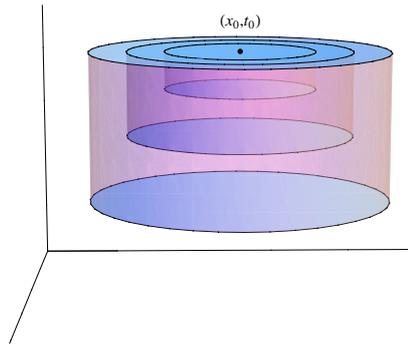
$$E((1-s)t_1 + st_2) \leq E(t_1)^{1-s} E(t_2)^s = 0 \text{ für } s \in (0, 1].$$

So findet man  $E(t) = 0$  für  $t \in (t_1, t_2]$  und das widerspricht der Annahme. ■

### 10.3 Regularität

Wir haben gesehen, dass die Lösung der Wärmeleitungsgleichung in  $\mathbb{R}^n \times (0, T)$  (mit  $f = 0$ ) unendlich oft differenzierbar ist, sogar wenn  $x \mapsto u(x, 0)$  nur stetig ist. Dies gilt auch für die Wärmeleitungsgleichung in  $\Omega \times (0, T)$  mit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Obwohl wir keine explizite Lösung zur Verfügung haben und sogar noch nicht einmal die Existenz einer Lösung gezeigt haben, können wir doch diese Regularität zeigen.

**Theorem 10.6** Sei  $u \in C^2(\Omega \times (0, T)) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, T])$  eine Lösung von (10.3) mit  $f(x, t) = 0$ . Dann gilt  $u \in C^\infty(\Omega \times (0, T))$ .

Abbildung 10.2: Die Zylinder  $Z_1 \supset Z_2 \supset Z_3$  aus dem Beweis zu Theorem 10.6.

**Beweis.** Sei  $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T)$ . Wir zeigen diese Regularität in  $(x_0, t_0)$  und definieren dazu die Zylinder

$$Z(x_0, t_0, r) = \{(x, t); |x - x_0| < r \text{ und } t_0 - r^2 < t < t_0\}.$$

Nehme an  $Z(x_0, t_0, r_0) \subset \Omega \times (0, T)$  und setze

$$Z_1 = Z(x_0, t_0, r_0), \quad Z_2 = Z(x_0, t_0, \frac{3}{4}r_0) \quad \text{und} \quad Z_3 = Z(x_0, t_0, \frac{1}{2}r_0).$$

Sei  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$  so definiert, dass

$$\chi(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{für } (x, t) \in Z_2, \\ \dots & \text{für } (x, t) \in Z_1 \setminus Z_2, \\ 0 & \text{für } (x, t) \notin Z_1, \end{cases} \quad (10.6)$$

und definiere

$$v(x, t) = \begin{cases} \chi(x, t) u(x, t) & \text{für } (x, t) \in Z_1, \\ 0 & \text{für } (x, t) \notin Z_1. \end{cases}$$

Bemerke, dass  $v \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  gilt, dass

$$v(x, 0) = 0 \quad (10.7)$$

und außerdem, dass

$$(\partial_t - \Delta)v(x, t) = ((\partial_t - \Delta)\chi(x, t))u(x, t) - 2\nabla\chi(x, t) \cdot \nabla u(x, t) =: \tilde{f}(x, t) \quad (10.8)$$

Weil  $\chi(x, t) = 1$  auf  $Z_2$  und  $\chi(x, t) = 0$  auf  $Z_1^c$  gilt, folgt

$$\tilde{f}(x, t) = 0 \text{ für } (x, t) \in Z_2 \cup Z_1^c$$

und es gilt, dass  $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ . Mit Duhamel findet man eine Lösung von (10.7-10.8) und weil diese beschränkte Lösung eindeutig ist wegen Theorem 10.2, folgt

$$v(x, t) = \iint_{(y,s) \in Z_1 \setminus Z_2} \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \exp\left(\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}\right) \tilde{f}(y, s) dy ds.$$

Für  $(x, t) \in Z_3$  gilt  $\chi(x, t) = 1$  und also auch

$$u(x, t) = \iint_{(y,s) \in Z_1 \setminus Z_2} \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \exp\left(\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}\right) \tilde{f}(y, s) dy ds \text{ für } (x, t) \in Z_3.$$

Es sei bemerkt, dass  $(x, t) \in Z_3$  und  $(y, s) \in Z_1 \setminus Z_2$  bedeutet, dass man der singulären Stelle im Integral, nämlich  $(y, s) = (x, t)$ , fern bleibt. Es gilt also, dass

$$(x, t) \mapsto \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \exp\left(\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}\right) \in C^\infty(Z_3).$$

Mit dem Satz zu Majorisierter Konvergenz lässt sich Differenzieren und Integrieren vertauschen und es folgt, dass auch  $u \in C^\infty(Z_3)$ . ■

## 10.4 Technisches Intermezzo

In (10.6) wurde eine  $C^\infty$ -Funktion verwendet, die außerhalb  $Z_1$  identisch 0 ist und innerhalb  $Z_2$  identisch 1. Die Mengen waren derartig, dass das Komplement von  $Z_1$  und  $Z_2$  eine positive Entfernung haben:

$$d(Z_1^c, Z_2) := \inf\{|(x, s) - (y, t)|; (x, s) \notin Z_1 \text{ und } (y, t) \in Z_2\}.$$

Wie bekommt man eine solche Funktion?

**Lemma 10.7** Seien  $A, B \subset \mathbb{R}^m$  mit  $\delta := \inf\{|x - y|; x \in A \text{ und } y \in B\} > 0$ . Dann existiert eine Funktion  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$  derart, dass

1.  $0 \leq \chi(x) \leq 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}^m$ ;
2.  $\chi(x) = 1$  für alle  $x \in A$ ;
3.  $\chi(x) = 0$  für alle  $x \in B$ .

**Beweis.** Wir erinnern uns den Friedrichschen Glätter  $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ :

$$\varphi_\varepsilon(x) = c_m \varepsilon^{-m} \varphi(|x|/\varepsilon)$$

mit

$$\varphi(r) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{r^2-1}\right) & \text{für } r < 1 \\ 0 & \text{für } r \geq 1 \end{cases} \quad \text{und } c_m = \left(\int_{x \in \mathbb{R}^m} \varphi(|x|) dx\right)^{-1}.$$

Die Funktion  $\varphi_\varepsilon$  hat  $\overline{B_\varepsilon(0)}$  als Träger und  $\int_{x \in B_\varepsilon(0)} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1$ .

Man definiert die Entfernung einer Stelle  $x \in \mathbb{R}^m$  zu  $A$  durch

$$d(x, A) := \inf\{|x - y|; y \in A\}.$$

Weil  $d(\tilde{x}, A) \leq d(x, A) + |x - \tilde{x}|$  gilt, ist diese Funktion stetig auf  $\mathbb{R}^m$ . Dann folgt, dass

$$A_{\delta/2} := \{x \in \mathbb{R}^m; d(x, A) < \delta/2\}$$

eine offene Menge ist, die  $A$  umfasst und noch mindestens  $\delta/2$  von  $B$  entfernt ist. Weil  $A_{\delta/2}$  offen ist, ist  $\chi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\chi(x) = \int_{A_{\delta/2}} \varphi_{\delta/2}(x - y) dy \tag{10.9}$$

wohldefiniert. Diese Funktion hat die gewünschten Eigenschaften:

Weil  $\varphi_{\delta/2} \geq 0$  gilt, folgt

$$0 \leq \chi(x) \leq \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_{\delta/2}(x-y) dy = 1.$$

Das Theorem zu majorisierter Konvergenz impliziert

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial x_i}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi_{\delta/2}(x + he_i - y) - \varphi_{\delta/2}(x - y)}{h} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_{\delta/2}(x + he_i - y) - \varphi_{\delta/2}(x - y)}{h} dy = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial \varphi_{\delta/2}}{\partial x_i}(x - y) dy \end{aligned}$$

und durch wiederholte Anwendung folgt  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ .

Weil der Träger von  $y \mapsto \varphi_{\delta/2}(x-y)$  genau  $B_{\delta/2}(x)$  ist und für  $x \in A$  gilt, dass  $B_{\delta/2}(x) \subset A_{\delta/2}$ , folgt weiter, dass

$$\chi(x) = \int_{A_{\delta/2}} \varphi_{\delta/2}(x-y) dy = \int_{B_{\delta/2}(x)} \varphi_{\delta/2}(x-y) dy = 1 \text{ für } x \in A.$$

Für  $x \in B$  folgt  $B_{\delta/2}(x) \cap A_{\delta/2} = \emptyset$  und man findet

$$\chi(x) = \int_{A_{\delta/2}} \varphi_{\delta/2}(x-y) dy = \int_{\emptyset} \varphi_{\delta/2}(x-y) dy = 0 \text{ für } x \in B.$$

■

## 10.5 Existenz auf beschränkten Gebieten

Wir werden hier skizzieren wie man die Existenz einer Lösung zu

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (10.10)$$

bekommen kann. Man versucht Lösungen zu finden für

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (10.11)$$

die folgende Form haben:

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (10.12)$$

Für eine solche Lösung gilt

$$X(x)T'(t) - \Delta X(x)T(t) = 0$$

und wenn  $u$  nicht trivial ist, findet man

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta X(x)}{X(x)}.$$

Das bedeutet wiederum, dass

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta X(x)}{X(x)} = c.$$

Man findet eine passende Funktion  $u$  wie in dem *Separationsansatz* (10.12), wenn man eine Lösung hat vom zugehörigen Eigenwertproblem.

**Definition 10.8** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes und zusammenhängendes Gebiet. Man nennt

$$\begin{cases} -\Delta X(x) = \lambda X(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ X(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (10.13)$$

wo sowohl die Funktion  $X \in C^2(\Omega) \cap C_0(\bar{\Omega})$ , als auch die Konstante  $\lambda \in \mathbb{R}$  gesucht wird, ein Eigenwertproblem. Für ein Paar  $(X, \lambda)$ , das dieses Problem erfüllt, nennt man  $X$  eine Eigenfunktion und  $\lambda$  den zugehörigen Eigenwert.

**Bemerkung 10.8.1** Meistens reicht es, wenn die Eigenfunktion nur im schwachen Sinne das Eigenwertproblem (10.13) erfüllt. Das heißt, man sucht  $X \in W_0^{1,2}(\Omega)$  derart, dass

$$\int_{\Omega} \nabla X(x) \cdot \nabla \varphi(x) - \lambda X(x)\varphi(x) dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Wenn das Gebiet keinen glatten Rand hat kann es sein, dass es nur schwache Lösungen gibt.

**Definition 10.9** Der Raum  $W_0^{1,2}(\Omega)$  ist definiert als der Abschluß von  $C_0^\infty(\Omega)$  in der  $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ -Norm:

$$W_0^{1,2}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}},$$

mit  $\|f\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$ .

**Bemerkung 10.9.1** Man hat  $C^2(\bar{\Omega}) \cap C_0(\bar{\Omega}) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ . Wenn  $\Omega$  mehrdimensional ist, sind Funktionen in  $W_0^{1,2}(\Omega)$  im Allgemeinen nicht mal stetig.

Wie bei Eigenvektoren kann man auch eine Eigenfunktion mit einer Zahl multiplizieren und es bleibt eine Eigenfunktion mit dem gleichen Eigenwert. Es ist auch hier üblich, diese (abhängigen) Eigenfunktionen als eine Eigenfunktion zu benennen.

**Beispiel 10.10** Das Eigenwertproblem

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x) & \text{für } 0 < x < 1, \\ X(x) = 0 & \text{für } x \in \{0, 1\}, \end{cases}$$

hat als Lösungen  $\{(X_k, \lambda_k); k \in \mathbb{N}^+\}$  mit

$$X_k(x) = \sin(k\pi x) \text{ und } \lambda_k = k^2\pi^2.$$

Man kann folgendes zeigen:  $\{\sqrt{2}X_k; k \in \mathbb{N}^+\}$  ist ein vollständiges orthonormales System in  $L^2(0, 1)$ . Orthonormal in  $L^2(0, 1)$  bedeutet

$$\langle \sqrt{2}X_k, \sqrt{2}X_\ell \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } k = \ell, \\ 0 & \text{für } k \neq \ell, \end{cases}$$

für  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ . Vollständig bedeutet, dass es für jede  $u_0 \in L^2(0, 1)$  eine Approximation im  $L^2(0, 1)$ -Sinne gibt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| u_0 - \sum_{k=1}^n \langle \sqrt{2}X_k, u_0 \rangle \sqrt{2}X_k(\cdot) \right\|_{L^2(0,1)} = 0.$$

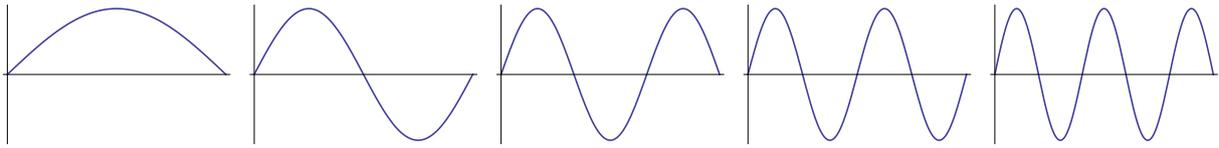


Abbildung 10.3: Darstellung der ersten 5 Eigenfunktionen aus Beispiel 10.10.

Wenn  $X_k$  eine Eigenfunktion mit Eigenwert  $\lambda_k$  für (10.13) ist, dann hat man auch eine Lösung von (10.10) mit  $u(x, 0) = X_k(x)$ , nämlich

$$u(x, t) = e^{-\lambda_k t} X_k(x).$$

Man sieht sofort, dass

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta) u(x, t) &= -\lambda_k e^{-\lambda_k t} X_k(x) + \lambda_k e^{-\lambda_k t} X_k(x) = 0, \\ u(x, 0) &= e^{-\lambda_k \cdot 0} X_k(x) = X_k(x), \\ u(x, t)|_{x \in \{0,1\}} &= e^{-\lambda_k t} X_k(x)|_{x \in \{0,1\}} = 0. \end{aligned}$$

Für  $u(x, 0) = \sum_{k=1}^n c_k X_k(x)$  findet man als Lösung dieser linearen Differentialgleichung

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{-\lambda_k t} X_k(x).$$

Ohne Beweis beschreiben wir, wie man allgemeine Anfangswerte mit einem solchen Ansatz angehen kann.

**Behauptung 10.11** *Ist folgendes erfüllt:*

1.  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  ist ein vollständiges orthonormales System von Eigenfunktionen in  $L^2(\Omega)$ , die (10.13) im schwachen Sinne erfüllen;
2.  $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  hat höchstens endlich viele negative Eigenwerte;
3.  $u_0 \in L^2(\Omega)$ ,

dann gilt:

- Die Funktion  $u(\cdot, t) \in L^2(\Omega)$  ist für  $t \geq 0$  wohldefiniert durch

$$u(x, t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{-\lambda_k t} \langle X_k, u_0 \rangle X_k(x);$$

- $t \mapsto u(\cdot, t) \in L^\infty((0, T); L^2(\Omega))$ ;
- $\lim_{t \downarrow 0} \|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^2(0,1)} = 0$ ;

Wenn zusätzlich gilt, dass  $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , dann folgt

- $t \mapsto u(\cdot, t) \in L^\infty((0, T); W_0^{1,2}(\Omega))$ ;
- $u$  ist eine schwache Lösung der Differentialgleichung  $(\partial_t - \Delta) u = 0$ .

Das bedeutet, dass für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \times (0, T))$  gilt

$$\int_0^T \int_\Omega (u(x, t) \partial_t \varphi(x, t) - \nabla u(x, t) \cdot \nabla \varphi(x, t)) dx dt = 0.$$

Ohne nähere Bedingungen am Rand  $\partial\Omega$ , wie zum Beispiel  $\partial\Omega \in C^{2,\gamma}$ , kann man nicht die Existenz einer klassischen Lösung zeigen. Auch wenn  $u_0 \in C^2(\bar{\Omega})$  kann es sein, dass  $u(\cdot, t)$  für  $t > 0$  nicht stetig bis auf  $\partial\Omega$  ist. Im Inneren von  $\Omega \times (0, T)$  wird die Lösung wie vorher unendlich oft differenzierbar sein.

Ein Separationsansatz, der zu explizit berechenbaren Lösungsformeln führt, gibt es meistens nur, wenn genügend Symmetrie vorhanden ist und man keine wilden Randwerte hat. Für

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (10.14)$$

findet man so eigentlich nur eine Lösung, wenn  $\Omega$  ein Rechteck, Quader, Kreis, Halbkreis, Kugel usw. ist.

**Beispiel 10.12** Für ein Rechteck  $\Omega$ , sagen wir  $\Omega = (0, a) \times (0, b)$ , braucht man die Eigenwerte und Eigenfunktionen zu

$$\begin{cases} -\Delta\varphi(x) = \lambda\varphi(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ \varphi(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (10.15)$$

Die Eigenwerte und Eigenfunktionen sind

$$\begin{aligned} \lambda_{k,\ell} &= \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{\ell^2}{b^2} \right) \pi^2, \\ \varphi_{k,\ell}(x_1, x_2) &= \frac{2}{ab} \sin\left(k \frac{\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\ell \frac{\pi}{b} x_2\right), \end{aligned}$$

und  $\{\varphi_{k,\ell}\}_{k,\ell=1}^\infty$  ist ein vollständiges Orthonormalsystem für  $L^2(\Omega)$ . Für  $u_0 \in L^2(\Omega)$  kann man die Lösung zu (10.14) wie folgt schreiben:

$$u(x, t) = \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \langle u_0, \varphi_{k\ell} \rangle e^{-\lambda_{k\ell} t} \varphi_{k\ell}(x)$$

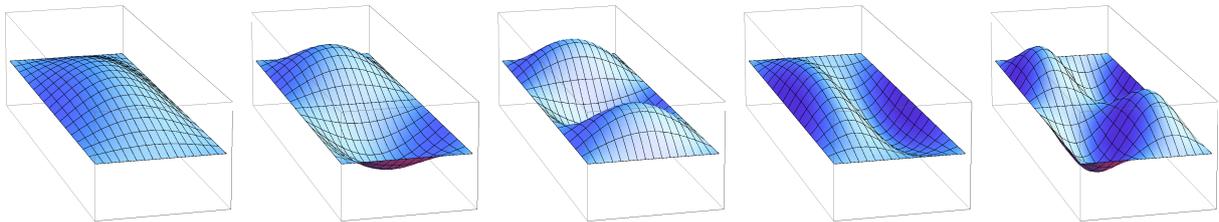


Abbildung 10.4: Darstellung der ersten 5 Eigenfunktionen aus Beispiel 10.12.

**Beispiel 10.13** Für einen Kreis  $\Omega$ , sagen wir  $\Omega = B_1(0)$ , braucht man die Eigenwerte und Eigenfunktionen zu (10.15), die man mit einem zweiten Separationsansatz, nämlich

$$\varphi(r \cos \theta, r \sin \theta) = R(r) \Theta(\theta),$$

via

$$-r^{-1} (rR'(r))' \Theta(\theta) - r^{-2} R(r) \Theta''(\theta) = \lambda R(r) \Theta(\theta)$$

überführt in

$$\begin{cases} -r^{-1} (rR'(r))' = \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right) R(r) & \text{für } r \in (0, 1), \\ R(1) = R'(0) = 0, \end{cases} \quad (10.16)$$

und

$$\begin{cases} -\Theta''(\theta) = \mu \Theta(\theta) & \text{für } \theta \in (0, 2\pi), \\ \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi). \end{cases} \quad (10.17)$$

Die Eigenwerte und Eigenfunktionen für (10.17) sind

$$\begin{aligned} \mu_n &= n^2 \text{ mit } n \in \mathbb{N}, \\ \Theta_{n,0}(\theta) &= \cos(n\theta) \text{ für } n \in \mathbb{N}, \\ \Theta_{n,1}(\theta) &= \sin(n\theta) \text{ für } n \in \mathbb{N}^+. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Besselfunktionen und ihrer Nullstellen findet man Lösungen für (10.16) mit  $\mu = n^2$  und so die Eigenwerte und Eigenfunktionen für das Eigenwertproblem (10.15) auf dem Kreis  $B_1(0)$ :

$$\begin{aligned} \lambda_{n,m} &= j_{n,m}^2, \\ \varphi_{n,m,0}(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \cos(n\theta) J_n(j_{n,m}r) \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ und } m \in \mathbb{N}^+, \\ \varphi_{n,m,1}(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \sin(n\theta) J_n(j_{n,m}r) \text{ für } n \in \mathbb{N}^+ \text{ und } m \in \mathbb{N}^+. \end{aligned}$$

Hier ist  $J_n$  die  $n$ -te Besselfunktion erster Gattung und  $j_{n,m}$  die  $m$ -te positive Nullstelle von  $J_n$ . Nach Normierung bilden diese Eigenfunktionen ein vollständiges Orthogonalsystem. Dass dieses System vollständig ist, haben wir hier jedoch nicht bewiesen.

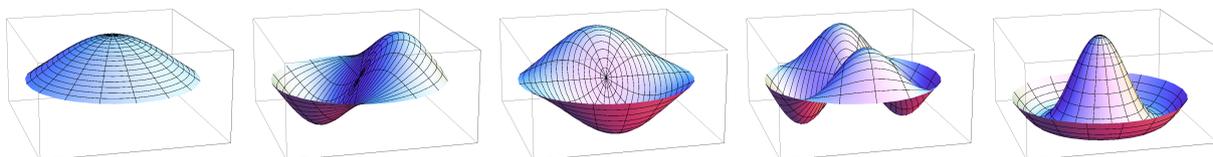


Abbildung 10.5: Darstellung von 5 Eigenfunktionen aus Beispiel 10.13:  $\varphi_{0,1,0}$ ,  $\varphi_{1,1,0}$ ,  $\varphi_{1,1,1}$ ,  $\varphi_{2,1,0}$  und  $\varphi_{0,2,0}$ .

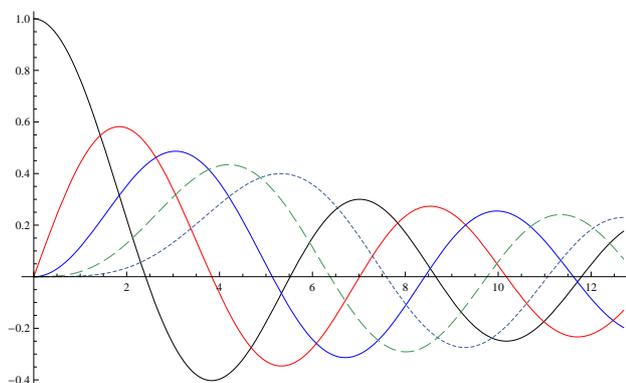


Abbildung 10.6: Friedrich Wilhelm Bessel und die nach ihm benannten Funktionen.

## 10.6 Zwei Gegenbeispiele

**Beispiel 10.14** Wir haben gesehen, dass wenn  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  eine Lösung ist von

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (10.18)$$

sogar gilt, dass  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ . Dies bedeutet, dass das Rückwärtsproblem

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (-T, 0), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (10.19)$$

nur möglicherweise lösbar ist, wenn  $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Aber wenn es der Zufall sogar will, dass (10.19) lösbar ist, zeigt folgendes Beispiel von Hadamard, dass die Robustheit verletzt ist. Sei

$$u_\varepsilon(x, t) = \varepsilon e^{-t/\varepsilon^2} \sin(x/\varepsilon).$$

Man berechnet sofort, dass  $(\partial_t - \partial_x^2) u_\varepsilon(x, t) = 0$  für  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und dass

$$|u_\varepsilon(x, 0)| = |\varepsilon \sin(x/\varepsilon)| \leq \varepsilon.$$

Auch gilt für beliebige  $t < 0$ , dass

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|u_\varepsilon(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\| \varepsilon e^{-t/\varepsilon^2} \sin(x/\varepsilon) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon e^{-t/\varepsilon^2} = \infty.$$

Das heißt, man kann kleine Störungen beim Anfangswert angeben mit beliebig großen Änderungen in der Lösung.

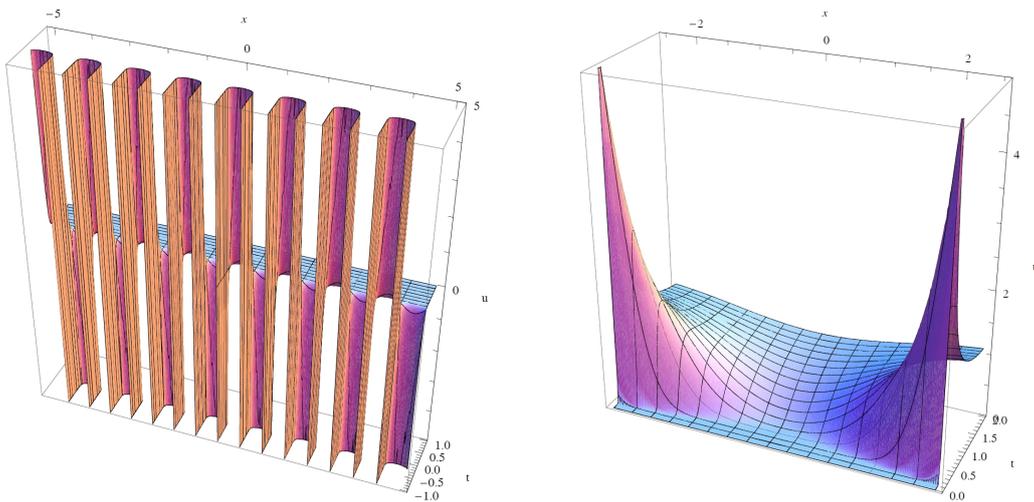


Abbildung 10.7: Links eine Skizze zu dem Gegenbeispiel von Hadamard mit  $\varepsilon = \frac{1}{5}$ . Rechts die Funktion von Tychonov aus Beispiel 10.15.

**Beispiel 10.15** Wir haben die Eindeutigkeit gezeigt für die Lösung zu

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = f(x, t) & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (10.20)$$

wenn die Lösung zusätzlich eine Wachstumsbedingung erfüllt: Es gibt  $C^\infty A$  mit

$$|u(x, t)| \leq C e^{A|x|^2} \text{ für alle } (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty).$$

Tychonov hat sich folgendes Beispiel überlegt. Man definiere

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial_t^n \phi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ für } x, t \in \mathbb{R}$$

mit

$$\phi(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{für } t \neq 0, \\ 0 & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Man kann zeigen, dass die Reihe gleichmäßig konvergiert auf kompakten Teilmengen von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und sogar dass

$$\left| \partial_t^n \phi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right| \leq \frac{2^n n!}{(2n)!} \left( \frac{x^2}{t} \right)^n \exp\left(\frac{-1}{4t^2}\right) \leq \frac{1}{n!} \left( \frac{x^2}{t} \right)^n \exp\left(\frac{-1}{4t^2}\right).$$

Es folgt

$$|u(x, t)| \leq \exp\left(\frac{x^2}{t}\right) \exp\left(\frac{-1}{4t^2}\right) = \exp\left(\frac{4x^2 t - 1}{4t^2}\right) \quad (10.21)$$

und

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = 0.$$

Dieser Grenzwert gilt für jedes  $x$ , aber die Konvergenz ist nicht gleichmäßig!

Auch gilt

$$(\partial_t - \partial_x^2) \sum_{n=0}^{\infty} \partial_t^n \phi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \partial_t^{n+1} \phi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \partial_t^n \phi(t) \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} = 0.$$

Die Funktion  $u$  ist also eine nicht-triviale Lösung von

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (10.22)$$

Es folgt selbstverständlich nicht aus (10.21), dass die  $C^\infty A$ -Bedingung nicht erfüllt ist. Man kann jedoch zeigen, dass die Abschätzung in (10.21) fast optimal ist und dass  $u$  tatsächlich die  $C^\infty A$ -Bedingung nicht erfüllt.

Mehr Details zu diesen Beispielen findet man im Buch von DiBenedetto.



# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 11

# Die Laplace- und Poisson-Gleichungen



Die Struktur bei elliptischen Gleichungen zweiter Ordnung ist nicht wesentlich verschieden bei Operatoren mit konstanten oder nicht-konstanten Koeffizienten. Technische Aspekte können leider unverhältnismäßig kompliziert werden bei allgemeinen elliptischen Randwertproblemen. Wir werden uns deshalb oft beschränken auf einen Prototyp elliptischer Differentialgleichungen, nämlich die Poisson-Gleichung<sup>1</sup>

$$\Delta u = f. \quad (11.1)$$

Den Differentialoperator<sup>2</sup>

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$$

nennt man Laplace-Operator<sup>3</sup>. Setzt man  $f = 0$  in (11.1), wird sie Laplace-Gleichung genannt. Meistens sucht man Lösungen von (11.1) auf einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit vorgegebenen Randwerten auf  $\partial\Omega$ .

## 11.1 Fundamentallösung

**Definition 11.1** Sei  $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$ . Die Funktion  $F_n : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  definiert durch

$$F_2(x) = \frac{-1}{2\pi} \ln |x|,$$
$$F_n(x) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} |x|^{2-n} \quad \text{für } n \geq 3,$$

nennt man die Fundamentallösung zu  $-\Delta$ .

**Bemerkung 11.1.1** Man findet eine Fundamentallösung für einen rotationsinvarianten Operator wie  $-\Delta$  wenn man eine passende Lösung von  $-\Delta f(|x|) = 0$  für  $|x| > 0$  nimmt. Das heißt, man sucht  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  derart, dass

$$r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r f(r) = 0.$$

<sup>1</sup>Siméon Denis Poisson (1781–1840) bekam in 1802 eine Professur an der L'École Polytechnique in Paris. Er war ein Schüler von Pierre-Simon Marquis de Laplace.

<sup>2</sup>Stochastiker nehmen oft  $\Delta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$  und für Potentialtheoretiker gilt  $\Delta = - \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$ .

<sup>3</sup>Pierre-Simon Marquis de Laplace (1749–1827) war ein Schüler von Jean-Baptiste le Rond d'Alembert.

Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \Delta f(|x|) &= \nabla \cdot \left( f'(|x|) \frac{x}{|x|} \right) = \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} f'(|x|)) \frac{x_i}{|x|} + f'(|x|) \nabla \cdot \frac{x}{|x|} = \\ &= \sum_{i=1}^n f''(|x|) \left( \frac{x_i}{|x|} \right)^2 + f'(|x|) \left( \frac{n}{|x|} - \frac{x}{|x|} \cdot \frac{x}{|x|^2} \right) = f''(|x|) + \frac{n-1}{|x|} f'(|x|) \end{aligned}$$

und via

$$f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r f(r)$$

folgt  $f(r) = c_1 r^{2-n} + c_2$ , wenn  $n \geq 2$  und  $f(r) = c_1 \log r + c_2$  wenn  $n = 2$ . Die zweite Konstante spielt keine Rolle und  $c_1$  sollte man derart wählen, dass folgendes gilt.

**Lemma 11.2** Im Sinne von Distributionen gilt  $-\Delta F_n = \delta_0$ .

**Beweis.** Man soll zeigen, dass für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  (oder  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ) gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_n(x) \cdot (-\Delta \varphi(x)) dx = \varphi(0).$$

Wie bei Proposition 3.4 verwendet man, dass  $F_n \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  und dass

$$-\Delta F_n(x) = 0 \text{ für } x \neq 0.$$

Nehmen wir  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  so gibt es eine Kugel  $B_R(0)$ , die den Träger von  $\varphi$  umfasst, und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x) (-\Delta \varphi(x)) dx &= -\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{B_R(0) \setminus B_\varepsilon(0)} F_n(x) \Delta \varphi(x) dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( - \int_{\partial(B_R(0) \setminus B_\varepsilon(0))} (F_n(x) \nabla \varphi(x) - \nabla F_n(x) \varphi(x)) \cdot \nu d\sigma_x + \right. \\ &\quad \left. - \int_{B_R(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \Delta F_n(x) \varphi(x) dx \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} F_n(x) \nabla \varphi(x) \cdot \nu d\sigma_x - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \nabla F_n(x) \varphi(x) \cdot \nu d\sigma_x. \end{aligned}$$

Man findet für  $n > 2$ , dass

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} F_n(x) \nabla \varphi(x) \cdot \nu d\sigma_x \right| &\leq \frac{\varepsilon^{2-n} \|\nabla \varphi\|_\infty}{(n-2) \omega_n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} 1 d\sigma_x = \frac{\|\nabla \varphi\|_\infty}{n-2} \varepsilon, \\ \left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \nabla F_n(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) \cdot \nu d\sigma_x \right| &\leq \frac{\varepsilon^{1-n} \|\nabla \varphi\|_\infty}{\omega_n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |x| d\sigma_x \leq \|\nabla \varphi\|_\infty \varepsilon. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x) (-\Delta \varphi(x)) dx &= -\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \nabla F_n(x) \varphi(0) \cdot \nu d\sigma_x = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{1}{\omega_n} |x|^{1-n} \varphi(0) d\sigma_x = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n} \varphi(0) \int_{\partial B_\varepsilon(0)} 1 d\sigma_x = \varphi(0). \end{aligned}$$

Für  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  benutzt man, dass  $\varphi$  und  $\nabla\varphi$  schneller als jedes Polynom nach 0 konvergiert für  $|x| \rightarrow \infty$ . ■

Wenn  $-\Delta F_n = \delta_0$  im Sinne von Distributionen, dann gilt im gleichen Sinne auch

$$-\Delta F_n(\cdot - y) = \delta_0(\cdot - y) = \delta_y(\cdot).$$

Anders gesagt

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) (-\Delta\varphi(x)) dx = \varphi(y).$$

Wenn  $-\Delta\varphi = f$  gilt, so hat man, wenn man  $x$  und  $y$  vertauscht und  $F_n(z) = F_n(-z)$  bemerkt, dass

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) f(y) dy. \quad (11.2)$$

Man nennt (11.2) eine *Darstellungformel* für  $-\Delta\varphi = f$ . Das heißt, wenn für  $\varphi$  und  $f$  gilt, dass  $-\Delta\varphi = f$ , dann gilt auch (11.2). Sie ist noch keine Lösungsformel. Das werden wir nun zeigen:

**Proposition 11.3** Sei  $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$  und setze

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) f(y) dy. \quad (11.3)$$

Dann gilt  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$  und  $-\Delta u = f$  in  $\mathbb{R}^n$ .

**Beweis.** Wenn man bedenkt, dass

$$\Delta u(x) = \Delta \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) f(y) dy \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \Delta F_n(x - y) f(y) dy = 0,$$

dann kann man anscheinend Integral und  $\Delta$ -Operator nicht vertauschen,

$$\Delta_x \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) f(y) dy \neq \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x F_n(x - y) f(y) dy$$

denn dann wäre die Proposition falsch. Der Grund ist, dass die zweiten Ableitungen von  $x \mapsto F_n(x - y)$  nicht integrierbar sind. Die Sätze über majorisierte oder monotone Konvergenz sind nicht anwendbar. Die ersten Ableitungen von  $x \mapsto F_n(x - y)$  sind aber lokal integrierbar, und mit majorisierter Konvergenz und einer partiellen Integration folgt

$$\begin{aligned} \nabla u(x) &= \nabla \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x F_n(x - y) f(y) dy = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_y F_n(x - y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) \nabla f(y) dy. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Also ist  $u$  differenzierbar und weil  $\nabla f$  stetig ist und

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) \nabla f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(z) \nabla_x f(x - z) dy$$

gilt, findet man, dass  $\nabla u$  stetig ist, also gilt  $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ .

Auch gilt, dass

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(x) &= \partial_{x_i} \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) \partial_j f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_i} F_n(x - y) \partial_j f(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i F_n)(z) (\partial_j f)(x - z) dy \end{aligned}$$

existiert und sogar stetig ist. Also gilt  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ .

Weiter folgt

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= -\nabla \cdot \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) \nabla f(y) dy = - \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x F_n(x-y) \cdot \nabla f(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_y F_n(x-y) \cdot \nabla f(y) dy. \end{aligned}$$

Wir bohren wieder ein kleines Loch, diesmal um  $x$  herum und finden

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_y F_n(x-y) \cdot \nabla f(y) dy &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)} \nabla_y F_n(x-y) \cdot \nabla f(y) dy = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( - \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \nabla_y F_n(x-y) \cdot f(y) \nu d\sigma_y - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)} \Delta_y F_n(x-y) f(y) dy \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{1}{\omega_n} |x-y|^{1-n} f(y) d\sigma_x = f(x). \end{aligned}$$

Nicht nur der letzte Schritt ist ähnlich wie im Beweis von Lemma 11.2. ■

Dieses Lemma hat als Voraussetzung, dass  $f$  stetig differenzierbar ist und einen kompakten Träger hat. Beide Bedingungen kann man abschwächen. Es reicht wenn  $f$  integrierbar ist und wenn die rechte Seite in (11.3) wohldefiniert ist. Wir werden diese Behauptung hier nicht weiter nachgehen. Wir möchten die Annahmen nur in einer Richtung etwas abschwächen. Um zu zeigen, dass  $u$  definiert durch (11.3) in  $x_0$  zweimal stetig differenzierbar ist reicht es, wenn  $f$  in einer Umgebung von  $x_0$  stetig differenzierbar ist.

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Man nehme  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  derart, dass

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x - x_0| \leq \varepsilon, \\ \dots & \text{für } \varepsilon < |x - x_0| < 2\varepsilon, \\ 0 & \text{für } |x - x_0| \geq 2\varepsilon. \end{cases}$$

Dann gilt

$$u(x) = \int_{B_{2\varepsilon}(x_0)} F_n(x-y) \chi(y) f(y) dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x_0)} F_n(x-y) (1 - \chi(y)) f(y) dy.$$

Nehmen wir  $x \in B_{\frac{1}{2}\varepsilon}(x_0)$ , so gilt für  $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x_0)$ , dass  $|x - y| \geq \frac{1}{2}\varepsilon$ . Dies bedeutet, dass die singuläre Stelle im rechten Integral mindestens  $\frac{1}{2}\varepsilon$  vom Integrationsgebiet entfernt liegt und somit folgt sogar für  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , dass

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x_0)} F_n(x-y) (1 - \chi(y)) f(y) dy \in C^\infty(B_{\varepsilon/2}(x_0)).$$

Für das linke Integral können wir Proposition 11.3 verwenden. Für  $f \in C^1(\overline{B_{2\varepsilon}(x_0)})$  folgt

$$x \mapsto \int_{B_{2\varepsilon}(x_0)} F_n(x-y) \chi(y) f(y) dy \in C^2(\mathbb{R}^n).$$

Übrigens gilt für  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit kompaktem Träger, dass  $u$  in (11.3) wohldefiniert ist und sogar dass

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy \in C(\mathbb{R}^n). \quad (11.5)$$

Es gilt nämlich, dass wenn der Träger von  $f$  in  $B_R(0)$  liegt, dass

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} F_n(z-y) f(y) dy \right| &= \left| \int_{B_R(0)} F_n(z-y) f(y) dy \right| \leq \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B_R(0)} F_n(z-y) dy \leq C_R \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Für  $f \geq 0$  kann man den Satz zur majorisierten Konvergenz verwenden um zu zeigen, dass

$$\lim_{z \rightarrow x} \int_{\mathbb{R}^n} F_n(z-y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy.$$

Wenn  $f$  kein festes Vorzeichen hat, betrachtet man getrennt  $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$  und  $f_- = \frac{1}{2}(|f| - f)$ . Das liefert die Stetigkeit der Abbildung (11.5). Wir fassen zusammen:

**Lemma 11.4** Sei  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  und nehme an,  $f$  hat einen kompakten Träger. Dann ist

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy.$$

wohldefiniert und es gilt  $u \in C(\mathbb{R}^n)$ .

Wenn außerdem  $f|_{\overline{B_{2\varepsilon}(x_0)}} \in C^1(\overline{B_{2\varepsilon}(x_0)})$ , dann gilt

$$u|_{\overline{B_{\varepsilon/2}(x_0)}} \in C^2(\overline{B_{\varepsilon/2}(x_0)}) \quad (11.6)$$

und  $-\Delta u(x) = f(x)$  für  $x \in \overline{B_{\varepsilon/2}(x_0)}$ .

**Bemerkung 11.4.1** Statt anzunehmen, dass  $f$  einen kompakten Träger hat, reicht es, wenn  $f$  genügend schnell fallend ist:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (1 + |x|^2)^k f(x) = 0$$

für  $k \in \mathbb{R}^+$  genügend groß.

## 11.2 Randwertprobleme

Das eigentliche Problem, an dem man interessiert ist, ist

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (11.7)$$

Wir werden grob einige Möglichkeiten beschreiben, wie man dieses Problem angehen kann. Vorher geben wir zwei Möglichkeiten an, wie man dieses Problem vereinfachen kann.

Es sei bemerkt, dass wenn man

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = \varphi & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (11.8)$$

für allgemeine  $f$  und  $\varphi$  lösen kann, man auch (11.7) lösen kann. Denn seien  $v$  und  $w$  Lösungen von (11.8), dann ist  $u = v + w$  eine Lösung von (11.7). Manchmal braucht man aber nur eine der beiden Randwertprobleme aus (11.8) lösen zu können:

- Wenn man das rechte Randwertproblem in (11.8) lösen kann, dann kann man auch (11.7) lösen: Setze

$$u_1(x) = \int_{\Omega} F_n(x-y) f(y) dy \quad (11.9)$$

und sei  $w$  eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = \varphi - u_1 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

so findet man, dass  $u = u_1 + w$  eine Lösung ist von (11.7).

- Wenn man das linke Randwertproblem in (11.8) lösen kann und die Funktion  $\varphi$  lässt sich schreiben mittels  $\varphi = \Phi|_{\partial\Omega}$  für eine Funktion  $\Phi \in C^2(\bar{\Omega})$ , dann kann man auch (11.7) lösen. Denn sei  $v$  eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta v = f + \Delta\Phi & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

so ist  $u = v + \Phi$  eine Lösung von (11.7).

In diesen Ansätze sind ein paar Probleme an dem Rand des Gebietes versteckt. Die Formel in (11.9) folgt aus Proposition 11.3, wenn man die Funktion  $\tilde{f}$  einsetzt, die wie folgt definiert ist:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann bekommt man nämlich

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) \tilde{f}(y) dy = \int_{\Omega} F_n(x-y) f(y) dy.$$

Wenn  $f \in C^1(\bar{\Omega})$  gilt, folgt jedoch nicht, dass  $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R}^n)$ . Um a-priori eine klassische Lösung zu bekommen, müsste man  $f \in C^1(\bar{\Omega})$  erweitern zu einer Funktion  $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R}^n)$ . Für eine solche Erweiterung braucht man jedoch, dass der Rand  $\partial\Omega$  genügend glatt ist. Verwendet man statt Proposition 11.3 nun Lemma 11.4, dann folgt für die Funktion  $u_1$  aus (11.9) nur  $C^2(\Omega)$ .

### 11.2.1 Die Methode von Perron

Für harmonische Funktionen  $u$  auf  $\Omega$ , also  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$ , sagt Proposition 3.4, dass

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) d\sigma_x \text{ für jede Sphäre } \partial B_r(x_0) \text{ mit } \overline{B_r(x_0)} \subset \Omega.$$

Diese Aussage ist gleichwertig zu

$$u(x_0) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \text{ für jede Kugel } B_r(x_0) \text{ mit } \overline{B_r(x_0)} \subset \Omega.$$

Den (Hyper)Flächeninhalt der  $(n-1)$ -dimensionalen Einheitssphäre in  $\mathbb{R}^n$  nennen wir  $\omega_n$ ; das Volumen der Einheitskugel in  $\mathbb{R}^n$  ist dann  $\frac{1}{n}\omega_n$ .

**Definition 11.5** Eine Funktion  $u \in C(\Omega)$  nennt man superharmonisch auf  $\Omega$ , wenn

$$u(x_0) \geq \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(x) \, dx \text{ f\u00fcr jede Kugel } B_r(x_0) \subset \Omega.$$

Eine Funktion  $u \in C(\Omega)$  nennt man subharmonisch auf  $\Omega$ , wenn

$$u(x_0) \leq \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(x) \, dx \text{ f\u00fcr jede Kugel } B_r(x_0) \subset \Omega.$$

F\u00fcr

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (11.10)$$

kann man wie folgt verfahren.

**Ansatz 11.1 (Mit Hilfe des Maximum Prinzips)** Perron<sup>4</sup> definiert

$$S_\varphi(\bar{\Omega}) = \{u \in C(\bar{\Omega}); u \text{ superharmonisch in } \Omega \text{ und } u \geq \varphi \text{ auf } \partial\Omega\}$$

und setzt

$$\bar{u}(x) = \inf \{u(x); u \in S_\varphi(\bar{\Omega})\}.$$

**Bemerkung 11.5.1** Selbstverst\u00e4ndlich kann man auch

$$\underline{u}(x) = \sup \{u(x); u \in s_\varphi(\bar{\Omega})\}$$

mit

$$s_\varphi(\bar{\Omega}) = \{u \in C(\bar{\Omega}); u \text{ subharmonisch in } \Omega \text{ und } u \leq \varphi \text{ auf } \partial\Omega\}$$

betrachten. Mit Hilfe des Maximumprinzips findet man, dass  $\bar{u} \geq \underline{u}$ . Aber sogar wenn  $\bar{u} = \underline{u}$  gilt, folgt nicht unbedingt, dass die Randbedingung erf\u00fcllt ist.

Man kann zeigen, dass  $\bar{u}$  harmonisch ist auf  $\Omega$  und dass  $u \geq \varphi$  auf  $\partial\Omega$ . Wenn man zus\u00e4tzlich annimmt, dass  $\Omega$  einen „netten“ Rand hat und  $\varphi$  stetig ist, kann man sogar zeigen, dass  $\bar{u} \in C(\bar{\Omega})$  und  $\bar{u} = \varphi$  auf  $\partial\Omega$ . Was genau nett ist, soll noch erkl\u00e4rt werden. Das Maximum Prinzip sagt aus, dass eine subharmonische Funktion ein Maximum nur am Rand des Gebietes annehmen kann. F\u00fcr eine superharmonische Funktion folgt, dass sie ein Minimum nur am Rande annehmen kann und so auch dass  $\bar{u} \geq \min\{\varphi(x); x \in \partial\Omega\}$ . Genaueres folgt sp\u00e4ter.

## 11.2.2 Mit Hilfe des Darstellungssatzes von Riesz

Das Argument von Riesz ist funktionalanalytischer Natur und braucht passende Funktionenr\u00e4ume. F\u00fcr das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (11.11)$$

braucht man Sobolev-R\u00e4ume die auch noch den Randwert einschlie\u00dfen. Dazu schr\u00e4nkt man die \u00fcblichen Sobolev-R\u00e4ume aus Definition 2.9 wie folgt ein:

<sup>4</sup>Oskar Perron, 1880 Frankenthal in der Pfalz – 1975 M\u00fcnchen

**Definition 11.6** Für  $k \in \mathbb{N}$  und  $p \in (1, \infty)$  definiert man

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}. \quad (11.12)$$

Mit  $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}$  ist gemeint, dass  $W_0^{k,p}(\Omega)$  der Abschluss ist von  $C_0^\infty(\Omega)$  bezüglich der  $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ -Norm.

**Bemerkung 11.6.1**  $W_0^{k,p}(\Omega)$  nennt man auch Sobolev-Raum und ist Teilraum vom Sobolev-Raum  $W^{k,p}(\Omega)$  und  $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$  ist ein Norm für  $W_0^{k,p}(\Omega)$ . Als Erinnerung:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|m| \leq k} \int_{\Omega} |D^m u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

$W_0^{k,p}(\Omega)$  ist vollständig bezüglich dieser Norm.

**Theorem 11.7 (Ungleichung von Poincaré-Friedrichs)** Nehme an

$$\sup \{x_1; x \in \Omega\} - \inf \{x_1; x \in \Omega\} \leq d_\Omega.$$

Dann gilt für alle  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq d_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (11.13)$$

**Beweis.** Weil  $C_0^\infty(\Omega)$  dicht in  $W_0^{1,2}(\Omega)$  gilt, reicht es, wenn wir die Ungleichung für  $u \in C_0^\infty(\Omega)$  beweisen. In einer Dimension können wir annehmen, dass  $\Omega = (0, d)$ . Für  $u \in C_0^\infty((0, d))$  gilt

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(x) dx = \int_0^x u'(x) dx$$

und mit Cauchy-Schwarz, dass

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left| \int_0^x u'(x) dx \right| \leq \int_0^x |u'(x)| dx \leq \sqrt{\int_0^x 1 dx} \sqrt{\int_0^x |u'(x)|^2 dx} \\ &= \sqrt{x} \sqrt{\int_0^d |u'(x)|^2 dx} = \sqrt{x} \|u'\|_{L^2(0,d)}. \end{aligned}$$

Integriert man, so folgt

$$\|u\|_{L^2(0,d)}^2 = \int_0^d |u(x)|^2 dx \leq \int_0^d \sqrt{x}^2 dx \|u'\|_{L^2(0,d)}^2 = \frac{1}{2} d^2 \|u'\|_{L^2(0,d)}^2$$

und folgt (11.13). In höheren Dimensionen können wir annehmen, dass

$$\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n; 0 < x_1 < d\}$$

und wir erweitern  $u$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  durch  $u = 0$ . Für diese erweiterte Funktion gilt

$$u \in C_0^\infty((0, d_1) \times \mathbb{R}^{n-1}).$$

Mit Fubini-Tonelli und dem ein-dimensionalen Ergebnis finden wir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx &= \int_{(0,d) \times \mathbb{R}^{n-1}} |u(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{(0,d_1)} |u(x_1, x')|^2 dx_1 dx' \\ &\leq \frac{1}{2} d^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{(0,d_1)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x') \right|^2 dx_1 dx' = \frac{1}{2} d^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \right|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2} d^2 \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Weil  $\frac{1}{2} \leq 1$  folgt (11.13). ■

Wir kommen nun zu einer zweiter Lösungsmöglichkeit, jedenfalls wenn man die schwache Version vom Randwertproblem (11.11) betrachtet. Die schwache Formulierung einer Lösung  $u$  ist wie folgt:

*Es gibt  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  derart, dass*

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - f v) dx = 0 \text{ für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Wir verwenden das folgende:

1. Der Sobolev-Raum  $W_0^{1,2}(\Omega)$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

ist ein Hilbert-Raum<sup>5</sup>.

2. Für  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und  $f \in L^2(\Omega)$  ist  $F(v) : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$F(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

ein stetiges lineares Funktional ist. Hierzu verwendet man, dass gilt

$$\begin{aligned} |F(v)| &= \left| \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x)| |v(x)| dx \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq d \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}. \end{aligned}$$

**Theorem 11.8 (Der Darstellungssatz von Riesz)** <sup>6</sup>Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum und sei  $F : H \rightarrow \mathbb{R}$  linear und stetig. Dann gibt es  $u \in H$  derart, dass

$$\langle u, v \rangle = F(v) \text{ für alle } v \in H.$$

Wir werden diesen Satz nicht beweisen.

**Korollar 11.9** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet. Dann existiert für jede Funktion  $f \in L^2(\Omega)$  eine Funktion  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  derart, dass

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \text{ für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

<sup>5</sup>Ein Hilbertraum  $(H, \|\cdot\|_H)$  ist ein vollständiger normierter Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , für das gilt  $\langle u, u \rangle = \|u\|_H^2$  für alle  $u \in H$ .

<sup>6</sup>Frigyes Riesz, 1880 – 1956, war ein Ungarischer Mathematiker.

**Bemerkung 11.9.1** Dies ist genau die Definition einer schwachen Lösung von (11.11).

**Bemerkung 11.9.2** Das Lax-Milgram Theorem verallgemeinert dieses Theorem.

Ein Vorteil dieses Verfahrens ist, dass wir kaum Bedingungen an  $\Omega$  haben, nämlich nur die Beschränktheit. Es ist aber nicht klar und meistens auch nicht richtig, dass diese schwache Lösung  $u$  eine klassische Lösung ist. Die schwache Lösung liegt meistens nur dann in  $C^2(\bar{\Omega})$ , wenn es  $\alpha > 0$  gibt mit  $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  und  $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ .

### 11.2.3 Durch Variationsrechnung

Hilbert<sup>7</sup> betrachtete das Funktional

$$J : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

definiert durch

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - f(x) u(x) \right) dx$$

und konnte folgendes zeigen:

**Ansatz 11.2 (Mit Hilfe der direkten Methoden der Variationsrechnung)** Für  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und  $f \in L^2(\Omega)$  gibt es  $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$  derart, dass

$$J(u_0) = \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} J(u).$$

Weil es  $C_\Omega > 0$  gibt derart, dass

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq C_\Omega \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \text{ für all } u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

findet man mit Hilfe von Cauchy-Schwarz, dass für  $\varepsilon = \frac{1}{2}C_\Omega^{-1}$  gilt

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - f(x) u(x) \right) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \tag{11.14}$$

- Also ist  $J(u)$  für  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  nach unten beschränkt und es folgt, dass das Infimum existiert.

Um zu zeigen, dass dieses Infimum auch angenommen wird, das heißt, ein Minimum ist, nimmt man eine minimierende Folge.  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$  ist eine minimierende Folge, wenn

$$J(u_n) \rightarrow \inf \{ J(u) ; u \in W_0^{1,2}(\Omega) \}.$$

<sup>7</sup>David Hilbert, 1862 Königsberg – 1943 Göttingen, war wahrscheinlich der einflussreichste Mathematiker seiner Zeit.

- Die Koerzitivität. Man bemerkt, dass aus (11.14) folgt:

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \rightarrow \infty \text{ impliziert } J(u) \rightarrow \infty.$$

Also sind minimierende Folgen beschränkt: Es gilt  $\|u_n\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq R$  für irgendeinen  $R \in \mathbb{R}^+$ .

- Aus Funktionalanalysis: Beschränkte Folgen in  $W_0^{1,2}(\Omega)$  haben schwach konvergente Teilfolgen.

Es gibt  $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  und  $u_\infty \in W_0^{1,2}(\Omega)$  mit für  $k \rightarrow \infty$ , dass

$$\int_{\Omega} \nabla u_{n_k} \cdot \nabla v \, dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla u_\infty \cdot \nabla v \, dx \text{ für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Man schreibt:  $u_{n_k} \rightharpoonup u_\infty$  in  $W_0^{1,2}(\Omega)$ .

Leider haben wir im Allgemeinen nicht das  $u_{n_k}$  nach  $u_0$  konvergiert in Norm. Was uns rettet, ist Folgendes:

- $J$  ist schwach unterhalb stetig:

$$v_k \rightharpoonup v \text{ in } W_0^{1,2}(\Omega) \text{ impliziert } \liminf_{k \rightarrow \infty} J(v_k) \geq J(v).$$

Für eine solche Funktion  $u_\infty \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gilt also

$$J(u_\infty) \leq J(u) \text{ für alle } u \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

und dann auch, dass

$$J(u_\infty) \leq J(u_\infty + \varepsilon\psi) \text{ für alle } \psi \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ und } \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Es folgt für die erste Variation

$$\partial J(u_\infty, \psi) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(u_\infty + \varepsilon\psi),$$

dass

$$0 = \partial J(u_\infty, \psi) = \int_{\Omega} (\nabla u_\infty(x) \cdot \nabla \psi(x) - f(x) \psi(x)) \, dx \text{ für alle } \psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

und damit, dass die Funktion  $u_\infty$ , die  $J$  minimalisiert in  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , eine schwache Lösung ist.

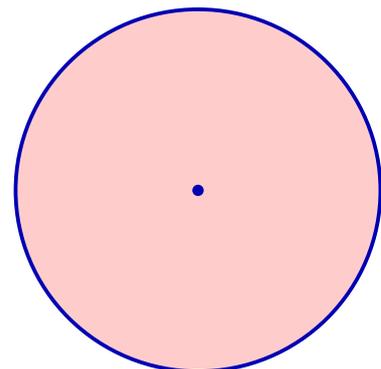
### 11.2.4 Ein Beispiel

Die verschiedenen Lösungstypen geben auch tatsächlich unterschiedliche Ergebnisse. Man betrachte für  $n \geq 2$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; 0 < |x| < 1\}$$

und das Problem

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 1 & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (11.15)$$



**Behauptung 11.10** *Problem (11.15) hat keine Lösung in  $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ .*

Wenn es eine solche Lösung  $u_0$  gibt, ist auch die rotierte Funktion  $u_\varphi = u_0 \circ R_\varphi$  eine Lösung mit  $R_\varphi$  irgendeine Rotation um 0. Sogar  $u_{rad} := \frac{1}{\omega_n} \int_{\varphi \in \partial B_1(0)} u_0(R_\varphi x) d\varphi$  wäre eine Lösung. Weil  $u_{rad}$  radialsymmetrisch ist, findet man für  $U(|x|) = u_{rad}(x)$  die gewöhnliche Differentialgleichung

$$-r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r U(r) = 1.$$

Man hat  $\partial_r r^{n-1} \partial_r U(r) = -r^{n-1}$  und via  $r^{n-1} \partial_r U(r) = c - \frac{1}{n} r^n$  und  $\partial_r U(r) = cr^{1-n} - \frac{1}{n} r$  folgt

$$U(r) = c_1 + c_2 r^{2-n} - \frac{1}{2n} r^2 \quad \text{für } n > 2,$$

$$U(r) = c_1 + c_2 \log r - \frac{1}{4} r^2 \quad \text{für } n = 2.$$

Es gibt aber keine derartige Funktion, die  $U(0) = 0 = U(1)$  erfüllt. Es gibt also keine Lösung  $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ .

**Behauptung 11.11** *Die Funktion  $u(x) = \frac{1}{2n} (1 - |x|^2)$  ist eine schwache Lösung von (11.15) in  $W_0^{1,2}(\Omega)$ .*

Eine schwache Lösung ist hier eine Funktion  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , also im  $\|\cdot\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$ -Sinne durch  $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$  approximierbar, die die folgende Gleichung erfüllt:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} 1 \cdot v \, dx \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Wir werden diese Behauptung nicht bis ins Detail beweisen. Wir zeigen nur, dass der Funktionswert in einem Punkt nicht wahrgenommen wird im Raum  $W_0^{1,2}(\Omega)$  mit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und  $n \geq 2$ .

Dies sieht man am folgenden Beispiel. Wir werden zeigen, dass die Funktionenfolge

$$\varphi_k(x) = \frac{\log(1 + k|x|)}{\log(1 + k)} (1 - |x|^2)$$

in  $W_0^{1,2}(B_1(0))$  gegen  $\varphi_\infty(x) = 1 - |x|^2$  konvergiert, wenn  $n \geq 2$ . Trotzdem gilt

$$\varphi_k(0) = 0 \neq 1 = \varphi_\infty(0).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \|\varphi_k(\cdot) - (1 - |\cdot|^2)\|_{W_0^{1,2}(B_1)}^2 &= \int_{B_1(0)} \left| \nabla \left( \left( \frac{\log(1 + k|x|)}{\log(1 + k)} - 1 \right) (1 - |x|^2) \right) \right|^2 dx = \\ &= \omega_n \int_{r=0}^1 \left| \frac{k(1 - r^2)}{(1 + kr) \log(1 + k)} - \left( \frac{\log(1 + kr)}{\log(1 + k)} - 1 \right) 2r \right|^2 r^{n-1} dr \leq \\ &\leq \omega_n \int_{r=0}^1 2 \left( \left| \frac{k(1 - r^2)}{(1 + kr) \log(1 + k)} \right|^2 + \left| \left( \frac{\log(1 + kr)}{\log(1 + k)} - 1 \right) 2r \right|^2 \right) r^{n-1} dr = \\ &= \dots = \mathcal{O} \left( \frac{\log(1 + k^2)}{(\log(1 + k))^2} \right) = \mathcal{O} \left( \frac{1}{\log(k)} \right) \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Zu den Pünktchen bemerken wir folgendes. Für  $n \geq 2$  und auch nur dann gilt, dass

$$\left( \frac{k(1 - r^2)}{(1 + kr) \log(1 + k)} \right)^2 r^{n-1} \leq \frac{2}{(\log(1 + k))^2} \frac{k^2 r}{1 + k^2 r^2}$$

und

$$\int_0^1 \frac{2k^2 r}{1 + k^2 r^2} dr = \log(1 + k^2).$$

Der Rest des Integrals lässt sich einfacher abschätzen.

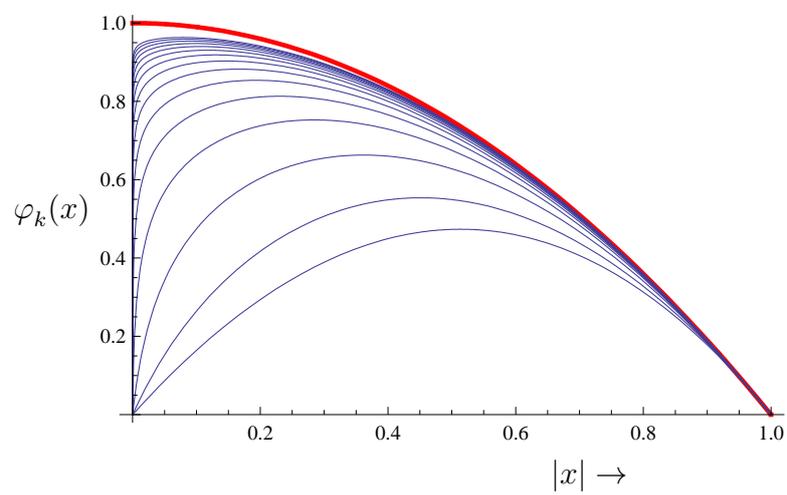


Abbildung 11.1:  $\varphi_k$  konvergiert gegen  $1 - |\cdot|^2$  in  $W_0^{1,2}(B_1(0))$  und nicht in  $C(\overline{B_1(0)})$ .



# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 12



## Ordnung und Existenz bei Laplace

### 12.1 Greensche Funktionen auf Halbraum und Kugel

Bevor wir die oben genannten Lösungsmethoden anschauen, werden ein paar Fälle vorgestellt, bei denen man eine fast explizite Lösung geben kann.

**Beispiel 12.1** Für einige  $f$  ist es möglich eine Formel für eine Lösung auf dem Halbraum zu geben:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1}, \\ u = 0 & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}. \end{cases}$$

Man definiert

$$\tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{für } x \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1}, \\ \dots & \text{für } x \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}, \\ -f(-x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{für } x \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1}, \end{cases}$$

und setzt

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) \tilde{f}(y) dy. \quad (12.1)$$

Wenn  $f \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ , dann gilt  $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Hat  $f$  auch noch einen kompakten Träger oder fällt sie genügend schnell für  $|x| \rightarrow \infty$ , dann folgt mit Proposition 11.3, dass

$$-\Delta u = \tilde{f} = f \text{ auf } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1}.$$

Man findet aus Symmetriegründen, dass

$$u(-x_1, x_2, \dots, x_n) = -u(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Wenn  $f$  die Bedingungen von Lemma 11.4 erfüllt, ist  $u$  stetig und es folgt, dass

$$u(0, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Das heißt,  $u$  in (12.1) liefert eine Lösung.

Man kann die Funktion in (12.1) noch anders schreiben. Wir setzen

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^* = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$$

und finden

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy - \int_{\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y^*) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy - \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n} F_n(x-y^*) f(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n} G(x,y) f(y) dy \end{aligned}$$

mit

$$G(x,y) = F_n(x-y) - F_n(x-y^*) \text{ für } x,y \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n.$$

Man bemerke, dass nur  $x \mapsto F_n(x-y)$  eine Singularität innerhalb  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$  hat, weil  $y \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ .

**Definition 12.2** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Eine Funktion  $G_\Omega : \Omega \times \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$  derart, dass

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x,y) f(y) dy$$

für genügend nette Funktionen  $f$  eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

gibt, nennt man eine Greensche<sup>1</sup> Funktion.

Formell hat eine Greensche Funktion folgende Eigenschaften:

- $-\Delta_x G(x,y) = \delta_y(x)$  für  $x,y \in \Omega$ ;
- $G(x,y) = 0$  für  $x \in \partial\Omega$  und  $y \in \Omega$ .

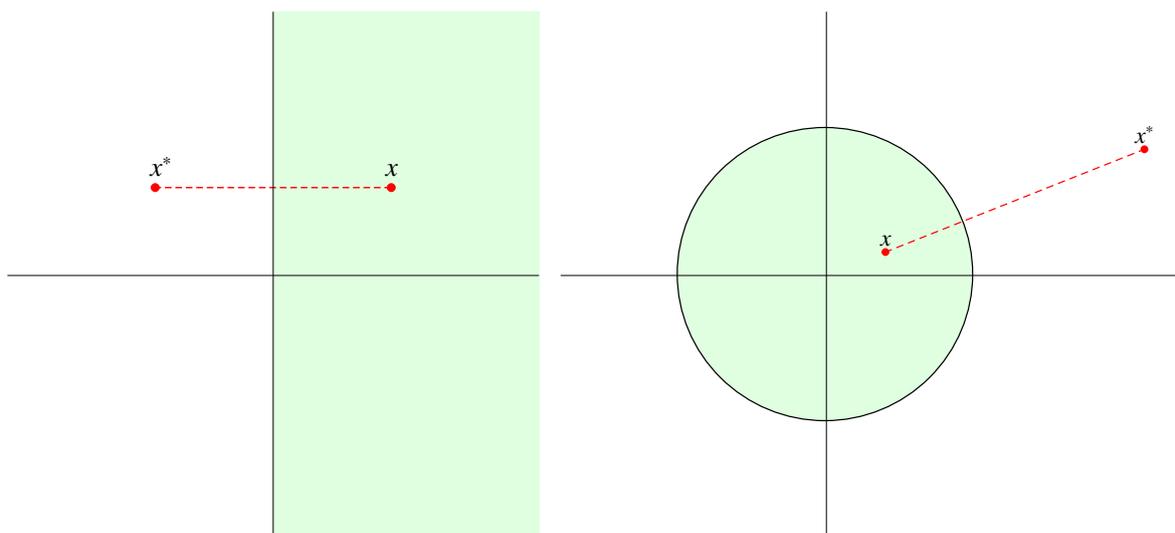


Abbildung 12.1: Halbraum und Kugel haben explizite Greensche Funktionen.

<sup>1</sup>Georg Green, 1793 – 1841, Britischer Mathematiker.

**Beispiel 12.3** Betrachte das Gebiet  $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ . Definiere die Kelvin-Spiegelung von  $B_R(0) \setminus \{0\}$  zu  $\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$  durch

$$x^* = \frac{R^2}{|x|^2}x.$$

Dann ist

$$G_{B_R(0)}(x, y) = F_n(x - y) - F_n\left(\frac{|y|}{R}(x - y^*)\right) \quad (12.2)$$

eine Greensche Funktion für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B_R(0), \\ u = 0 & \text{auf } \partial B_R(0). \end{cases} \quad (12.3)$$

Für  $y \in B_R(0)$  folgt  $|y^*| > R$  und man sieht, dass  $x \mapsto F_n\left(\frac{|y|}{R}(x - y^*)\right)$  keine Singularität für  $x \in B_R(0)$  hat. Man sollte sich fragen was passiert, wenn  $y = 0$ . Weil

$$\left|\frac{|y|}{R}(x - y^*)\right|^2 = \left|\frac{|y|}{R}x - \frac{R}{|y|}y\right|^2 = \frac{|y|^2|x|^2}{R^2} - 2x \cdot y + R^2 \quad (12.4)$$

sieht man, dass  $F_n\left(\frac{|y|}{R}(x - y^*)\right)$  für  $y = 0$  sogar unendlich glatt fortsetzbar ist durch  $F_n(R)$ .

Formell folgt, mit  $y$  als Parameter, dass

$$-\Delta G_{B_R(0)}(\cdot, y) = \delta_y - \frac{|y|^2}{R^2}\delta_{y^*} = \delta_y \quad (12.5)$$

für Funktionen mit Träger innerhalb  $\Omega$ .

Weil (12.4) gilt, kann man  $x$  und  $y$  vertauschen, es folgt

$$G_{B_R(0)}(x, y) = F_n(x - y) - F_n\left(\frac{|x|}{R}(y - x^*)\right),$$

und wegen

$$\lim_{|x| \uparrow R} \frac{|x|}{R}(y - x^*) = y - x,$$

findet man

$$G_{B_R(0)}(x, y) = 0 \text{ für } x \in \partial B_R(0) \text{ und } y \in B_R(0). \quad (12.6)$$

Die Gleichungen (12.5) und (12.6) lassen vermuten, dass  $(x, y) \mapsto G_{B_R(0)}(x, y)$  tatsächlich eine Greensche Funktion ist für (12.3). Man verwende dazu die Ergebnisse aus Abschnitt 11.1.

## 12.2 Greensche Funktionen auf beliebigen Gebieten

In Sektion 12.1 haben wir eine Lösungsformel für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B_R(0), \\ u = 0 & \text{auf } \partial B_R(0). \end{cases}$$

gefunden:

$$u(x) = \int_{B_R(0)} G_{B_R(0)}(x, y) f(y) dy \quad (12.7)$$

mit

$$G_{B_R(0)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \ln \left( 1 + \frac{(R^2 - |x|^2)(R^2 - |y|^2)}{R^2|x-y|^2} \right) & \text{für } n = 2, \\ \frac{1}{\omega_n(n-2)} \left( |x-y|^{2-n} - \left| \frac{|y|}{R}x - \frac{R}{|y|}y \right|^{2-n} \right) & \text{für } n \geq 3. \end{cases} \quad (12.8)$$

Die erste Formel in (12.8) ergibt sich übrigens direkt durch (12.4) und die Eigenschaften vom Logarithmus.

Eine Greensche Funktion existiert für allgemeinere Gebiete. Sucht man eine solche Funktion für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (12.9)$$

dass heißt

$$u(x) = \int_{\Omega} G_{\Omega}(x, y) f(y) dy$$

ist eine Lösung (12.9), dann kann man sagen, dass

$$G_{\Omega}(x, y) = F_n(x - y) - h(x, y)$$

mit  $h(\cdot, y)$  eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta h(\cdot, y) = 0 & \text{in } \Omega, \\ h(\cdot, y) = F_n(\cdot - y) & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (12.10)$$

Im Moment führen diese Überlegungen uns nicht weiter. Für die Existenz einer Greenschen Funktion auf  $\Omega$  müsste man erst mal (12.10) lösen können. Nur im Fall einer Kugel hatten wir eine explizite Funktion. Für diesen Fall kann die folgenden Eigenschaften zeigen. Auch für andere beschränkte Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\partial\Omega \in C^1$ , gibt es eine Greensche Funktion mit diesen Eigenschaften. Das werden wir hier nicht zeigen.

**Behauptung 12.4** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^1$ . Eine Greensche Funktion für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (12.11)$$

hat die folgenden Eigenschaften:

1.  $G_{\Omega} - F_n \in C^{\infty}(\Omega \times \Omega)$ , also folgt  $G_{\Omega} \in C^{\infty}(\Omega \times \Omega \setminus D_{\Omega})$ ;
2.  $G_{\Omega} \in C(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \setminus D_{\bar{\Omega}})$ ;
3.  $\Delta_x G_{\Omega}(x, y) = 0$  für  $(x, y) \in \Omega \times \Omega \setminus D_{\Omega}$ ;
4.  $G_{\Omega}(x, y) = 0$  für  $x \in \partial\Omega$  und  $y \in \Omega$ .
5.  $G_{\Omega}(x, y) = G_{\Omega}(y, x)$  für  $(x, y) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \setminus D_{\bar{\Omega}}$ .

Hier ist  $D_A = \{(x, x); x \in A\}$  die Diagonale von  $A \times A$ .

**Bemerkung 12.4.1** Die Eigenschaften 1, 3 und 4 legen die Funktion fest.

**Bemerkung 12.4.2** Für beschränkte Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  gibt es höchstens eine Greensche Funktion für (?). Wenn es zwei solcher Funktionen geben würde, sagen wir  $G_1$  und  $G_2$ , dann gibt es ein  $f$  derart, dass  $u_1 = \int_{\Omega} G_1(\cdot, y) f(y) dy$  und  $u_2 = \int_{\Omega} G_2(\cdot, y) f(y) dy$  unterschiedlich sind. Die Differenz dieser beiden Funktionen ist harmonisch auf  $\Omega$  und für beschränkte Gebiete wird das Maximum und das Minimum von harmonischen Funktionen auf dem Rand angenommen. Also folgt  $u_1 - u_2 = 0$  in  $\Omega$  und der Widerspruch.

Nehmen wir an,  $\Omega$  hat eine solche Greensche Funktion  $G_{\Omega}$  und dass außerdem gilt

$$y \mapsto G(x, y) \in C^1(\bar{\Omega} \setminus \{x\}) \text{ für alle } x \in \Omega. \quad (12.12)$$

Verwenden wir die Greensche Formel

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial \Omega} (u \partial_{\nu} v - v \partial_{\nu} u) d\sigma \quad (12.13)$$

für  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  mit  $-\Delta u = f$  und  $v = G_{\Omega}(x, \cdot)$  auf  $\Omega \setminus B_{\varepsilon}(x)$  statt  $\Omega$ , so finden wir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}(x)} (u(y) \Delta_y G_{\Omega}(x, y) - G_{\Omega}(x, y) \Delta u(y)) dy = \\ = \int_{\partial(\Omega \setminus B_{\varepsilon}(x))} (u(y) \partial_{\nu_y} G_{\Omega}(x, y) - G_{\Omega}(x, y) \partial_{\nu} u(y)) d\sigma_y. \end{aligned} \quad (12.14)$$

Aus Eigenschaften 3 und 4 folgt

$$\int_{\Omega \setminus B_{\varepsilon}(x)} u(y) \Delta_y G_{\Omega}(x, y) dy = 0 \text{ und } \int_{\partial \Omega} G_{\Omega}(x, y) \partial_{\nu} u(y) d\sigma_y = 0.$$

Aus Eigenschaft 1 folgt

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_{\varepsilon}(x)} u(y) \partial_{\nu_{\text{in}}} G_{\Omega}(x, y) d\sigma_y &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_{\varepsilon}(x)} u(y) \partial_{\nu_{\text{in}}} F_n(x - y) d\sigma_y = u(x), \\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_{\varepsilon}(x)} G_{\Omega}(x, y) \partial_{\nu} u(y) d\sigma_y &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_{\varepsilon}(x)} F_n(x - y) \partial_{\nu} u(y) d\sigma_y = 0. \end{aligned}$$

Kombinieren wir diese Gleichungen mit (12.14) so folgt mit  $\varepsilon \downarrow 0$ , dass

$$\int_{\Omega} G_{\Omega}(x, y) f(y) dy = u(x) + \int_{\partial \Omega} u(y) \partial_{\nu_y} G_{\Omega}(x, y) d\sigma_y. \quad (12.15)$$

Dies bedeutet, wir haben eine Darstellungsformel für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial \Omega, \end{cases} \quad (12.16)$$

bekommen.

**Proposition 12.5** Sei  $G_{\Omega}$  eine Greensche Funktion für  $\Omega$  mit Eigenschaften wie in Behauptung 12.4 und sei (12.12) erfüllt. Dann ist der Poisson-Kern

$$K_{\Omega}(x, y) = -\partial_{\nu_y} G_{\Omega}(x, y) \quad (12.17)$$

wohldefiniert für  $y \in \partial \Omega$  und  $x \in \bar{\Omega} \setminus \{y\}$ . Wenn (12.16) eine Lösung hat, wird sie dargestellt durch

$$u(x) = \int_{\Omega} G_{\Omega}(x, y) f(y) dy + \int_{\partial \Omega} K_{\Omega}(x, y) \varphi(y) d\sigma_y. \quad (12.18)$$

**Bemerkung 12.5.1** Für viele Gebiete  $\Omega$  ist (12.18) sogar eine Lösungsformel für (12.16). Die Formel in (12.18) folgt aus (12.15).

## 12.3 Tricks für Greensche Funktionen auf speziellen Gebieten

Durch (Kelvin-)Spiegelungen kann man auf einigen Gebieten explizite Greensche Funktionen konstruieren. Wir geben ein paar Beispiele.

**Beispiel 12.6** Die Halbkugel  $D = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 > 0 \text{ und } |x| < 1\}$  hat als Greensche Funktion

$$G_D(x, y) = F_n(x - y) - F_n(|y|(x - y^*)) - F_n(x - \bar{y}) + F_n(|y|(x - \bar{y}^*))$$

mit  $y^* = |y|^{-2}y$  und  $\bar{y} = (-y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

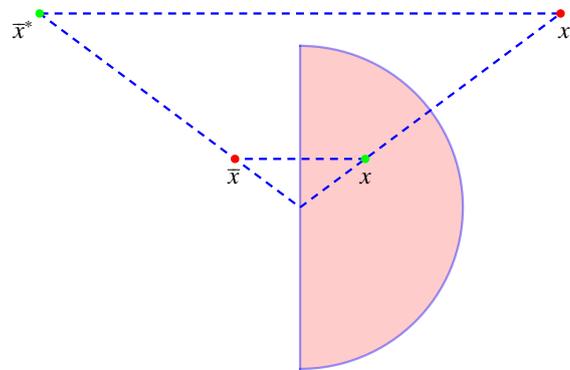


Abbildung 12.2: Konstruktion der Greenschen Funktion auf der Halbkugel.

**Beispiel 12.7** Der Schlitz  $S = \{x \in \mathbb{R}^n; 0 < x_1 < \ell\}$  hat als Greensche Funktion

$$G_D(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (F_n(x - y + 2k\ell \mathbf{e}_1) - F_n(x - \bar{y} + 2k\ell \mathbf{e}_1))$$

mit  $\bar{y} = (-y_1, y_2, \dots, y_n)$  und  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ .

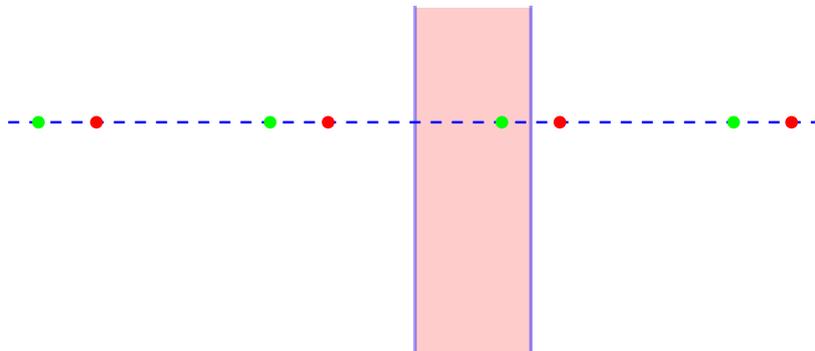


Abbildung 12.3: Konstruktion der Greenschen Funktion auf einem Schlitz.

**Beispiel 12.8** Das Tortenstück  $T = \{(r \cos \phi, r \sin \phi) \in \mathbb{R}^2; r > 0 \text{ und } 0 < \phi < \frac{1}{6}\pi\}$  hat als Greensche Funktion

$$G_D(x, y) = \sum_{k=0}^5 \left( F_2(x - R_{\pi/3}^k y) - F_2(x - R_{\pi/3}^k \bar{y}) + F_2(|y|(x - R_{\pi/3}^k \bar{y}^*)) - F_2(|y|(x - R_{\pi/3}^k y^*)) \right),$$

wobei  $R_{\pi/3} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & \sin(\pi/3) \\ -\sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix}$ .

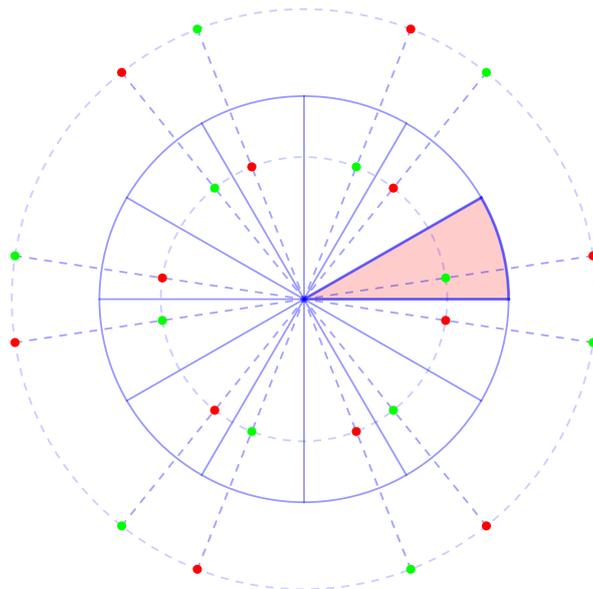


Abbildung 12.4: Konstruktion der Greenschen Funktion auf einem Tortenstück.

Für einfach zusammenhängende Gebiete in  $\mathbb{R}^2$  kann man den Riemannsches Abbildungssatz verwenden. Dieser Satz besagt, dass es für so ein Gebiet  $\Omega$  eine bikonforme Abbildung  $h : \Omega \rightarrow B_1(0)$  gibt, das heißt,  $h$  ist konform auf  $\Omega$  und hat eine konforme inverse auf  $B_1(0)$ . Wenn der Konform oder winkeltreu bedeutet für  $(x, y) \in \Omega$ , dass

$$\frac{\partial}{\partial x} h_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} h_2(x, y) \text{ und } \frac{\partial}{\partial x} h_2(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y} h_1(x, y). \quad (12.19)$$

Hat man Funktionentheorie gehört, erkennt man hier die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen. Wenn der Rand von  $\Omega$  ein Jordan-Kurve ist, dann kann man  $h$  erweitern zu einer bijektiven stetigen Funktion  $h : \bar{\Omega} \rightarrow \overline{B_1(0)}$ .

**Lemma 12.9** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  mit  $\partial\Omega$  eine Jordan-Kurve und  $h : \bar{\Omega} \rightarrow \overline{B_1(0)}$  eine bijektive stetige Abbildung die bikonform von  $\Omega$  auf  $B_1(0)$  ist. Dann gilt

$$G_\Omega(x, y) = G_{B_1(0)}(h(x), h(y)) \text{ für } x, y \in \Omega.$$

**Bemerkung 12.9.1** Eine Jordan-Kurve ist eine injektive Kurve  $\gamma : \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Bemerkung 12.9.2** Der Riemannsches Abbildungssatz besagt zwar, dass es immer so eine bikonforme Abbildung gibt, aber nicht gerade, ob und wie man diese Abbildung berechnen kann. Schwarz und Christoffel waren zwei Mathematiker, die sich beschäftigt haben mit expliziten Konstruktionen solcher Abbildungen, die heute dann auch bekannt sind als Schwarz-Christoffel Abbildungen.

**Beweis.** Man findet mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen in (12.19), dass für  $(x, y) \in \Omega$  und  $u \in C^2(B_1(0))$  und  $h \in C^2(\Omega; B_1(0))$  folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta(u \circ h) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (u \circ h) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (u \circ h) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} u_1 \circ h + \frac{\partial h_2}{\partial x} u_2 \circ h \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial h_1}{\partial y} u_1 \circ h + \frac{\partial h_2}{\partial y} u_2 \circ h \right) \\
&= \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} \right)^2 u_{11} \circ h + 2 \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial x} u_{12} \circ h + \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} \right)^2 u_{22} \circ h + \frac{\partial^2 h_1}{\partial x \partial x} u_1 \circ h + \frac{\partial^2 h_2}{\partial x \partial x} u_2 \circ h \\
&+ \left( \frac{\partial h_1}{\partial y} \right)^2 u_{11} \circ h + 2 \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial y} u_{12} \circ h + \left( \frac{\partial h_2}{\partial y} \right)^2 u_{22} \circ h + \frac{\partial^2 h_1}{\partial y \partial y} u_1 \circ h + \frac{\partial^2 h_2}{\partial y \partial y} u_2 \circ h \\
&= \left( \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial h_1}{\partial y} \right)^2 \right) u_{11} \circ h + \left( \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial h_2}{\partial y} \right)^2 \right) u_{22} \circ h \\
&+ 2 \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial y} \right) u_{12} \circ h + (\Delta h_1) u_1 \circ h + (\Delta h_2) u_2 \circ h. \tag{12.20}
\end{aligned}$$

Aus den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen folgt

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial h_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial h_1}{\partial y} \right)^2 &= \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial y} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial x}, \\
\left( \frac{\partial h_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial h_2}{\partial y} \right)^2 &= \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial y} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial x}, \\
\frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial y} &= 0,
\end{aligned}$$

und  $\Delta h_1 = 0 = \Delta h_2$ . Kombinieren wir dies mit (12.20) so folgt

$$\Delta(u \circ h) = \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial y} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) ((\Delta u) \circ h) = J_h (\Delta u) \circ h. \tag{12.21}$$

Hier ist  $J_h$  genau die Jacobi-Matrix zu der Abbildung  $h$ , die man bei der Integraltransformation durch  $h$  finden würde.

Im oberen Abschnitt waren  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  Koordinaten innerhalb von  $\Omega$ . Nächstens werden wir wieder mit  $x = (x_1, x_2)$  und  $y = (y_1, y_2)$  Koordinatenpaare in  $\Omega$  beschreiben.

Setzt man

$$v(x) = \int_{y \in \Omega} G_{B_1(0)}(h(x), h(y)) f(y) dy \text{ für } x \in \Omega,$$

so folgt mit  $\tilde{x} = h(x)$  und der Substitution  $\tilde{y} = h(y)$ , unter Verwendung von (12.21), dass

$$\begin{aligned}
-\Delta v(x) &= -\Delta_x \left( \int_{y \in \Omega} G_{B_1(0)}(h(x), h(y)) f(y) dy \right) \\
&= -J_h(x) \Delta_{\tilde{x}} \left( \int_{y \in \Omega} G_{B_1(0)}(\tilde{x}, h(y)) f(y) dy \right) \\
&= J_h(x) (-\Delta_{\tilde{x}}) \left( \int_{\tilde{y} \in B_1(0)} G_{B_1(0)}(\tilde{x}, \tilde{y}) f(h^{inv}(\tilde{y})) J_{h^{inv}}(\tilde{y}) d\tilde{y} \right) \\
&= J_h(x) f(h^{inv}(\tilde{x})) J_{h^{inv}}(\tilde{x}) = f(x).
\end{aligned}$$

Im der vorletzten Zeile haben wir

$$-\Delta_{\tilde{x}} \int_{\tilde{y} \in B_1(0)} G_{B_1(0)}(\tilde{x}, \tilde{y}) g(\tilde{y}) d\tilde{y} = g(\tilde{x})$$

benutzt, und für die letzte Zeile erinnert man sich, dass  $J_h(x) = (J_{h^{inv}}(h(x)))^{-1}$ .

Weil  $x \in \partial\Omega$  durch  $h$  auf  $\partial B_1(0)$  abgebildet wird, ist auch die Randbedingung erfüllt:

$$G_{B_1(0)}(h(x), h(y)) = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega \text{ und } y \in \Omega.$$

Anders gesagt, es gilt  $G_{B_1(0)}(h(x), h(y)) = G_\Omega(x, y)$ . ■

Es folgt, dass wenn man eine bikonforme Abbildung  $h : \Omega \rightarrow B_1(0)$  kennt, man die Randwertprobleme

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} -\Delta u = \tilde{f} & \text{in } B_1(0), \\ u = 0 & \text{auf } \partial B_1(0), \end{cases} \quad (12.22)$$

in einander überführen kann durch

$$u = v \circ h^{inv} \text{ und } \tilde{f} = J_{h^{inv}}(\cdot) (f \circ h^{inv})(\cdot),$$

beziehungsweise

$$v = u \circ h \text{ und } f = J_h(\cdot) (\tilde{f} \circ h)(\cdot).$$

**Bemerkung 12.9.3** In höheren Dimensionen gibt es nur sehr wenige konforme Abbildungen, nämlich nur die Abbildungen sind konform, die sich zusammensetzen lassen aus Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen (orthogonale Abbildungen), Skalierungen und Inversionen. Inversionen sind genau die Kelvin-Spiegelungen. Außerdem gilt in höheren Dimensionen (12.21) so nicht.

## 12.4 Folgen der Greenschen Funktion auf der Kugel

**Lemma 12.10** Sei  $u$  harmonisch auf  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , dann gilt für jede Kugel  $B_R(x_0)$  mit  $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ , dass

$$u(x) = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{R\omega_n} \int_{\partial B_R(x_0)} \frac{u(y)}{|x - y|^n} d\sigma_y \quad (12.23)$$

**Bemerkung 12.10.1** Für  $x = x_0$  finden wir den Mittelwertsatz für harmonische Funktionen, Proposition 3.4:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(y) d\sigma_y. \quad (12.24)$$

**Bemerkung 12.10.2** Man sieht, dass  $G_{B_R(0)}(x, y) > 0$  für  $(x, y) \in B_R(0) \times B_R(0)$  und auch, dass

$$K_{B_R(0)}(x, y) > 0 \text{ für } (x, y) \in B_R(0) \times \partial B_R(0).$$

**Beweis.** Weil

$$\nabla_y G_{B_R(0)}(x, y) = \frac{-1}{\omega_n} \left( \frac{y - x}{|x - y|^n} - \frac{\left(\frac{|x|}{R}\right)^2 y - x}{\left|\frac{|x|}{R}y - \frac{R}{|x|x}\right|^n} \right)$$

folgt für  $|y| = R$  und  $\nu = R^{-1}y$ , dass

$$-\partial_{\nu_y} G_{B_R(0)}(x, y) = \frac{1}{\omega_n} \frac{\left(1 - \left(\frac{|x|}{R}\right)^2\right) y}{|x - y|^n} \cdot \frac{y}{R} = \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n |x - y|^n}.$$

Die Greensche Funktion für  $B_R(x_0)$  folgt aus (12.8), wenn man sie um  $x_0$  verschiebt, das heißt

$$K_{B_R(x_0)} = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{R\omega_n |x - y|^n},$$

und mit Proposition 12.5 folgt das Lemma. ■

### 12.4.1 Das starke Maximum-Prinzip

**Theorem 12.11 (Das starke Maximum-Prinzip für harmonische Funktionen)** Sei  $u$  harmonisch auf einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Wenn  $u$  ein Maximum oder Minimum innerhalb hat, dann ist  $u$  konstant.

**Beweis.** Nehmen wir an,  $u$  hat ein Maximum in  $x_0 \in \Omega$ . Aus dem Mittelwertsatz, Lemma 12.10 mit  $x = x_0$  folgt, dass  $u = u(x_0)$  gilt auf jeder Kugel innerhalb  $\Omega$  mit  $x_0$  als Zentrum. Weil  $\Omega$  zusammenhängend ist, kann man für jedes  $x^*$  einen Weg innerhalb  $\Omega$  finden, der  $x_0$  mit  $x^*$  verbindet, und das Ergebnis folgt, wenn man diesen Weg mit passenden Kugeln überdeckt. ■

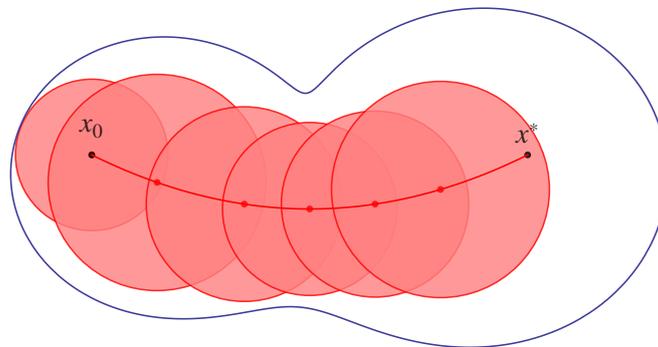


Abbildung 12.5: Man argumentiert von Kugel zu Kugel.

**Korollar 12.12** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und sei  $u \in C(\bar{\Omega})$  harmonisch innerhalb  $\Omega$ . Dann nimmt  $u$  sein Maximum und sein Minimum an auf  $\partial\Omega$ .

**Beweis.** Eine stetige Funktion auf der kompakten Menge  $\bar{\Omega}$  hat ein Maximum (und ein Minimum) und wegen des letzten Theorems kann es nicht im Innern liegen. ■

**Korollar 12.13** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet. Dann hat

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (12.25)$$

höchstens eine Lösung  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .

**Beweis.** Wenn es zwei Lösungen hätte, verwende man das letzte Korollar für die Differenz.

■

**Theorem 12.14 (Die Ungleichung von Harnack<sup>2</sup> auf einer Kugel)** Sei  $u$  harmonisch und positiv auf  $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ . Dann gilt:

$$\frac{(R - |x|) R^{n-2}}{(R + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{(R + |x|) R^{n-2}}{(R - |x|)^{n-1}} u(0).$$

**Beweis.** Man verwendet für den Integralkern in (12.23) mit  $x_0 = 0$ , dass für  $|y| = R$  folgendes gilt:

$$\frac{R - |x|}{(R + |x|)^{n-1}} = \frac{R^2 - |x|^2}{(R + |x|)^n} \leq \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n} \leq \frac{R^2 - |x|^2}{(R - |x|)^n} = \frac{R + |x|}{(R - |x|)^{n-1}}. \quad (12.26)$$

Kombiniert man (12.23) mit  $x_0 = 0$ , (12.26) und

$$u(0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{|y|=R} u(y) d\sigma_y$$

so folgt das Ergebnis.

■

**Theorem 12.15 (Die Ungleichung von Harnack)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und sei  $u$  positiv und harmonisch innerhalb  $\Omega$ . Dann gibt es für jede zusammenhängende offene Teilmenge  $A$  mit  $\bar{A} \subset \Omega$  eine Konstante  $c_A$  derart, dass

$$\sup_{x \in A} u(x) \leq c_A \inf_{x \in A} u(x).$$

**Beweis.** Weil  $\bar{A}$  kompakt ist und  $u$  stetig ist in  $\Omega$ , gibt es  $x_0, x^* \in \bar{A}$  mit

$$u(x_0) = \inf_{x \in A} u(x) \quad \text{und} \quad u(x^*) = \sup_{x \in A} u(x).$$

Weil  $A$  zusammenhängend ist, gibt es eine Kurve, die  $x_0$  mit  $x^*$  innerhalb von  $A$  verbindet. Man nehme auf diese Kurve Punkte  $x_1, \dots, x_k = x^*$  derart, dass  $|x_i - x_{i+1}| < r$  für  $i = 1, \dots, k$  und derart, dass  $\bigcup_{i=0}^k \overline{B_{2r}(x_i)} \subset \Omega$  für ein  $r > 0$ . Dass so etwas geht, folgt aus der Kompaktheit. Durch Anwendung von Theorem 12.14 auf  $B_{2r}(x_i)$  findet man, dass

$$u(x_{i+1}) \leq \frac{(r + \frac{1}{2}r) r^{n-2}}{(r - \frac{1}{2}r)^{n-1}} u(x_i) = 3 \cdot 2^{n-2} u(x_i).$$

Nach  $k$  Schritte folgt  $u(x^*) \leq (3 \cdot 2^{n-2})^k u(x_0)$  und das gewünschte Ergebnis.

■

<sup>2</sup>Carl Gustav Axel Harnack, Tartu (damals Russland, heute Estland) 1851 – Dresden 1888.

### 12.4.2 Harmonisch auf Kugeln

**Lemma 12.16** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und sei  $u$  harmonisch auf  $\Omega$ . Dann gilt  $u \in C^\infty(\Omega)$  und für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gibt es  $C_{k,n}$  derart, dass

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_{k,n}}{\omega_n r^{n+k}} \int_{B_r(x_0)} |u(y)| dy$$

für jede Kugel  $B_r(x_0) \subset \Omega$  und  $k = |\alpha|$  mit  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .

**Beweis.** Für  $|\alpha| = 0$  folgt diese Aussage aus dem Mittelwertsatz. Durch Lemma 12.10 gilt

$$u(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}r\right)^2 - |x - x_0|^2}{\frac{1}{2}r\omega_n} \int_{\partial B_{r/2}(x_0)} \frac{u(y)}{|x - y|^n} d\sigma_y$$

und wenn man  $x \in B_{r/4}(x_0)$  nimmt, gilt

$$\begin{aligned} |D^\alpha u(x)| &= \sum_{\beta \leq \alpha} \left| D_x^\beta \left( \frac{\left(\frac{1}{2}r\right)^2 - |x - x_0|^2}{\frac{1}{2}r\omega_n} \right) \right| \int_{\partial B_{r/2}(x_0)} \left| D_x^{\alpha - \beta} \left( \frac{1}{|x - y|^n} \right) \right| |u(y)| d\sigma_y \leq \\ &\leq C_{|\alpha|} \sum_{\ell \leq 2} r^{1-\ell} \int_{\partial B_{r/2}(x_0)} \frac{1}{r^{n+|\alpha|-\ell}} |u(y)| d\sigma_y \leq C'_{|\alpha|} r^{-|\alpha|} \|u\|_{L^\infty(\partial B_{r/2}(x_0))}. \end{aligned} \quad (12.27)$$

Aus (3.14) folgt für  $z \in \partial B_{r/2}(x_0)$ , dass  $B_{r/2}(z) \subset B_r(x_0)$  und

$$|u(z)| = \left| \frac{n}{\omega_n (r/2)^n} \int_{B_{r/2}(z)} u(y) dy \right| \leq \frac{n}{\omega_n (r/2)^n} \int_{B_r(x_0)} |u(y)| dy. \quad (12.28)$$

Kombiniert man (12.27) und (12.28) so folgt das Ergebnis.  $\blacksquare$

**Theorem 12.17 (Liouville<sup>3</sup>)** Wenn  $u$  harmonisch und beschränkt ist auf  $\mathbb{R}^n$ , dann ist  $u$  konstant.

**Beweis.** Aus dem letzten Lemma folgt

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{C_1}{R^{n+1}} \int_{B_R(x)} |u(y)| dy$$

und wenn  $u$  beschränkt ist, folgt  $|\nabla u(x)| \leq C_1 \omega_n \|u\|_\infty R^{-1}$  für alle  $R > 0$  und  $x \in \mathbb{R}^n$ . Das bedeutet  $|\nabla u(x)| = 0$  und  $u$  ist konstant.  $\blacksquare$

**Proposition 12.18** Sei  $G_{B_R(0)}$  die Greensche Funktion für  $B_R(0)$  wie in (12.8) und sei  $K_{B_R(0)}(x, y) = -\partial_{\nu_y} G_{B_R(0)}(x, y)$ . Dann ist

$$u(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{für } x \in \partial B_R(0), \\ \int_{\partial B_R(0)} K_{B_R(0)}(x, y) \varphi(y) d\sigma_y & \text{für } x \in B_R(0), \end{cases}$$

die eindeutige Lösung in  $C(\overline{B_R(0)}) \cap C^\infty(B_R(0))$  von

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } B_R(0), \\ u = \varphi & \text{auf } \partial B_R(0), \end{cases} \quad (12.29)$$

für  $\varphi \in C(\partial B_R(0))$ .

<sup>3</sup>Joseph Liouville, Französischer Mathematiker, 1809 – 1882

**Beweis.** Die Eindeutigkeit folgt aus dem Maximumprinzip. Die Tatsache, dass  $\Delta K_{B_R(0)}(x, y) = 0$  für  $x \in B_R(0)$  kontrolliert man direkt; singuläre Stellen von  $x \mapsto K_{B_R(0)}(x, y)$  findet man nur für  $x \in \partial B_R(0)$ . Man soll nur noch beweisen, dass  $u$  stetig ist beim Rand. Dazu bemerkt man erst, dass

$$\int_{\partial B_R(0)} K_{B_R(0)}(x, y) d\sigma_y = 1.$$

Diese Identität folgt aus der Darstellungsformel, weil  $u(x) = 1$  eine Lösung ist von (12.29) mit  $\varphi = 1$ . Sei nun  $x_* \in \partial B_R(0)$  und sei  $\delta > 0$  derart, dass

$$y \in \partial B_R(0) \text{ und } |x_* - y| < \delta \implies |\varphi(x_*) - \varphi(y)| < \varepsilon.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} |u(x) - u(x_*)| &= |u(x) - \varphi(x_*)| = \left| \int_{\partial B_R(0)} K_{B_R(0)}(x, y) (\varphi(y) - \varphi(x_*)) d\sigma \right| \leq \\ &\leq \varepsilon \int_{\substack{\partial B_R(0) \\ |x_* - y| < \delta}} K_{B_R(0)}(x, y) d\sigma_y + 2 \|\varphi\|_{L^\infty(\partial B_R(0))} \int_{\substack{\partial B_R(0) \\ |x_* - y| \geq \delta}} K_{B_R(0)}(x, y) d\sigma_y \leq \\ &\leq \varepsilon \int_{\partial B_R(0)} K_{B_R(0)}(x, y) d\sigma_y + 2 \|\varphi\|_{L^\infty(\partial B_R(0))} \int_{\substack{\partial B_R(0) \\ |x_* - y| \geq \delta}} \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n |x - y|^n} d\sigma_y = (*). \end{aligned}$$

Wenn  $|x - x_*| < \frac{1}{2}\delta$  und  $|x_* - y| \geq \delta$  gilt, folgt

$$|x - y| \geq |x_* - y| - |x - x_*| \geq \delta - \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\delta$$

und

$$\begin{aligned} (*) &\leq \varepsilon + 2 \|\varphi\|_{L^\infty(\partial B_R(0))} \int_{\partial B_R(0)} \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n \left(\frac{1}{2}\delta\right)^n} d\sigma_y \leq \\ &\leq \varepsilon + 2 \|\varphi\|_{L^\infty(\partial B_R(0))} (R^2 - |x|^2) R^{n-2} \left(\frac{2}{\delta}\right)^n. \end{aligned}$$

Weil  $(R^2 - |x|^2) = (R + |x|)(R - |x|) \leq 2R(|x_*| - |x|) \leq 2R|x - x_*|$  gilt, können wir  $x$  genügend nahe an  $x_*$  nehmen um  $2 \|\varphi\|_{L^\infty(\partial B_R(0))} (R^2 - |x|^2) R^{n-2} \left(\frac{2}{\delta}\right)^n$  beliebig klein zu bekommen. Genügend klein wie zum Beispiel  $|u(x) - u(x_*)| < 2\varepsilon$ . Weil  $\varepsilon > 0$  beliebig ist, ist  $u$  stetig in  $x_*$ . ■

**Theorem 12.19** Sei  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und sei  $u \in C(\Omega)$ . Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

- $u$  ist harmonisch.
- $u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(y) d\sigma_y$  für alle  $B_R(x)$  mit  $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$ .

**Beweis.** Die eine Richtung ist der Mittelwertsatz. Für die andere Richtung verwenden wir, dass wir eine Lösungsformel haben für harmonische Funktionen auf Kugeln bei vorgeschriebenen stetigen Randwerten. Das heißt, für jede Kugel  $B_R(x_0)$  mit  $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$  ist

$$w(x) = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{R\omega_n} \int_{\partial B_R(x_0)} \frac{u(y)}{|x - y|^n} d\sigma_y$$

harmonisch innerhalb  $B_R(x_0)$  und stetig auf  $\overline{B_R(x_0)}$ .

Man hat also  $w - u \in C(\overline{B_R(x_0)})$  und sogar

$$w(x) - u(x) = 0 \text{ für } x \in \partial B_R(x_0). \quad (12.30)$$

Dann hat  $w - u$  die folgende Mittelwerteigenschaft auf jeder Sphäre  $\partial B_r(x_*)$  innerhalb  $B_R(x_0)$ :

$$w(x_*) - u(x_*) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_*)} (w(y) - u(y)) d\sigma_y,$$

und das bedeutet, dass  $w - u$  kein Extrem in  $x_*$  haben kann. Anders gesagt, die Funktion  $w - u$  kann sein Maximum und Minimum nur auf dem Rand  $\partial B_R(x_0)$  annehmen. Wegen (12.30) bedeutet es  $w = u$  auf  $\overline{B_R(x_0)}$  und dass  $u$  harmonisch ist. ■

**Korollar 12.20** Sei  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und seien  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C(\Omega)$  harmonisch auf  $\Omega$ . Wenn  $u_k$  lokal gleichmäßig zu  $u$  konvergiert, so ist auch  $u$  harmonisch auf  $\Omega$ .

**Beweis.** Wenn  $u_k \rightarrow u$  konvergiert, dann gilt für jede Kugel in  $\Omega$ , dass

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u_k(y) d\sigma_y = \\ &= \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(y) d\sigma_y = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(y) d\sigma_y. \end{aligned}$$

Wegen Theorem 12.19 ist  $u$  harmonisch. ■

**Korollar 12.21** Sei  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und seien  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C(\Omega)$  harmonisch auf  $\Omega$ . Nehme an, dass die Funktionen lokal gleichmäßig beschränkt sind. Dann existiert eine Teilfolge  $\{u_{k_\ell}\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ , die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion  $u$  konvergiert und die harmonisch ist auf  $\Omega$ .

**Beweis.** Lemma 12.16 zeigt, dass auf jede Kugel  $B_R(x_1)$  mit  $\overline{B_R(x_1)} \subset \Omega$  die Ableitungen  $\nabla u_k$  gleichmäßig beschränkt sind. Wegen der Offenheit von  $\Omega$  gibt es  $r_1 > 0$  mit  $B_{R+2r_1}(x_1) \subset \Omega$  und man wende das Ergebnis an auf  $B_{r_1}(x_0)$  für  $x_0 \in \overline{B_R(x_1)}$ . Dann folgt, dass die  $u_k$  gleichgradig stetig sind auf  $\overline{B_R(x_1)}$ . Der Satz von Arzelá-Ascoli besagt, dass es eine konvergente Teilfolge gibt. Korollar 12.20 liefert die gewünschte Teilfolge. ■

# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 13



## Existenz nach Perron

### 13.1 Das Theorem von Perron

Wie schon angekündigt liefert die Methode von Perron für

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (13.1)$$

eine Lösung  $u \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , angenommen  $\varphi$  ist stetig und  $\Omega$  genügend „nett“. Wir haben auch gesehen, dass  $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\}$  kein nettes Gebiet ist. Es wird Zeit für eine Bedingung, die uns  $\Omega$  genügend nett sein läßt.

**Bedingung 13.1** *Ein Gebiet  $\Omega$  erfüllt die äußere Kugelbedingung, wenn es für jedes  $x^* \in \partial\Omega$  eine Kugel  $B \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$  gibt mit  $x^* \in \partial B$ .*

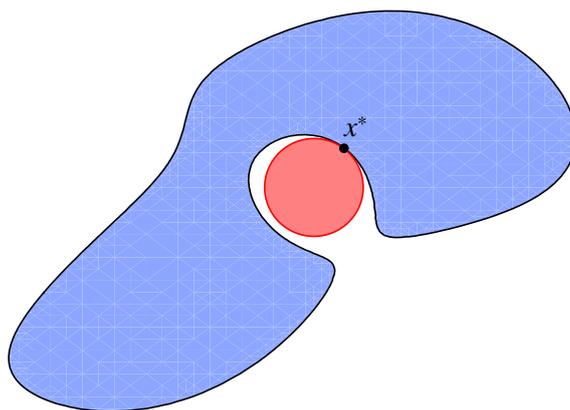


Abbildung 13.1: Die äußere Kugelbedingung.

**Bemerkung 13.1.1** *Diese äußere Kugelbedingung läßt sich leicht als ausreichende Bedingung verwenden. Tatsächlich kann man man diese Bedingung abschwächen. Eine äußere Kegelbedingung (e statt u!) reicht auch. Leider wird der Beweis aufwendiger.*

**Bemerkung 13.1.2** *Isolierte Punkte als Teil des Randes erfüllen klar weder die äußere Kugelbedingung noch eine äußere Kegelbedingung. Derartige Ränder sind jedoch nicht*

die einzigen, die Schwierigkeiten bereiten. Henri Lebesgue hat gezeigt, dass es auch zusammenhängende Ränder gibt, die keine Lösung in  $C(\bar{\Omega})$  zulassen. Sein Gegenbeispiel in drei Dimensionen in der Form einer hineingerichteten Spitze ist als „Lebesgue thorn“ bekannt geworden.

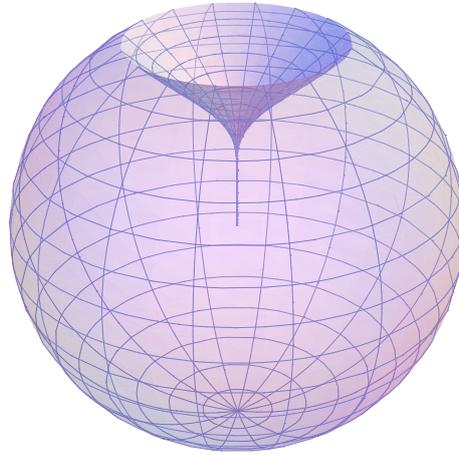


Abbildung 13.2: Bild einer Kugel mit einem „Lebesgue thorn“. Das Horn (oder der Dorn) ist hier wie folgt definiert:  $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < \exp(-1/z) \text{ für } z > 0\}$ . Also gilt  $\Omega = B_1(0) \setminus D$ .

**Theorem 13.2 (Perron)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet, das die äußere Kugelbedingung erfüllt. Dann gibt es für jedes  $\varphi \in C(\partial\Omega)$  eine eindeutige Lösung  $u \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  zu (13.1).

## 13.2 Minimum und Infimum bei superharmonisch

Man definiert

$$S_\varphi(\bar{\Omega}) = \{u \in C(\bar{\Omega}) ; u \text{ superharmonisch in } \Omega \text{ und } u \geq \varphi \text{ auf } \partial\Omega\}$$

und sucht die Lösung durch

$$u(x) := \inf \{v(x) ; v \in S_\varphi(\bar{\Omega})\}.$$

Wir werden das Theorem in mehreren Schritten beweisen.

**Lemma 13.3**  $S_\varphi(\bar{\Omega})$  ist nicht leer und für  $u \in S_\varphi(\bar{\Omega})$  gilt  $u(x) \geq \min \{\varphi(x) ; x \in \partial\Omega\}$ .

**Beweis.** Weil  $\varphi$  stetig ist auf einer beschränkten und abgeschlossenen Menge, existiert  $\min \{\varphi(x) ; x \in \partial\Omega\}$  und  $\max \{\varphi(x) ; x \in \partial\Omega\}$ . Die Konstante  $m = \min \{\varphi(x) ; x \in \partial\Omega\}$  liefert eine konstante Funktion in  $S_\varphi(\bar{\Omega})$ . Weiter gilt es, dass

$$u(x) \geq \min \{u(x) ; x \in \partial\Omega\} \geq \min \{\varphi(x) ; x \in \partial\Omega\},$$

weil eine superharmonische Funktion ihr Minimum am Rand annimmt. ■

**Lemma 13.4** Sei  $u_1, u_2 \in S_\varphi(\bar{\Omega})$  und definiere

$$u(x) = \min(u_1(x), u_2(x)).$$

Dann gilt  $u \in S_\varphi(\bar{\Omega})$ .

**Bemerkung 13.4.1** Durch wiederholte Anwendung folgt auch:  $u_1, \dots, u_k \in S_\varphi(\bar{\Omega})$  impliziert  $x \mapsto \min(u_1(x), \dots, u_k(x)) \in S_\varphi(\bar{\Omega})$ .

**Beweis.** Sei  $x_0 \in \Omega$  und nehme an,  $u(x_0) = u_1(x_0)$ . Dann gilt für  $B_r(x_0) \subset \Omega$ , dass

$$u(x_0) = u_1(x_0) \geq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u_1(y) d\sigma_y \geq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y) d\sigma_y.$$

Die Bedingung  $u \geq \varphi$  ist direkt erfüllt. ■

**Lemma 13.5** Sei  $u \in S_\varphi(\bar{\Omega})$  und sei  $B_R(x_0) \subset \Omega$ . Definiere

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in \bar{\Omega} \setminus B_R(x_0), \\ \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{R\omega_n} \int_{\partial B_R(x_0)} \frac{u(y)}{|x - y|^n} d\sigma_y & \text{für } x \in B_R(x_0). \end{cases} \quad (13.2)$$

Dann gilt  $\tilde{u} \leq u$  und  $\tilde{u} \in S_\varphi(\bar{\Omega})$ .

**Bemerkung 13.5.1** Die Änderung einer superharmonischen Funktion  $u$  zu  $\tilde{u} \leq u$  nennt man „harmonic lowering“ von  $u$ . Besser bekannt ist die ähnliche Änderung einer subharmonischen Funktion  $u$  zu  $\tilde{u} \geq u$ , die als „harmonic lifting“ von  $u$  bezeichnet wird.

**Beweis.** Die Funktion  $u - \tilde{u}$  ist superharmonisch und identisch 0 auf  $\partial B_R(x_0)$ . Wegen Proposition 12.18 ist  $\tilde{u}$  und darum auch  $u - \tilde{u}$  stetig. Es folgt  $u - \tilde{u} \geq 0$  in  $B_R(x_0)$ . Außerhalb gilt  $u - \tilde{u} = 0$ . ■

**Proposition 13.6** Sei  $\Omega$  beschränkt und  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ . Dann ist die Funktion

$$u(x) := \inf \{v(x); v \in S_\varphi(\bar{\Omega})\}. \quad (13.3)$$

harmonisch.

**Beweis.** Sei  $x_0 \in \Omega$  und sei  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset S_\varphi(\bar{\Omega})$  derart, dass  $u_k(x_0) \rightarrow u(x_0)$ . Setzen wir

$$U_k(x) := \min\{u_1(x), \dots, u_k(x)\},$$

so ist  $\{U_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Folge für alle  $x \in \Omega$ . Sei  $B_R(x_0) \subset \Omega$  und definiere  $\tilde{U}_k$ , wie in (13.2). Auf  $B_R(x_0)$  sind die Funktionen  $\tilde{U}_k$  harmonisch. Korollar 12.21 liefert eine Teilfolge, die gegen eine harmonische Funktion  $U$  auf  $B_{R/2}(x_0)$  konvergiert. Aus dieser Konstruktion folgt  $U(x_0) = u(x_0)$  und  $U(x) \geq u(x)$  auf  $B_{R/2}(x_0)$ . Wir wollen zeigen, dass  $U(x) = u(x)$  auf  $B_{R/2}(x_0)$ . Nehmen wir an, dass es  $x_1 \in B_{R/2}(x_0)$  gibt mit  $U(x_1) > u(x_1)$ . Dann gibt es  $v \in S_\varphi(\bar{\Omega})$  mit

$$U(x_1) > v(x_1) \geq u(x_1). \quad (13.4)$$

Ähnlich wie vorhin betrachten wir

$$V_k(x) := \min\{v(x), u_1(x), \dots, u_k(x)\}$$

und finden eine harmonische Funktion  $V$  auf  $B_{R/2}(x_0)$  mit

$$U(x_0) = V(x_0)$$

und  $U(x) \geq V(x)$  auf  $B_{R/2}(x_0)$ . Dann folgt aus der Mittelwerteigenschaft, Proposition 3.4, dass  $U = V$  auf  $\overline{B_{R/2}(x_0)}$  im Widerspruch zu (13.4). Also gilt  $U(x) = u(x)$  auf  $B_{R/2}(x_0)$ , und  $u$  ist harmonisch in  $B_{R/2}(x_0)$ . Weil  $x_0$  beliebig ist, ist  $u$  harmonisch auf  $\Omega$ . ■

### 13.3 Beweis mit Barrieren am Rand

Wir müssen noch zeigen, dass diese Lösung  $u$  stetig auf  $\bar{\Omega}$  ist. Wenn  $u \in C(\bar{\Omega})$ , dann folgt aus dem Maximum Prinzip, dass die Lösung eindeutig ist.

**Definition 13.7** Eine Funktion  $b \in C(\bar{\Omega})$  heißt eine Barrierenfunktion bezüglich  $x^* \in \partial\Omega$ , wenn

1.  $b$  ist superharmonisch in  $\Omega$ ;
2.  $b(x^*) = 0$ ;
3.  $b(x) > 0$  für  $x \in \bar{\Omega} \setminus \{x^*\}$ .

**Lemma 13.8** Wenn  $\Omega$  die äußere Kugelbedingung erfüllt an der Stelle  $x^* \in \partial\Omega$ , dann existiert eine Barrierenfunktion bezüglich  $x^* \in \partial\Omega$ .

**Beweis.** Sei  $B_r(x_1)$  eine solche Kugel. Dann definiere für  $n \geq 3$  die Funktion

$$b(x) = r^{2-n} - |x - x_1|^{2-n}.$$

Die Funktion ist sogar harmonisch. Die beiden anderen Eigenschaften in Definition 13.7 zeigt man direkt.

Für  $n = 2$  setzt man  $b(x) = \log|x - x_1| - \log r$ . ■

In zwei Dimensionen kann man Barrierenfunktionen konstruieren, die lokal nur eine äußere Kegelbedingung voraussetzen mit Hilfe der Funktionen, die in Abbildung 1.3 dargestellt sind.

**Proposition 13.9** Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet, das die äußere Kugelbedingung erfüllt an der Stelle  $x^* \in \partial\Omega$ . Dann gilt für die Funktion  $u$  in (13.3), dass

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x^* \\ x \in \Omega}} u(x) = \varphi(x^*). \quad (13.5)$$

**Beweis.** Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es  $\delta > 0$  derart, dass

$$|x - x^*| < \delta \text{ und } x \in \partial\Omega \implies |\varphi(x) - \varphi(x^*)| < \varepsilon.$$

Man nehme  $k_1 > 0$  derartig, dass

$$|x - x^*| \geq \delta \text{ und } x \in \partial\Omega \implies k_1 b(x) > \varphi(x) - \varphi(x^*).$$

Dann gilt für die Funktion  $\bar{w}$ , definiert durch

$$\bar{w}(x) := \varphi(x^*) + \varepsilon + k_1 b(x)$$

dass  $\bar{w} \in S_\varphi(\bar{\Omega})$ . Es gilt also, dass

$$u(x) \leq \bar{w}(x) \text{ für } x \in \bar{\Omega}. \quad (13.6)$$

Auf ähnliche Art kann man auch eine harmonische Funktion  $n(x)$  finden durch

$$n(x) := -\inf \{v(x); v \in S_{-\varphi}(\bar{\Omega})\}. \quad (13.7)$$

Für  $v_1 \in S_\varphi(\bar{\Omega})$  und  $v_2 \in S_{-\varphi}(\bar{\Omega})$  folgt  $v_1 + v_2 \in S_0(\bar{\Omega})$  und weil  $v_1 + v_2$  superharmonisch ist, dass  $v_1 + v_2 \geq 0$  auf  $\bar{\Omega}$ . Anders gesagt

$$v_1 \geq -v_2 \text{ auf } \bar{\Omega}.$$

Es folgt dann auch, dass

$$u(x) = \inf \{v_1(x); v_1 \in S_\varphi(\bar{\Omega})\} \geq \sup \{-v_2(x); v_2 \in S_{-\varphi}(\bar{\Omega})\} = n(x) \text{ für } x \in \bar{\Omega}. \quad (13.8)$$

Auch hier kann man zeigen, dass es  $k_2 > 0$  gibt mit der Funktion

$$\underline{w}(x) := \varphi(x^*) - \varepsilon - k_2 b(x)$$

derart, dass

$$\underline{w}(x) \leq n(x) \text{ für } x \in \bar{\Omega}. \quad (13.9)$$

Aus (13.6-13.8-13.9) folgt

$$\underline{w}(x) \leq n(x) \leq u(x) \leq \bar{w}(x) \text{ für } x \in \bar{\Omega}$$

und dass es  $\delta_1 > 0$  gibt so, dass für  $x \in \bar{\Omega}$  und  $|x - x^*| < \delta_1$  folgt

$$|u(x) - \varphi(x^*)| < 2\varepsilon.$$

Weil  $\varepsilon$  beliebig ist, ist (13.5) erfüllt. ■



# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 14



## Laplace und Regularität

### 14.1 Bemerkungen zur Regularität

Wir haben gezeigt, dass es für  $f \in C^1(\bar{\Omega})$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit einer äußeren Kugelbedingung, eine Lösung  $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  gibt zu

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (14.1)$$

Wenn man vergleicht mit dem eindimensionalen Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{für } x \in (a, b), \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial(a, b), \end{cases} \quad (14.2)$$

dann folgt für (14.2), dass für  $f \in C^1([a, b])$  die Lösung  $u$  sogar in  $C^3([a, b])$  liegt. Und wenn man nur  $f \in C([a, b])$  hat, folgt immer noch eine Lösung  $u \in C^2([a, b])$ . Ganz allgemein kann man für (14.2) direkt zeigen, dass  $f \in C^{k,\gamma}([a, b])$  eine Lösung  $u \in C^{k+2,\gamma}([a, b])$  ergibt.

Kann man ähnliches vielleicht auch für (14.1) erwarten? Eine extra Schwierigkeit hat man durch den Rand, der im eindimensionalen Fall sehr trivial ist. Wenn wir nun annehmen, dass der Rand sehr schön ist, sagen wir  $\partial\Omega \in C^\infty$ , oder wenn wir vom Rand weg bleiben, gibt es dann ähnliches?

Die Perronsche Methode gibt uns eine Lösung zu (14.1) in zwei Schritten:

1. Man setzt

$$u_1(x) = \int_{\Omega} F_n(x-y) f(y) dy \quad (14.3)$$

und bekommt für  $f \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , dass  $u_1 \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  mit  $-\Delta u_1(x) = f(x)$  für  $x \in \Omega$ .

2. Man findet anschließend eine Lösung  $u_2 \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  von

$$\begin{cases} -\Delta u_2(x) = 0 & \text{für } x \in \Omega, \\ u_2(x) = u_1(x) & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (14.4)$$

Die Funktion  $u = u_1 - u_2$  ist die Lösung von (14.1). Die Eindeutigkeit folgt dabei aus dem Maximum-Prinzip.

## 14.2 Regularität und Fundamentallösung

In Proposition 11.3 haben wir schon bewiesen, dass für  $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$  folgt, dass für  $w$ , definiert durch

$$w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy, \quad (14.5)$$

gilt  $w \in C^2(\mathbb{R}^n)$ . Hier ist  $F_n$  die Fundamentallösung aus Definition 11.1. Wenn  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$  gilt, dann kann man wie folgt verfahren:

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} w(x) &= \partial_{x_i} \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy = \\ &= \partial_{x_i} \int_{\mathbb{R}^n} F_n(z) f(x-z) dz = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(z) \partial_{x_i} f(x-z) dz = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) \partial_{y_i} f(y) dy. \end{aligned} \quad (14.6)$$

Man kann also eine Ableitung durch das Integralzeichen schieben.

Für  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$  gilt  $\partial_i f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$  und deshalb folgt aus Proposition 11.3 für (14.6), dass  $\partial_i w \in C^2(\mathbb{R}^n)$  gilt. Dies gilt für jedes  $i$ , also gilt  $w \in C^3(\mathbb{R}^n)$ . Man kann diese Schritte beliebig wiederholen und so folgt:

**Lemma 14.1** Sei  $k \in \mathbb{N}^+$ . Für  $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$  und  $w$  definiert in (14.5) gilt  $w \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ .

Mit mehr Mühe kann man sogar zeigen, dass für  $k \in \mathbb{N}$  und  $\gamma \in (0, 1)$  gilt:

$$f \in C_0^{k,\gamma}(\mathbb{R}^n) \implies w \in C^{k+2,\gamma}(\mathbb{R}^n).$$

Die Hölder-Stetigkeit der Lösung ist +2 besser als die Hölder-Stetigkeit der rechten Seite. Für  $C_0^k(\mathbb{R}^n)$  (oder  $C_0^{k,1}(\mathbb{R}^n)$ ) und Dimensionen  $n \geq 2$  gilt die Erhöhung der Differenzierbarkeit um 2 nicht:

$$f \in C_0^k(\mathbb{R}^n) \not\Rightarrow w \in C^{k+2}(\mathbb{R}^n).$$

Wir werden nun ein Beispiel geben bei dem  $f \in C(\bar{\Omega})$  und die Lösung von (14.1) nicht zweimal stetig differenzierbar ist.

**Beispiel 14.2** Die Funktion

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \log(-\log(x_1^2 + x_2^2)) & \text{für } x \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } x = (0, 0), \end{cases}$$

ist eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{für } x \in B_r(0), \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial B_r(0), \end{cases} \quad (14.7)$$

mit  $r = 1/\sqrt{e}$  und

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{4x_1 x_2 (1 - 2 \log(x_1^2 + x_2^2))}{(x_1^2 + x_2^2) (\log(x_1^2 + x_2^2))^2} & \text{für } x \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } x = (0, 0). \end{cases}$$

Die Funktion  $f$  ist stetig auf  $\overline{B_r(0)}$ , denn die rationale Teilfunktion ist beschränkt und der Logarithmus im Nenner sorgt für Konvergenz gegen 0 für  $x \rightarrow (0, 0)$ . Man kann

auch zeigen, dass  $u \in C^{1,\gamma}(\overline{B_r(0)})$  für jede  $\gamma < 1$ . Die Funktion  $u$  ist aber nicht zweimal differenzierbar in  $(0,0)$ . Die zweite Ableitung von  $u$  nach zum Beispiel  $x_1$  ist nicht definiert in  $(0,0)$  und unbeschränkt bei  $(0,0)$ :

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} \partial_{x_2} u(x_1, x_2) &= \log(-\log(x_1^2 + x_2^2)) + \\ &+ \frac{2x_1^4 + 2x_2^4}{(x_1^2 + x_2^2)^2 \log(x_1^2 + x_2^2)} - \frac{4x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2 (\log(x_1^2 + x_2^2))^2} \end{aligned}$$

Von den drei Termen hat der erste eine Singularität in  $(0,0)$ . Die zwei übrigen Terme kann man stetig durch 0 in  $(0,0)$  fortsetzen.

Man kann sich noch fragen, ob denn dieses  $u$  tatsächlich die einzige Lösung zu (14.7) ist. Wenn es eine zweite Lösung  $u_2$  gäbe, dann betrachte man  $w = u - u_2$ . Das Maximumprinzip oder der Mittelwertsatz hat zwar als Voraussetzung, dass  $w \in C^2(B_r(0)) \cap C(\overline{B_r(0)})$ , doch man kann zeigen, dass  $w \in W^{2,p}(B_r(0)) \cap C(\overline{B_r(0)})$  mit  $p$  groß reicht. Es folgt so, dass  $w = 0$ .

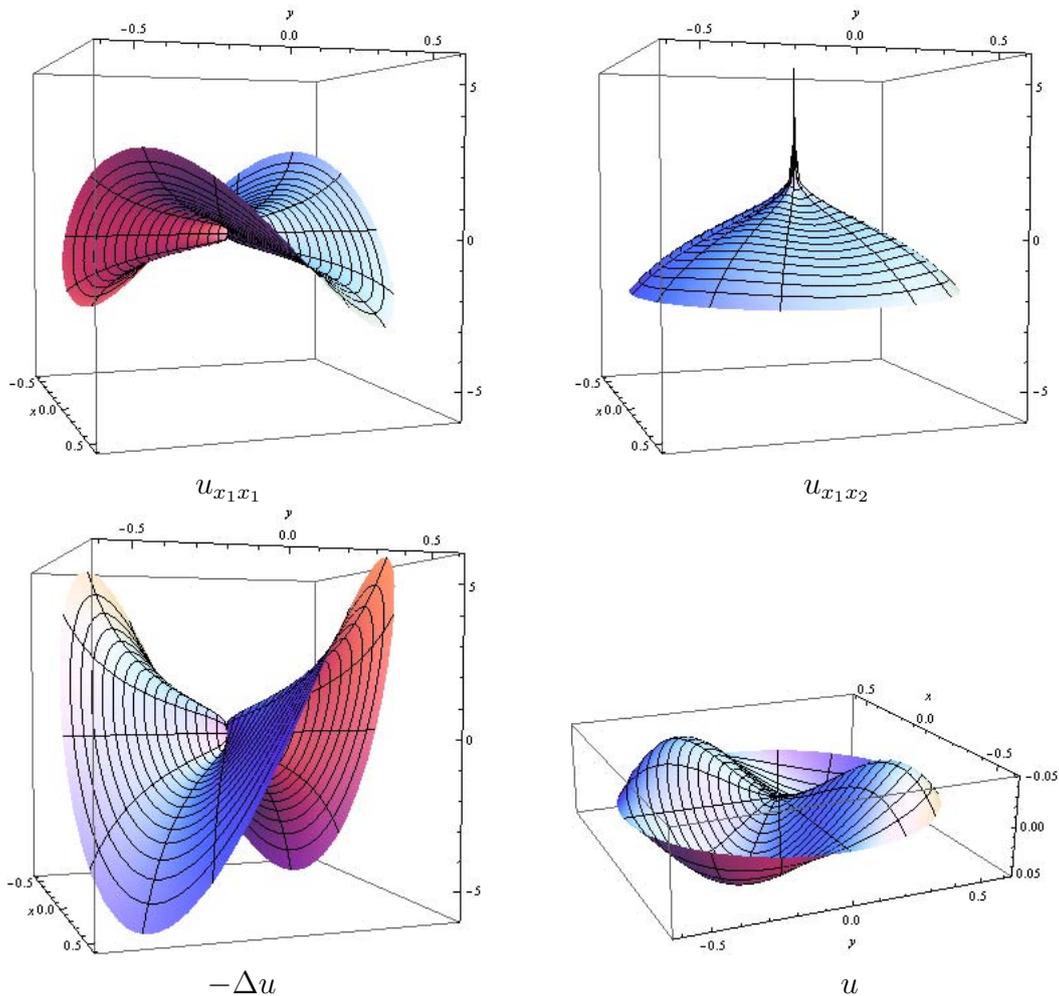


Abbildung 14.1: Skizzen zu den Funktionen aus Beispiel 14.2:

## 14.3 Regularität und Rand

Um den soeben gezeigten Ansatz zu verwenden, müsste man  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  auf ( $k$  mal) stetig differenzierbare Art erweitern können.

**Lemma 14.3** Sei  $f \in C^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})$ . Dann gibt es eine Erweiterung  $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ .

**Beweis.** Man definiere für  $x_1 < 0$  und  $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\tilde{f}(x_1, x') = \sum_{m=1}^{k+1} a_m f(-mx_1, x')$$

mit  $a_m$  bestimmt durch

$$1 = \sum_{m=1}^{k+1} (-m)^\ell a_m \text{ für } \ell \in \{0, 1, \dots, k\}. \quad (14.8)$$

Anders gesagt,  $a_m$  erfüllt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -m-1 \\ (-1)^2 & (-2)^2 & (-3)^2 & \dots & (-m-1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^k & (-2)^k & (-3)^k & \dots & (-m-1)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dieser Typ von Matrix ist nach Vandermonde benannt und bekanntlich invertierbar, wenn die zweite Zeile keine gleichen Zahlen enthält. Es gibt also eine eindeutige Lösung  $a_1, \dots, a_{k+1}$ . Wenn die Gleichungen in (14.8) erfüllt sind, findet man für  $\ell + |\alpha| \leq k$ , dass

$$\begin{aligned} \partial_{x_1}^\ell \partial_{x'}^\alpha \tilde{f}(0, x') &= \lim_{x_1 \downarrow 0} \partial_{x_1}^\ell \partial_{x'}^\alpha \left( \sum_{m=1}^{k+1} a_m f(-mx_1, x') \right) = \\ &= \lim_{x_1 \downarrow 0} \sum_{m=1}^{k+1} a_m (-m)^\ell (\partial_{x_1}^\ell \partial_{x'}^\alpha f)(-mx_1, x') = \\ &= \sum_{m=1}^{k+1} a_m (-m)^\ell (\partial_{x_1}^\ell \partial_{x'}^\alpha f)(0, x') = (\partial_{x_1}^\ell \partial_{x'}^\alpha f)(0, x'). \end{aligned}$$

Dann folgt, dass

$$\tilde{f}(x_1, x') = \begin{cases} f(x_1, x') & \text{für } x_1 \geq 0, \\ \tilde{f}(x_1, x') & \text{für } x_1 < 0, \end{cases}$$

eine  $k$ -mal stetig differenzierbare Funktion ist. ■

**Beispiel 14.4** Die  $C^1$ -Erweiterung von  $f \in C^1[0, \infty)$  wird auf diese Art definiert:

$$\tilde{f}(x) = a_1 f(-x) + a_2 f(-2x) \text{ für } x < 0,$$

und  $a_1, a_2$  werden bestimmt durch

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{x \uparrow 0} \tilde{f}(x) = a_1 f(0) + a_2 f(0) = (a_1 + a_2) f(0), \\ f'(0) &= \lim_{x \uparrow 0} \tilde{f}'(x) = -a_1 f'(0) - 2a_2 f'(0) = (-a_1 - 2a_2) f'(0). \end{aligned}$$

Man löst  $1 = a_1 + a_2$  und  $1 = -a_1 - 2a_2$ , und man findet  $a_1 = 3$  und  $a_2 = -2$ .

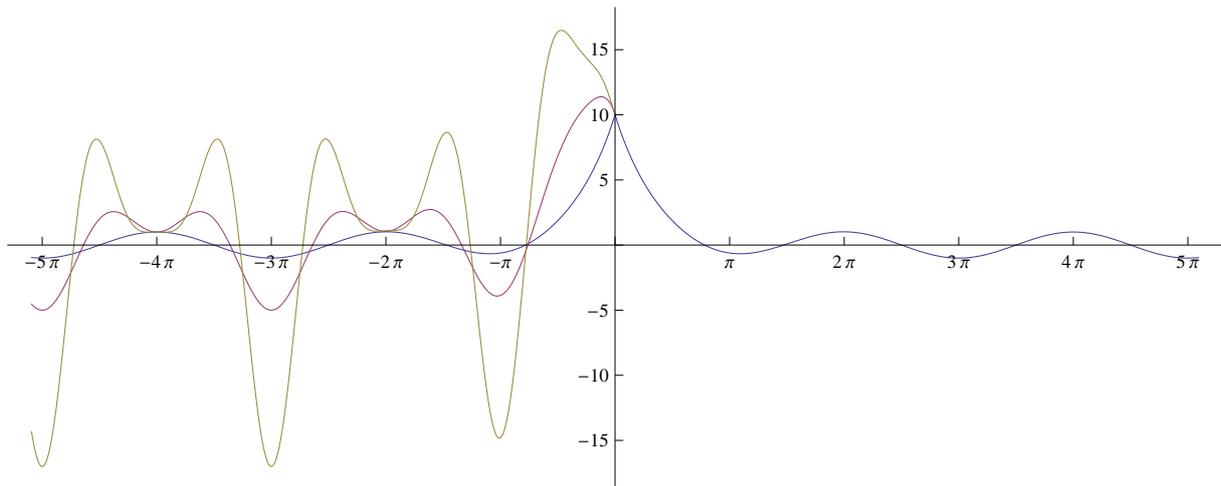


Abbildung 14.2: Die Funktion  $f(x) = 9e^{-x} + \cos(x)$  auf  $[0, \infty)$  und ihre  $C^0$ -,  $C^1$ - und  $C^2$ -Erweiterung auf  $\mathbb{R}^-$ .

Abbildung 14.2 zeigt, dass die Erweiterung bedeutend größer sein kann als die ursprüngliche Funktion. Man kann jedoch zeigen, dass diese Vergrößerung beschränkt ist. Für den Operator  $E_k : C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow C_b^k(\mathbb{R}^n)$ , definiert durch

$$E_k(f)(x_1, x') = \begin{cases} f(x_1, x') & \text{für } (x_1, x') \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}, \\ \sum_{m=1}^{k+1} a_m f(-mx_1, x') & \text{für } (x_1, x') \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1}, \end{cases}$$

mit  $a_m$  (anhängig von  $k$ ) als in (14.8), kann man folgendes zeigen:

**Lemma 14.5** *Es gibt  $C_k$  derart, dass*

$$\|E_k(f)\|_{C_b^k(\mathbb{R}^n)} \leq C_k \|f\|_{C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})} \text{ für alle } f \in C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}).$$

Anders gesagt:  $E_k : C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow C_b^k(\mathbb{R}^n)$  ist ein beschränkter linearer Operator.

**Beweis.** Weil  $E_k(f) \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$  gilt

$$\begin{aligned} \|E_k(f)\|_{C_b^k(\mathbb{R}^n)} &= \|E_k(f)\|_{C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})} + \|E_k(f)\|_{C_b^k(\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1})} = \\ &\leq \|f\|_{C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{m=1}^{k+1} |a_m| \sum_{\alpha_1 + |\alpha'| \leq k} \left\| (-m)^{\alpha_1} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x'}^{\alpha'} f \right\|_{\infty} \leq \\ &\leq \left( 1 + (k+1) \max_{m \leq k+1} \{|a_m| m^k\} \right) \|f\|_{C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})} \end{aligned}$$

für alle  $f \in C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})$ . ■

**Proposition 14.6** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^k$ . Dann gibt es einen beschränkten linearen Operator*

$$E_{k, \Omega} : C^k(\bar{\Omega}) \rightarrow C_0^k(\mathbb{R}^n)$$

mit  $E_{k, \Omega}(f)(x) = f(x)$  für  $x \in \bar{\Omega}$  und  $f \in C^k(\bar{\Omega})$ .

**Beweis.** Wir geben nur eine Skizze. Für  $\partial\Omega$  gibt es wie in Definition 1.12 beschrieben, eine Überdeckung des Randes mit Blöcken  $\{B_i\}_{i=1}^\ell$ . Sei  $\{\chi_i\}_{i=1}^\ell$  eine Zerlegung der Eins derart, dass  $\text{support}(\chi_i) \subset B_i$  für  $i = 1, \dots, \ell$ . Auf jedem dieser Blöcke kann man den Rand in lokalen Koordinaten beschreiben durch  $x_1^{(i)} = \psi_i(x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$  und  $\Omega$  durch  $x_1^{(i)} > \psi_i(x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ . Weil  $\psi_i \in C^k$  kann man den Rand glattbügeln durch

$$S_i(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) = (x_1^{(i)} - \psi_i(x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}), x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}),$$

und lokal wird eine Funktion zu einer auf dem Halbraum transformiert durch

$$(S_i^* f)(y_1, y') = f(y_1 + \psi_i(y'), y').$$

Formal schreiben wir

$$E_{k,\Omega}(f) = \sum_{i=1}^{\ell} (S_i^*)^{-1} E_k S_i^* (\chi_i f)$$

und die Tatsache, dass diese Definition den gewünschten Erweiterungsoperator liefert, darf der Leser selbst überprüfen. Auch kann man sich davon überzeugen, dass  $E_{k,\Omega}(f)$  einen kompakten Träger hat, der nur abhängt von  $\{\chi_i\}_{i=1}^\ell$ . ■

**Korollar 14.7** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^k$ . Dann gilt für jedes  $f \in C^{k_1}(\bar{\Omega})$  mit  $k_1 \leq k$ , dass  $w \in C^{k_1+1}(\bar{\Omega})$  für

$$w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) E_{k,\Omega}(f)(y) dy.$$

**Bemerkung 14.7.1** Für  $x \in \Omega$  gilt  $-\Delta w(x) = E_{k,\Omega}(f)(x) = f(x)$ .

Dies bedeutet, dass man eine Lösung von (14.1) bekommt, wenn man

$$\begin{cases} -\Delta u_2 = 0 & \text{für } x \in \Omega, \\ u_2 = w & \text{für } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (14.9)$$

löst und  $u = w - u_2$  nimmt. Weil  $u_2 \in C^\infty(\Omega)$  folgt für  $f$  und  $\Omega$  wie in Korollar 14.7, dass  $u \in C^{k_1+1}(\bar{\Omega})$ . Möchte man sogar die Regularität einschließlich des Randes zeigen, kann man für Gebiete, die die äußeren Kugelbedingungen erfüllen, die Funktion  $u_2$  mit Oberlösungen und Unterlösungen annähern und mit Harnackschen Ungleichungen Abschätzungen erzeugen, die dafür sorgen, dass man  $u_2 \in C^1(\bar{\Omega})$  zeigen kann. Für höhere Regularität betrachtet man ein Problem wie (14.9) nun für  $\partial_{x_i} u_2$  usw.

## 14.4 Lösungen und Abschätzungen

In diesem Abschnitt beschreiben wir einige Ergebnisse für Lösungen von

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (14.10)$$

in verschiedenen Rahmen. Um diese Ergebnisse zu beweisen wäre eine Spezialvorlesung nötig.

**Theorem 14.8** Seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $\gamma \in (0, 1)$ . Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^{k+3}$ . Dann gibt es für jedes  $f \in C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$  genau eine Lösung  $u \in C^{k+2,\gamma}(\bar{\Omega})$  zu (14.10).

Außerdem gibt es eine Konstante  $c_{\Omega,k,\gamma} > 0$  derart, dass für jedes  $f \in C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$  und die zugehörige Lösung  $u$  gilt:

$$\|u\|_{C^{k+2,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq c_{\Omega,k,\gamma} \|f\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})}.$$

Für einen Beweis schaue man nach in [6].

Wir haben in Abschnitt 11.2.2 bemerkt, aber nicht bewiesen, dass es bei einem beschränkten Gebiet  $\Omega$  für  $f \in L^2(\Omega)$  eine schwache Lösung  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gibt zu (14.10). Eine schwache Lösung heißt hier:  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  und

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - f v) dx = 0 \text{ für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega). \quad (14.11)$$

Der Raum  $W_0^{1,2}(\Omega)$  wurde in (11.12) definiert. Die Sobolev-Räume  $W^{k,p}(\Omega)$  findet man in Abschnitt 2.3.1.

**Theorem 14.9** Nehmen wir  $k \in \mathbb{N}$  und  $p \in (1, \infty)$ . Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^{k+3}$ . Sei  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  die schwache Lösung vom Type (2.7). Wenn zusätzlich  $f \in W^{k,p}(\Omega)$  gilt, dann folgt  $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$ .

Außerdem gibt es eine Konstante  $c_{\Omega,k,p} > 0$  derart, dass für jedes  $f \in W^{k,p}(\Omega)$  und für die dazugehörige Lösung  $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{k+2,p}(\Omega)$  gilt:

$$\|u\|_{W^{k+2,p}(\Omega)} \leq c_{\Omega,k,p} \|f\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Für einen Beweis schaue man bei [3, Seite 317] für  $p = 2$  oder in [6] für allgemeine  $p \in (1, \infty)$ .

Wie verhalten sich diese beide Typen von Lösungen? Eine Richtung möge deutlich sein. Weil  $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega}) \subset W^{k,p}(\Omega)$  gilt für beschränkte Gebiete  $\Omega$  und dass es sogar  $c'_{\Omega,k,\gamma} > 0$  gibt mit

$$\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} \leq c'_{\Omega,k,\gamma} \|f\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})} \text{ für alle } f \in C^{k,\gamma}(\bar{\Omega}),$$

findet man für  $f \in C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$  nicht nur  $u \in C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$ , sondern auch  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ . Kann man auch in der umgekehrten Richtung eine Inklusion erwarten? Für  $f \in W^{k,p}(\Omega)$  findet man im Allgemeinen keine Lösung  $u \in C^{k+2,\gamma}(\bar{\Omega})$  aber manchmal schon eine Lösung  $u \in C^{k+1,\gamma}(\bar{\Omega})$ . Die sogenannten Sobolev Einbettungen geben Antwort auf diese Art von Fragen.

Die Sobolevschen Einbettungssätze, die für beschränkte Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  gelten, die eine **innere(!)** Kegelbedingung erfüllen, geben uns die folgenden Abschätzungen:

- Wenn  $k \geq m$  und  $k - \frac{n}{p} > m - \frac{n}{q}$  dann gilt

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq c_{\Omega,k,p,m,q} \|u\|_{W^{m,q}(\Omega)}.$$

- Wenn  $k - \frac{n}{p} > m + \gamma$  dann gilt

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq c_{\Omega,k,p,m,\gamma} \|u\|_{C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})}.$$

Wenn man ganz genau wäre, müßte man bei der letzten Abschätzung eigentlich sagen, dass es für jede Äquivalenzklasse  $U \in W^{k,2}(\Omega)$  einen Vertreter  $u \in C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})$  gibt mit  $\|U\|_{W^{k,2}(\Omega)} \leq c_{\Omega,k,p,m,\gamma} \|u\|_{C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})}$ .

Man kann diese Ergebnisse kombinieren zur folgenden Aussage.

**Korollar 14.10** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^3$ . Dann gibt es für jedes  $f \in C(\bar{\Omega})$  genau eine schwache Lösung  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  zu (14.10). Außerdem gilt  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ , und es gibt  $c_\Omega > 0$  derart, dass für jedes  $f \in C(\bar{\Omega})$  und die zugehörige Lösung  $u$  gilt:*

$$\|u\|_{C^1(\bar{\Omega})} \leq c_\Omega \|f\|_{C(\bar{\Omega})}.$$

**Beweis.** Wenn  $f \in C(\bar{\Omega})$ , dann gilt  $f \in L^p(\Omega)$  für alle  $p \in (1, \infty)$  also auch für  $p = 2$ . Dann gibt es genau eine schwache Lösung  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , die sogar in  $W^{2,p}(\Omega)$  liegt für alle  $p \in (1, \infty)$ . Für  $p > n$  folgt, dass  $u \in C^{1,\varepsilon}(\bar{\Omega})$  für  $\varepsilon \in (0, 1 - \frac{n}{p})$ . Die Abschätzungen folgen:

$$\|u\|_{C^1(\bar{\Omega})} \leq \|u\|_{C^{1,\varepsilon}(\bar{\Omega})} \leq c_1 \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq c_2 \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq c_3 \|f\|_{C(\bar{\Omega})}.$$

Die Konstanten hängen nur von  $\Omega$  und  $n$  ab. Man kann  $p = 2n$  und  $\varepsilon = \frac{1}{4}$  wählen. ■

Diese Überlegungen führen dazu, dass man für  $f \in C(\bar{\Omega})$  und  $\Omega \in C^3$  nur eine Lösung  $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  findet, und im Allgemeinen nicht in  $C^2(\bar{\Omega})$ . Das bedeutet, dass man eine Gleichung  $-\Delta u = f$  nicht punktweise

$$-\Delta u(x) = f(x) \text{ für alle } x \in \Omega$$

lesen soll, sondern nur

$$-\Delta u = f \text{ fast überall in } \Omega.$$

# Partielle Differentialgleichungen

## Kapitel 15



## Semilineare Laplace-Gleichungen

### 15.1 Ein erweitertes Maximum-Prinzip

In diesem Abschnitt betrachten wir

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (15.1)$$

mit  $c \in C(\bar{\Omega})$ .

**Theorem 15.1 (Starkes Maximum-Prinzip)** Sei  $c \geq 0$ . Wenn  $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  eine Lösung ist von (15.1) mit  $0 \leq f \in C(\bar{\Omega})$  und  $p \geq 2$ , dann folgt, dass entweder  $u > 0$  in  $\Omega$  oder  $u = f = 0$  in  $\Omega$ .

Wir werden diese Aussage in mehreren Schritten beweisen. Das erste Ergebnis ist eine schwächere Version des obigen Theorems.

**Proposition 15.2 (Schwachtes Maximum-Prinzip)** Sei  $c \geq 0$ . Wenn  $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  eine Lösung ist von (15.1) und  $0 \leq f \in C(\bar{\Omega})$  und  $p \geq 2$ , dann folgt, dass  $u \geq 0$  in  $\Omega$ .

**Beweis.** Nehmen wir an, dass  $\min u = u(x_0) < 0$ . Weil  $u$  stetig ist, gibt es eine Kugel  $B_r(x_0)$  mit  $u(x) < 0$  für alle  $x \in B_r(x_0)$ . Wir können  $r$  sogar so groß wählen, dass es  $x_1 \in \partial B_r(x_0)$  gibt mit  $u(x_1) = 0$ . Es folgt auch, dass

$$f(x) - c(x)u(x) \geq 0 \text{ auf } B_r(x_0)$$

und damit, dass  $u$  superharmonisch ist auf  $B_r(x_0)$ . Wir finden einen Widerspruch zu  $u(x_1) = 0$ . Also folgt  $u \geq 0$  in  $\Omega$ . ■

**Lemma 15.3** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und sei  $u \in C(\bar{\Omega})$  eine nichtnegative Funktion. Wenn es  $x_0, x_1 \in \Omega$  gibt mit  $u(x_0) > 0 = u(x_1)$ , dann gibt es  $x_4, x_5 \in \Omega$  und  $R > 0$  mit

1.  $u(x_4) = 0$  und  $x_4 \in \partial B_R(x_5)$ ;
2.  $u(x) > 0$  für  $x \in \overline{B_R(x_5)} \setminus \{x_4\}$ ;

3.  $B_{2R}(x_4) \subset \Omega$ .

**Beweis.** Weil  $\Omega$  zusammenhängend ist, gibt es einen Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  mit  $\gamma(0) = x_0$  und  $\gamma(1) = x_1$ . Setze

$$t_2 = \inf \{t \in [0, 1]; u(\gamma(t)) = 0\} \text{ und } x_2 = \gamma(t_2).$$

Weil  $x_2 \in \Omega$  und  $\Omega$  offen ist, gibt es  $R_2 > 0$  mit  $B_{R_2}(x_2) \subset \Omega$ . Setze

$$t_3 = \inf \{t \in [0, 1]; \gamma(t) \in B_{R_2/2}(x_2)\} \text{ und } x_3 = \gamma(t_3).$$

Es gilt  $t_3 < t_2$  und  $u(x_3) > 0$ . Weil  $u$  stetig ist, gilt  $u(x) > 0$  in einer Umgebung von  $x_3$  und

$$R_3 = \sup \{r \in [0, R_2/2]; u(x) > 0 \text{ auf } B_r(x_3)\}$$

ist derart, dass es  $x_4 \in \partial B_{R_3}(x_3)$  gibt mit  $u(x_4) = 0$ . Für  $x \in B_{R_3}(x_3)$  gilt  $u(x) > 0$ . Um zu verhindern, dass es mehrere Stellen auf  $\partial B_{R_3}(x_3)$  gibt, wo  $u(x) = 0$  gilt, brauchen wir noch einen Schritt. Setze  $x_5 = \frac{1}{2}(x_3 + x_4)$  und  $R = \frac{1}{2}R_3$ . ■

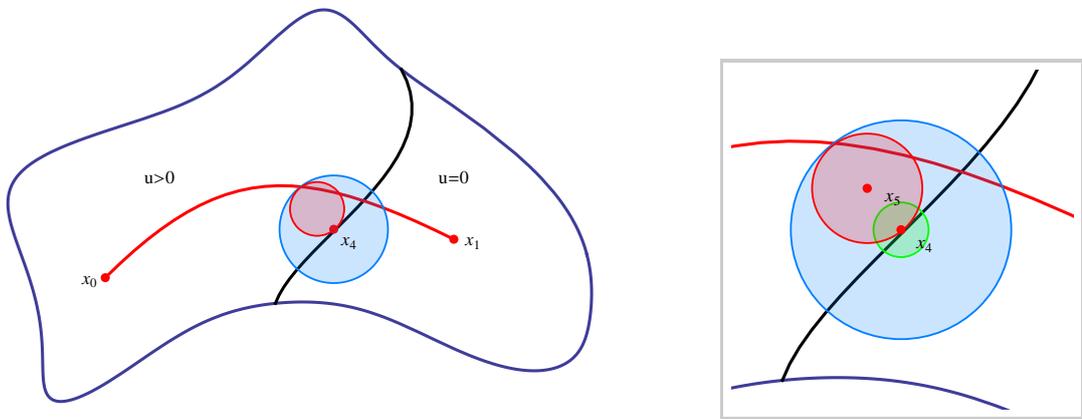


Abbildung 15.1: Die Konstruktion in Lemma 15.3 mit Detailansicht.

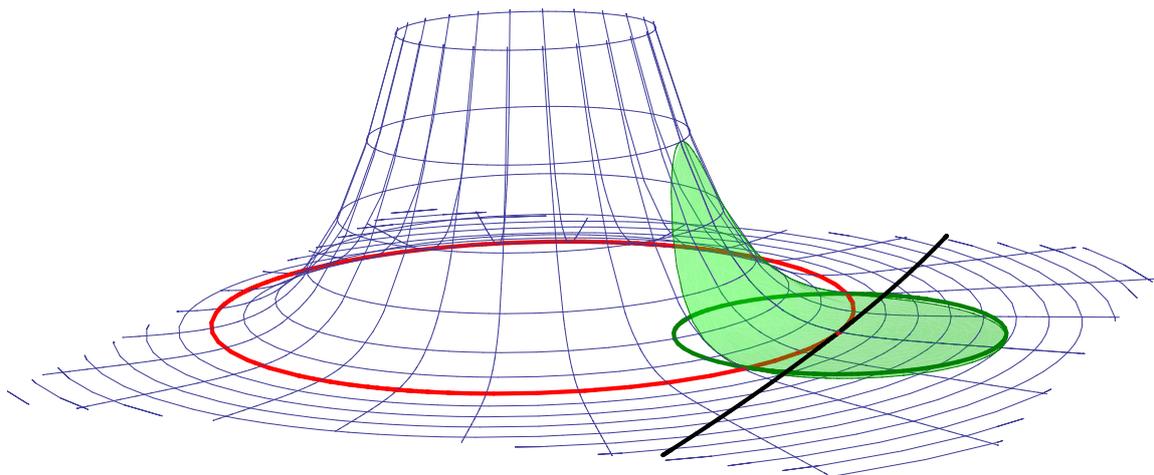


Abbildung 15.2: Die Hilfsfunktion aus dem Beweis zu Theorem 15.1. Die Funktion  $v$  ist mit dem blauen Gitter dargestellt; die Einschränkung von  $v$  auf  $B_{R/2}(x_4)$  ist grün.

**Beweis von Theorem 15.1.** Sei  $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  eine Lösung von (15.1) mit  $0 \leq f \in C(\bar{\Omega})$ . Wegen des schwachen Maximum-Prinzips gilt  $u \geq 0$  auf  $\Omega$ . Wir nehmen

an, es gibt  $x_0, x_1 \in \Omega$  mit  $u(x_0) > 0$  und  $u(x_1) = 0$ . Wir nehmen  $x_4, x_5$  und  $R$  wie in Lemma 15.3 und definieren  $r = \frac{1}{2}R$  und

$$v(x) = \frac{e^{-\alpha|x-x_5|^2} - e^{-\alpha r^2}}{1 - e^{-\alpha r^2}},$$

wobei wir momentan  $\alpha$  noch nicht festlegen. Wir werden für  $u - \varepsilon v$  einen Widerspruch erzeugen auf  $B_r(x_4)$ .

Für  $v$  gilt:

- $v(x) > 0$  für  $|x - x_5| < r$  und  $v(x) < 0$  für  $|x - x_5| > r$ ;
- $(-\Delta + c(x))v(x) < 0$  für  $|x - x_5| > r$  und genügend großes  $\alpha$ , denn

$$\begin{aligned} (-\Delta + c(x))v(x) &= \frac{-\nabla \left( -2\alpha(x - x_5) e^{-\alpha|x-x_5|^2} \right) + c(x) \left( e^{-\alpha|x-x_5|^2} - e^{-\alpha r^2} \right)}{1 - e^{-\alpha r^2}} = \\ &= \frac{(2n\alpha - 4\alpha^2|x - x_5|^2) e^{-\alpha|x-x_5|^2} + c(x) \left( e^{-\alpha|x-x_5|^2} - e^{-\alpha r^2} \right)}{1 - e^{-\alpha r^2}} \leq \\ &\leq \frac{(-4\alpha^2 r^2 + 2n\alpha + c(x)) e^{-\alpha|x-x_5|^2} - c(x) e^{-\alpha r^2}}{1 - e^{-\alpha r^2}}. \end{aligned}$$

Man wähle  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  so, dass  $-4\alpha^2 r^2 + 2n\alpha + c(x) < 0$ .

Wir müssen als nächstes  $\varepsilon$  vernünftig wählen: Für  $x \in \partial B_r(x_4) \cap \overline{B_R(x_5)}$  gilt  $u(x) > 0$ , und weil  $\partial B_r(x_4) \cap \overline{B_R(x_5)}$  kompakt ist und  $u$  stetig, kann man  $\varepsilon > 0$  derart wählen, dass

$$\varepsilon v(x) < u(x) \text{ für } x \in \partial B_r(x_4) \cap \overline{B_R(x_5)}. \quad (15.2)$$

Da  $v(x) \leq 0$  und  $u(x) \geq 0$  für  $x \in \partial B_r(x_4) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B_R(x_5))$  und beide Funktionen nicht gleichzeitig 0 sind, folgt

$$u(x) - \varepsilon v(x) > 0 \text{ für } x \in \partial B_r(x_4) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B_R(x_5)). \quad (15.3)$$

Kombiniert man (15.2) und (15.3), so findet man

$$u(x) - \varepsilon v(x) > 0 \text{ für } x \in \partial B_r(x_4).$$

Weil auch

$$(-\Delta + c(\cdot))(u - \varepsilon v) > 0 \text{ auf } B_r(x_4)$$

liefert das schwache Maximum-Prinzip, dass

$$u(x) - \varepsilon v(x) \geq 0 \text{ für } x \in \overline{B_r(x_4)}.$$

Sei nun  $\nu$  der auswärtige Normalenvektor in  $x_4$  an  $B_{2r}(x_5)$ . Weil  $u \in C^1(\Omega)$ , existiert  $(\partial_\nu u)(x_4)$ . Es folgt

$$(\partial_\nu u)(x_4) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{u(x_4 + t\nu) - u(x_4)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{u(x_4 + t\nu) - 0}{t} \geq 0.$$

Weil  $u(x_4) = \varepsilon v(x_4) = 0$  und  $u(x) \geq \varepsilon v(x)$  gilt, folgt auch

$$(\partial_\nu u)(x_4) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{u(x_4) - u(x_4 - t\nu)}{t} \leq \lim_{t \downarrow 0} \frac{0 - \varepsilon v(x_4 - t\nu)}{t} < 0$$

und das gibt einen Widerspruch. ■

## 15.2 Existenz bei einer einfachen Perturbation

In diesem Abschnitt betrachten wir für  $\lambda \geq 0$ :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + \lambda u(x) = f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (15.4)$$

**Theorem 15.4** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^3$ . Dann gibt es für jedes  $f \in C(\bar{\Omega})$  und jedes  $\lambda \geq 0$  eine Lösung  $u_\lambda \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  von (15.4).

Wenn  $0 \leq f \in C(\bar{\Omega})$  und  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$ , dann gilt

$$0 \leq u_{\lambda_2}(x) \leq u_{\lambda_1}(x) \text{ für alle } x \in \Omega.$$

**Beweis.** Wenn wir für jedes  $f \in C(\bar{\Omega})$  mit  $f \geq 0$  eine Lösung  $u_\lambda$  von (15.4) finden, kann man auch für beliebige  $f \in C(\bar{\Omega})$  eine Lösung finden. Denn sei  $f \in C(\bar{\Omega})$ , dann gilt  $f^+ := \frac{1}{2}(|f| + f) \in C(\bar{\Omega})$  und  $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f) \in C(\bar{\Omega})$  und  $f^+, f^- \geq 0$ . Wenn  $u_1, u_2$  Lösungen von (15.4) mit rechts  $f^+$  beziehungsweise  $f^-$ , dann ist  $u = u_1 - u_2$  eine Lösung von (15.4) mit  $f$ . Wir dürfen also annehmen, dass  $f \geq 0$  gilt.

Wir definieren nun  $\mathcal{G}_\Omega : C(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega})$  als den Lösungsoperator für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (15.5)$$

Genauer gesagt, ist  $\mathcal{G}_\Omega f$  für  $f \in C(\bar{\Omega})$  eine Lösung von (15.5) in  $W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ . Wegen Korollar 14.10 gilt  $\|\mathcal{G}_\Omega f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$  und  $A_\lambda : C(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega})$ , definiert durch

$$A_\lambda u = \mathcal{G}_\Omega(f - \lambda u),$$

ist für  $|\lambda|C_\Omega < 1$  mit  $C_\Omega$  aus Korollar 14.10 eine Kontraktion. Für solche  $\lambda$  liefert der Fixpunktsatz von Banach eine Funktion  $u_\lambda \in C(\bar{\Omega})$  mit

$$A_\lambda u_\lambda = u_\lambda.$$

Es gilt  $u_\lambda = \mathcal{G}_\Omega(f - \lambda u_\lambda)$  und somit ist  $u_\lambda$  eine Lösung in  $W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  von (15.4). Wenn  $\lambda \geq 0$ , besagt Proposition 15.2, dass  $u_\lambda \geq 0$ . Dies bedeutet, dass es eine Lösung  $u_\lambda \geq 0$  gibt für  $\lambda \in [0, C_\Omega^{-1})$  und außerdem folgt

$$-\Delta u_\lambda = f - \lambda u_\lambda \leq f \text{ in } \Omega.$$

Es gilt

$$-\Delta(u_\lambda - u_0) = f - \lambda u_\lambda - f = -\lambda u_\lambda \leq 0 \quad (15.6)$$

und durch das Maximum-Prinzip folgt dann  $u_\lambda \leq u_0$ .

- Fassen wir zusammen: Für  $\lambda \in [0, C_\Omega^{-1})$  hat (15.4) eine Lösung  $u_\lambda$ . Weil  $A_\lambda$  eine Kontraktion ist, ist die Lösung  $u_\lambda$  eindeutig. Wegen des Maximum-Prinzips gilt  $0 \leq u_\lambda \leq u_0$ .

Weil  $0 \leq u_\lambda \leq u_0$ , gilt auch

$$\|u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

und wir können für  $\lambda \in [0, C_\Omega^{-1})$  unser Argument wiederholen mit  $\mathcal{G}_{\Omega,\lambda} : C(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega})$  als den Lösungsoperator für

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (15.7)$$

Man zeigt so, dass es eine Lösung gibt für alle  $\lambda \in [0, 2C_\Omega^{-1}]$  usw.

Ähnlich wie in (15.6) findet man für  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$ , dass

$$-\Delta(u_{\lambda_2} - u_{\lambda_1}) + \lambda_1(u_{\lambda_2} - u_{\lambda_1}) = (\lambda_1 - \lambda_2)u_{\lambda_2} \leq 0$$

und aufgrund des Maximum-Prinzips folgt  $0 \leq u_{\lambda_2} \leq u_{\lambda_1}$  in  $\Omega$ . ■

### 15.3 Schwach harmonisch ist harmonisch

**Theorem 15.5 (Das Weylsche Lemma<sup>1</sup>)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und sei  $u \in L_{lok}^1(\Omega)$  derart, dass

$$\int_{\Omega} u \Delta \varphi \, dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (15.8)$$

Dann gibt es eine Funktion  $u^* \in C^\infty(\Omega)$  mit  $\Delta u^* = 0$  und  $u = u^*$  fast überall.

**Beweis.** Wir definieren eine harmonische Funktion  $u_\varepsilon^*$  und zeigen, dass sie auf

$$\Omega_{2\varepsilon} = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > 2\varepsilon\}$$

mit  $u$  fast überall übereinstimmt.

Sei  $\chi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$  mit  $0 \leq \chi_\varepsilon \leq 1$  derart, dass

$$\chi_\varepsilon(r) = \chi_\varepsilon(-r) = \begin{cases} 1 & \text{für } |r| \leq \frac{1}{2}\varepsilon, \\ \dots & \text{für } \frac{1}{2}\varepsilon < |r| < \varepsilon, \\ 0 & \text{für } |r| \geq \varepsilon, \end{cases}$$

und sei

$$F_{n,\varepsilon}(x) = \chi_\varepsilon(|x|)F_n(x)$$

mit  $F_n$  die Fundamentallösung zu  $-\Delta$  auf  $\mathbb{R}^n$ . Wir definieren auch

$$H_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \leq \frac{1}{2}\varepsilon, \\ \Delta F_{n,\varepsilon}(x) & \text{für } \frac{1}{2}\varepsilon < |x| < \varepsilon, \\ 0 & \text{für } |x| \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (15.9)$$

Weil  $\Delta F_n(x) = 0$  für  $x \neq 0$  und  $\chi_\varepsilon$  wie oben definiert ist, folgt  $\Delta F_{n,\varepsilon}(x) = 0$  für  $0 < |x| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$  und auch für  $|x| \geq \varepsilon$ . Es folgt, dass  $H_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Bemerke, dass  $H_\varepsilon$  radialsymmetrisch ist.

Wir setzen nun

$$u_\varepsilon^*(x) = \int_{\Omega} H_\varepsilon(x-y)u(y) \, dy.$$

Weil der Träger von  $y \mapsto H_\varepsilon(x-y)$  in  $\overline{B_\varepsilon(x)}$  liegt,  $H_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  gilt und weil  $u$  lokal integrierbar ist, folgt  $u_\varepsilon^* \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  und

$$\partial_x^\alpha u_\varepsilon^*(x) = \int_{\Omega} \partial_x^\alpha H_\varepsilon(x-y)u(y) \, dy.$$

Für  $x \in \Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$  gilt, dass der Träger von  $y \mapsto H_\varepsilon(x-y)$  innerhalb von  $\Omega$  liegt. Dann folgt aus der Annahme (15.8), dass

$$\Delta u_\varepsilon^*(x) = \int_{\Omega} \Delta H_\varepsilon(x-y)u(y) \, dy = 0.$$

<sup>1</sup>Hermann Klaus Hugo Weyl, Elmshorn 1885 – Zürich 1955.

Die Funktion  $u_\varepsilon^*$  ist harmonisch auf  $\Omega_\varepsilon$ .

Sei  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\delta)$  und setze

$$\psi(x) = \int_{\Omega} F_{n,\varepsilon}(x-y)\varphi(y)dy$$

Es gilt, dass  $\psi \in C_0^\infty(\Omega_{\delta-\varepsilon}) \subset C_0^\infty(\Omega)$  und

$$\Delta\psi(x) = -\varphi(x) + \int_{\Omega_\delta} H_\varepsilon(x-y)\varphi(y)dy.$$

Wir finden

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} u(x)\Delta\psi(x) dx = \int_{\Omega} u(x) \left( -\varphi(x) + \int_{\Omega} H_\varepsilon(x-y)\varphi(y)dy \right) dx = \\ &= - \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx + \int_{\Omega} \varphi(y) \int_{\Omega} H_\varepsilon(x-y)u(x)dx dy = \\ &= - \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx + \int_{\Omega} \varphi(y) \int_{\Omega} H_\varepsilon(y-x)u(x)dx dy = \\ &= - \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx + \int_{\Omega} \varphi(y)u_\varepsilon^*(y)dy = \int_{\Omega} (u_\varepsilon^*(x) - u(x)) \varphi(x)dx. \end{aligned}$$

Weil dies für beliebige  $\varepsilon < \delta$  und  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\delta)$  gilt, folgt für  $\varepsilon < \delta$ :

$$u = u_\varepsilon^* \text{ fast überall auf } \Omega_\delta.$$

Dann gilt für  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 < \delta$ , dass  $u_{\varepsilon_1}^* = u = u_{\varepsilon_2}^*$  fast überall auf  $\Omega_\delta$ . Weil diese  $u_{\varepsilon_i}^*$  harmonisch sind auf  $\Omega_\delta$  sind sie stetig und es folgt  $u_{\varepsilon_1}^* = u_{\varepsilon_2}^*$  auf  $\Omega_\delta$ . Man kann  $\Omega$  auffüllen mit  $\Omega_{1/n}$ , das heißt  $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \Omega_{1/n}$  und so ist  $u^* = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{1/n}^*$  eine wohldefinierte harmonische Funktion auf  $\Omega$  und es gilt  $u = u^*$  fast überall auf  $\Omega$ . ■

Wir haben superharmonische Funktionen auf  $\Omega$  definiert durch  $u \in C(\Omega)$  so, dass für alle  $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$

$$u(x) \geq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma_y. \quad (15.10)$$

Man möchte auch eine schwache Version wie in (15.8) für superharmonische Funktionen bereit haben. Die gibt es, wie wir im nächsten Lemma zeigen werden.

**Lemma 15.6** Sei  $u \in C(\Omega)$ . Wenn

$$\int_{\Omega} u(-\Delta\varphi) dx \geq 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \varphi \geq 0, \quad (15.11)$$

dann ist  $u$  superharmonisch auf  $\Omega$ .

**Bemerkung 15.6.1** Selbstverständlich können wir nicht erwarten, dass eine Funktion  $u \in C(\Omega)$ , die (15.11) erfüllt in Analogie zum Weylschen Lemma, fast überall mit einer stark superharmonischen Funktion übereinstimmt. Mit „stark superharmonisch“ ist gemeint, dass  $u \in W_{lok}^{2,p}(\Omega)$  und  $-\Delta u \geq 0$  gilt. Umgekehrt, wenn  $u \in W_{lok}^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$  die Gleichung  $-\Delta u \geq 0$  erfüllt, folgt (15.11) durch partielle Integration.

**Beweis.** Wir werden (15.10) zeigen für  $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ . Sei  $\psi_\varepsilon$  der Mollifier aus (7.5) und definiere

$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_{B_r(x_0)} \psi_\varepsilon(x-y) G_{B_r(x_0)}(y, x_0) dy.$$

Hier ist  $G_{B_r(x_0)}(y, x)$  die Greensche Funktion auf  $B_r(x_0)$ . Für genügend kleines  $\varepsilon > 0$  folgt  $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ . Auch gilt  $\varphi_\varepsilon \geq 0$ . Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} u(x) (-\Delta \varphi_\varepsilon(x)) dx = \int_{\Omega} u(x) \left( -\Delta_x \int_{B_r(x_0)} \psi_\varepsilon(x-y) G_{B_r(x_0)}(y, x_0) dy \right) dx = \\ &= \int_{\Omega} u(x) \left( \int_{B_r(x_0)} (-\Delta \psi_\varepsilon)(x-y) G_{B_r(x_0)}(y, x_0) dy \right) dx = \\ &= \int_{\Omega} u(x) \left( \psi_\varepsilon(x-x_0) - \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} \psi_\varepsilon(x-y) d\sigma_y \right) dx = \\ &= \int_{\Omega} \psi_\varepsilon(x-x_0) u(x) dx - \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} \left( \int_{\Omega} \psi_\varepsilon(x-y) u(x) dx \right) d\sigma_y. \end{aligned} \quad (15.12)$$

Weil  $u \in C(\Omega)$  gilt

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Omega} \psi_\varepsilon(x-y) u(x) dx = u(y)$$

und aus (15.12) folgt

$$0 \leq u(x_0) - \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y) d\sigma_y.$$

Weil  $x_0 \in \Omega$  beliebig ist, ist so (15.10) bewiesen.  $\blacksquare$

## 15.4 Existenz zwischen Ober- und Unterlösung

In diesem Abschnitt betrachten wir das semilineare Problem

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (15.13)$$

wobei  $f \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$  lokal Lipschitz-stetig in  $u$  ist:

Es gebe also für jedes  $M > 0$  eine Zahl  $L_M \in \mathbb{R}$  mit

$$|f(x, u_1) - f(x, u_2)| \leq L_M |u_1 - u_2| \quad \text{für } x \in \bar{\Omega} \text{ und } |u_1|, |u_2| \leq M. \quad (15.14)$$

Wir werden die Existenz einer Lösung beweisen mit Hilfe einer Methode, die das Maximum-Prinzip und die damit induzierte Ordnung verwendet. Dafür brauchen wir die folgenden Definitionen.

**Definition 15.7** Eine Funktion  $\bar{u} \in C(\bar{\Omega})$  heißt eine Oberlösung, wenn  $\bar{u}(x) \geq 0$  für  $x \in \partial\Omega$  und

$$\int (\bar{u}(x) (-\Delta \varphi(x)) - f(x, \bar{u}) \varphi(x)) dx \geq 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \varphi \geq 0. \quad (15.15)$$

Eine Funktion  $\underline{u} \in C(\bar{\Omega})$  heißt eine Unterlösung, wenn  $\underline{u}(x) \leq 0$  für  $x \in \partial\Omega$  und

$$\int (\underline{u}(x) (-\Delta \varphi(x)) - f(x, \underline{u}) \varphi(x)) dx \leq 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \varphi \geq 0. \quad (15.16)$$

**Bemerkung 15.7.1** Wenn  $\bar{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  oder  $\bar{u} \in W^{2,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , dann gilt  $-\Delta \bar{u} \geq f$  auf  $\Omega$ . Solche  $\bar{u}$  nennt man starke Oberlösung.

**Lemma 15.8** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt mit  $\partial\Omega \in C^3$ . Wenn  $u \in C(\bar{\Omega})$  sowohl Ober- als auch Unterlösung zu (15.13) ist, ist  $u$  eine Lösung.

**Beweis.** Sei  $w \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  für genügend großes  $p$  die Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta w(x) = f(x, u(x)) & \text{für } x \in \Omega, \\ w(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (15.17)$$

Diese existiert, weil  $x \mapsto f(x, u(x)) \in C(\bar{\Omega})$ .

Für  $u - w$  folgt

$$\int (u(x) - w(x)) (-\Delta \varphi(x)) dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \varphi \geq 0. \quad (15.18)$$

Wenn diese Gleichung gilt für alle  $0 \leq \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , dann gilt sie auch für  $0 \geq \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Für beliebige  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  gibt es  $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega)$  mit  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  und  $\varphi_1, \varphi_2 \geq 0$ : Man nehme für  $\varepsilon$  die Distanz zwischen  $\partial\Omega$  und dem Träger von  $\varphi$ , definiere  $\chi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$  mit  $0 \leq \chi_\varepsilon \leq 1$  durch

$$\chi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \bar{\Omega}_\varepsilon, \\ \dots & \text{für } x \in \bar{\Omega}_{\varepsilon/2} \setminus \Omega_\varepsilon, \\ 0 & \text{für } x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_{\varepsilon/2}, \end{cases}$$

und setze  $\varphi_1 = \|\varphi\|_\infty \chi_\varepsilon$  und  $\varphi_2 = \varphi_1 - \varphi$ . Das heißt, dass (15.18) gilt für beliebige  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  und aus dem Weylschen Lemma folgt, dass  $u - w$  ist harmonisch auf  $\Omega$ . Wegen der Randbedingung  $u - w = 0$  folgt  $u = w$  auf  $\bar{\Omega}$ . ■

**Theorem 15.9** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^3$ . Nehme an  $f \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$  erfüllt (15.14). Wenn es eine Oberlösung  $\bar{u}$  und eine Unterlösung  $\underline{u}$  gibt mit

$$\bar{u}(x) \geq \underline{u}(x) \text{ für alle } x \in \Omega,$$

dann gibt es eine Lösung  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  mit

$$\bar{u}(x) \geq u(x) \geq \underline{u}(x) \text{ für alle } x \in \Omega.$$

**Beweis.** Statt dieses Problem für  $f$  zu betrachten, verwendet man

$$\tilde{f}(x, u) := \begin{cases} f(x, \bar{u}(x)) & \text{für } u > \bar{u}(x), \\ f(x, u) & \text{für } \bar{u}(x) \geq u \geq \underline{u}(x), \\ f(x, \underline{u}(x)) & \text{für } \underline{u}(x) > u, \end{cases}$$

und betrachtet

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \tilde{f}(x, u(x)) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (15.19)$$

Für die Funktion  $\tilde{f}$  gilt sogar mit  $L = L_M$  und  $M = \max(\|\bar{u}\|_\infty, \|\underline{u}\|_\infty)$ , dass

$$\left| \tilde{f}(x, u_1) - \tilde{f}(x, u_2) \right| \leq L |u_1 - u_2| \text{ für } x \in \bar{\Omega} \text{ und } u_1, u_2 \in \mathbb{R}. \quad (15.20)$$

Das Randwertproblem (15.19) kann man auch schreiben als

$$\begin{cases} (-\Delta + L) u(x) = \tilde{f}(x, u(x)) + Lu(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (15.21)$$

Sei  $\mathcal{G}_{\Omega,L}$  der Lösungsoperator für

$$\begin{cases} (-\Delta + L)u = g & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (15.22)$$

Theorem 15.4 sichert die Existenz eines solchen Operators. Dann können wir (15.21) auch schreiben als

$$u(x) = \mathcal{G}_{\Omega,L} \left( \tilde{f}(\cdot, u(\cdot)) + Lu(\cdot) \right) (x).$$

Wir möchten einen Fixpunktsatz anwenden für

$$T : C(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega}) \quad \text{mit} \quad Tu = \mathcal{G}_{\Omega,L} \left( \tilde{f}(\cdot, u) + Lu \right).$$

Dazu zeigen wir einige Hilfsresultate.

**Behauptung 15.10** *Sei  $u \in C(\bar{\Omega})$ . Dann gilt folgendes:*

- *Wenn  $u$  eine Oberlösung ist, dann gilt  $Tu \leq u$ .*
- *Wenn  $u$  eine Unterlösung ist, dann gilt  $Tu \geq u$ .*

Man findet mit partieller Integration, dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Tu(x) (-\Delta\varphi(x)) dx &= \int_{\Omega} Tu(x) (-\Delta + L)\varphi(x) dx - L \int_{\Omega} Tu(x)\varphi(x) dx = \\ &= \int_{\Omega} ((-\Delta + L)Tu(x))\varphi(x) dx - L \int_{\Omega} Tu(x)\varphi(x) dx = \\ &= \int_{\Omega} \left( \tilde{f}(x, u(x)) + Lu(x) \right) \varphi(x) dx - L \int_{\Omega} Tu(x)\varphi(x) dx = \\ &= \int_{\Omega} \tilde{f}(x, u(x))\varphi(x) dx + L \int_{\Omega} (u(x) - Tu(x))\varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Weil  $u$  eine Oberlösung ist, gilt (15.15) und man findet also

$$\int_{\Omega} (Tu(x) - u(x)) (-\Delta\varphi(x)) dx \leq L \int_{\Omega} (u(x) - Tu(x))\varphi(x) dx.$$

Nehmen wir an:  $Tu(x) - u(x)$  hat ein positives Maximum in  $x_0$ . Dann gilt in eine Umgebung  $B_r(x_0)$  von  $x_0$  für alle  $\varphi \in C_0^\infty(B_r(x_0))$  mit  $\varphi \geq 0$ , dass

$$\int_{B_r(x_0)} (Tu(x) - u(x)) (-\Delta\varphi(x)) dx \leq L \int_{B_r(x_0)} (u(x) - Tu(x))\varphi(x) dx \leq 0.$$

Wegen Lemma 15.6 ist  $Tu - u$  subharmonisch auf  $B_r(x_0)$  und wird somit maximal auf dem Rand  $\partial B_r(x_0)$ . Dann ist  $Tu - u$  konstant, wo  $Tu - u \geq 0$  gilt, und weil  $Tu - u \leq 0$  auf  $\partial\Omega$  ist, folgt, dass diese Konstante nur 0 sein kann. Wir haben einen Widerspruch. Ähnliche Argumente zeigen die Behauptung für eine Unterlösung.  $\square$

**Behauptung 15.11** *Seien  $u_1, u_2 \in C(\bar{\Omega})$ . Dann gilt folgendes:*

- *Wenn  $u_1 \leq u_2$  dann gilt  $Tu_1 \leq Tu_2$ .*

Wegen (15.20) gilt für  $u_1 \leq u_2$ , dass

$$\left( \tilde{f}(\cdot, u_1) + Lu_1 \right) - \left( \tilde{f}(\cdot, u_2) + Lu_2 \right) \leq L|u_1 - u_2| + L(u_1 - u_2) = 0. \quad (15.23)$$

Aus Proposition 15.2 folgt dann, dass

$$\begin{aligned} Tu_1 - Tu_2 &= \mathcal{G}_{\Omega, L} \left( \tilde{f}(\cdot, u_1) + Lu_1 \right) - \mathcal{G}_{\Omega, L} \left( \tilde{f}(\cdot, u_2) + Lu_2 \right) = \\ &= \mathcal{G}_{\Omega, L} \left( \left( \tilde{f}(\cdot, u_1) + Lu_1 \right) - \left( \tilde{f}(\cdot, u_2) + Lu_2 \right) \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Die Ordnung bleibt erhalten.  $\square$

**Behauptung 15.12** Sei  $u \in C(\bar{\Omega})$ . Dann gilt folgendes:

- Wenn  $u$  eine Oberlösung ist, dann ist  $Tu$  eine starke Oberlösung.
- Wenn  $u$  eine Unterlösung ist, dann ist  $Tu$  eine starke Unterlösung.

Sei  $u$  eine Oberlösung. Dann gilt  $Tu \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  für alle  $p \in (1, \infty)$ . Weil  $u \geq Tu$  gilt, und weil

$$s \mapsto \tilde{f}(x, s) + Ls$$

eine monoton wachsende Funktion ist, folgt, dass

$$(-\Delta + L)Tu = \tilde{f}(\cdot, u) + Lu \geq \tilde{f}(\cdot, Tu) + LTu.$$

Also ist  $Tu$  eine starke Oberlösung.  $\square$

Diese drei Behauptungen zeigen, dass man mit

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_0 = u \\ \underline{u}_{n+1} := T\underline{u}_n \end{array} \right. \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_0 = \bar{u} \\ \bar{u}_{n+1} := T\bar{u}_n \end{array} \right.$$

Folgen von Unter- und Oberlösungen  $\{\underline{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  und  $\{\bar{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  findet mit

$$\underline{u} = \underline{u}_0 \leq \underline{u}_1 \leq \underline{u}_2 \leq \cdots \leq \bar{u}_2 \leq \bar{u}_1 \leq \bar{u}_0 = \bar{u}.$$

Diese Funktionen sind gleichgradig gleichmäßig stetig und beschränkt. Wegen des Satzes von Arzela-Ascoli gibt es konvergente Teilfolgen von  $\{\underline{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  und  $\{\bar{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Weil diese Funktionen geordnet sind konvergieren sogar die Folgen selbst. Für  $\underline{u}_\infty(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{u}_k(x)$  und ähnlich für  $\bar{u}_\infty(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{u}_k(x)$  gilt

$$\underline{u}_\infty = \mathcal{G}_{\Omega, L} \left( \tilde{f}(\cdot, \underline{u}_\infty) + L\underline{u}_\infty \right) \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}).$$

Dann ist  $\bar{u}_\infty(\underline{u}_\infty)$  eine Lösung von (15.19). Weil  $\underline{u}(x) \leq \underline{u}_\infty(x) \leq \bar{u}_\infty(x) \leq \bar{u}(x)$ , folgt

$$\tilde{f}(x, \underline{u}_\infty(x)) = f(x, \underline{u}_\infty(x))$$

und  $\bar{u}_\infty(\underline{u}_\infty)$  ist dann sogar eine Lösung von (15.13). Es ist übrigens nicht unbedingt so, dass  $\underline{u}_\infty = \bar{u}_\infty$ .  $\blacksquare$

## 15.5 Variationelle Methoden

Auch in diesem Abschnitt betrachten wir das semilineare Problem

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (15.24)$$

Wenn  $f$  bestimmte Eigenschaften hat, kann man zeigen, dass

$$J(u) = \int \left( \frac{1}{2} \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) - F(x, u(x)) \right) dx$$

mit

$$F(x, u(x)) = \int_{v=0}^{u(x)} f(x, v) dv$$

ein Minimum in  $W_0^{1,2}(\Omega)$  besitzt. Wenn  $u_{\min}$  diese minimierende Funktion ist und  $F$  genügend nett ist (zum Beispiel falls  $f$  stetig ist und eine passende Wachstumsbedingung erfüllt), dann folgt

$$\partial_t J(u + t\varphi)|_{t=0} = 0.$$

Weil

$$\partial_t J(u + t\varphi) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{J(u + t\varphi) - J(t\varphi)}{t} = \int (\nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) - f(x, u(x)) \varphi(x)) dx, \quad (15.25)$$

folgt, dass  $u$  eine schwache Lösung ist.

Für zum Beispiel  $f(u) = 1 - u^3$  findet man

$$J(u) = \int \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - u + \frac{1}{4} u^4 \right) dx$$

und man kann sehen, dass  $J$  ein Infimum hat. Das gibt Hoffnung, dass  $J$  sogar ein Minimum hat.  $J$  hat ein Infimum, wenn  $J(u) \geq c$  gilt für alle  $u$ , die in Betracht kommen;  $J$  hat ein Minimum, wenn  $J(u) \geq J(u_0)$  für alle  $u$  die in Betracht kommen.

Oft kann man nicht nur eine Lösung als Minimum des Funktionalen finden, sondern sind auch Sattelpunkte möglich. In einem Sattelpunkt kann man auch (15.25) und eine schwache Lösung erwarten.

**Beispiel 15.13** *Wir betrachten*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = u(x)^3 & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (15.26)$$

Dann nimmt man

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - \frac{1}{4} u(x)^4 \right) dx.$$

Wenn

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \text{ für alle } u \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad (15.27)$$

dann folgt, dass

$$J(u) \geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{4} \|u\|_{L^4(\Omega)}^4 \geq \frac{1}{4} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \left( 2 - C^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

und dass  $F$  für  $u = 0$  ein lokales Minimum hat. Die Tatsache, dass  $u = 0$  eine Lösung ist, ist nicht besonders überraschend. Wenn man aber bemerkt, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} J(tu) = -\infty$  für  $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$ , dann kann man auch noch einen Sattelpunkt erwarten. Ein Sattelpunkt für eine Funktion  $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$  in endlichen Dimensionen ist relativ klar definiert. Hier haben wir jedoch eine Funktion  $J : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , und  $W_0^{1,2}(\Omega)$  ist ein unendlich dimensionaler Raum. Ambrosetti und Rabinowitz haben gezeigt, dass für derartige Probleme tatsächlich ein Sattelpunkt existieren kann. Dieses Ergebnis ist bekannt geworden als das Mountain-Pass Lemma<sup>2</sup>. Wir sparen die Details und geben nur die wichtigsten Bedingungen:

Wenn es  $e \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gibt und  $\varepsilon, \delta > 0$  mit

- $J(0) = 0$ ,
- $J(u) \geq \varepsilon > 0$  für alle  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  mit  $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \delta$ ,
- $J(e) < 0$  mit  $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} > \delta$ ,

dann definiert man

$$m := \inf \left\{ \sup_{t>0} J(\gamma(t)) ; \gamma \in C([0, 1]; W_0^{1,2}(\Omega)) \text{ mit } u(0) = 0 \text{ und } u(1) = e \right\}.$$

Diese Zahl  $m$  ist die Passhöhe;  $\gamma$  ist eine Kurve in  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , die 0 und  $e$  verbindet. Anschließend betrachtet man eine Folge  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $J(u_n) \rightarrow m$ . Dann muss man noch zeigen, dass  $u_n$  konvergiert und dazu braucht man noch einige Bedingungen, deren Beschreibung hier zu weit führen würde.

Übrigens braucht man für (15.27) noch einen Sobolev-Einbettungssatz. Die Bedingung dazu ist  $1 - \frac{n}{2} > -\frac{n}{4}$  und ist nur erfüllt, wenn  $n < 4$ .

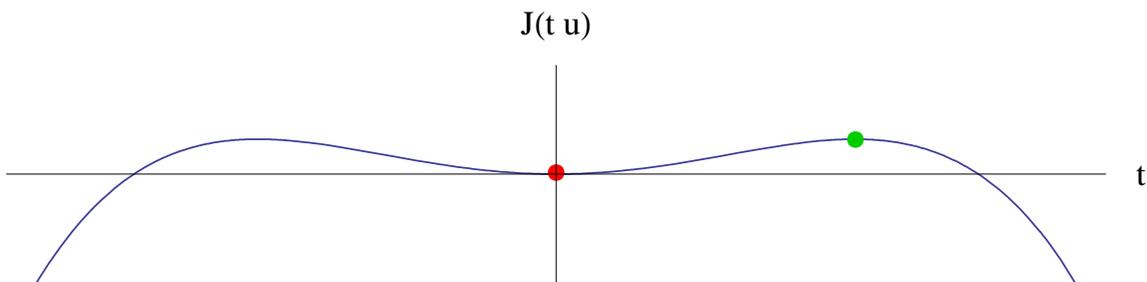


Abbildung 15.3: Lokales Minimum (rot) und ein zweiter stationärer Punkt (grün) in Dimension 1.

<sup>2</sup>Ambrosetti, Antonio; Rabinowitz, Paul H. Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Functional Analysis 14 (1973), 349–381.

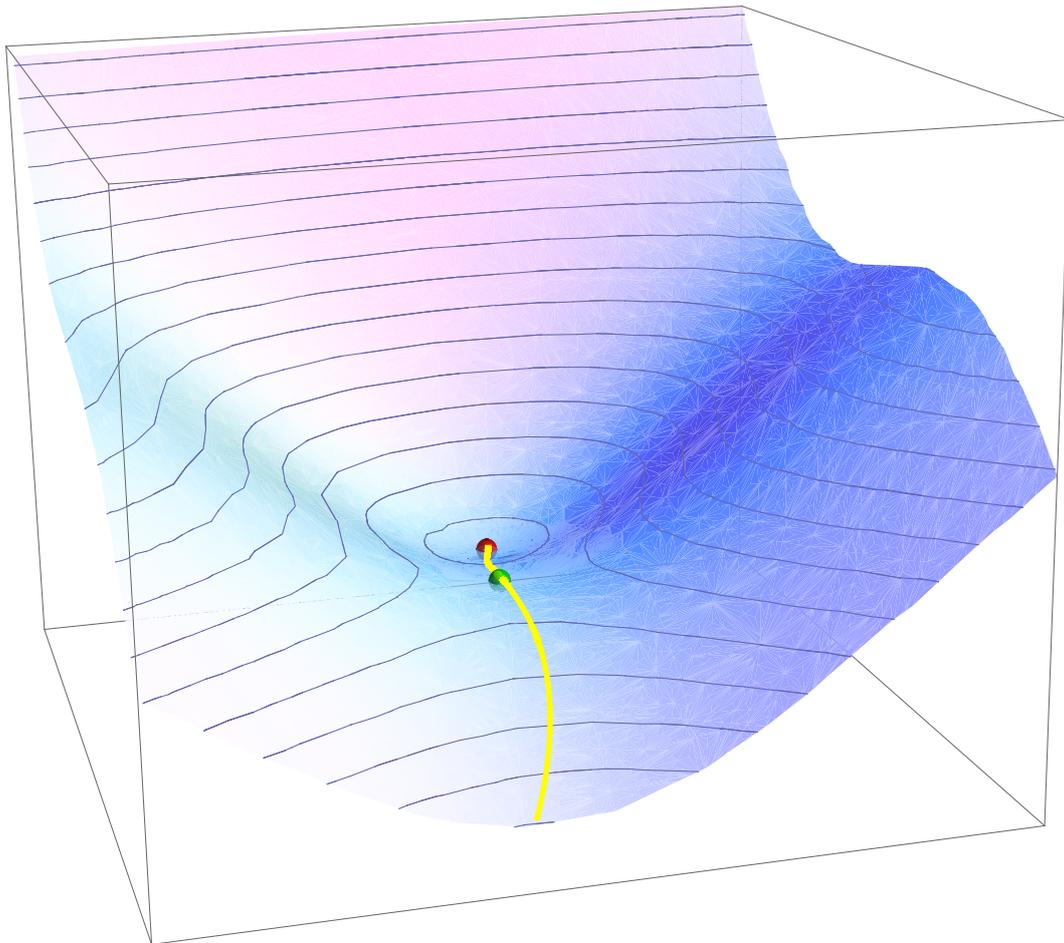


Abbildung 15.4: Lokales Minimum (rot) und ein zweiter stationärer Punkt (grün) in Dimension 2. Man sucht diesen Punkt (= Funktion für das obige Beispiel) indem man alle Wege vom roten Punkt in die Tiefe betrachtet. Auf jedem Weg  $\gamma$  gibt es ein Maximum  $m_\gamma$ . Schlussendlich nimmt man das Infimum von  $m_\gamma$  über alle Wege  $\gamma$  und versucht zu zeigen, dass dieses Infimum angenommen wird.



# Literaturverzeichnis

- [1] Strauss, Walter A.: Partielle Differentialgleichungen. Vieweg, 1995
- [2] DiBenedetto, Emmanuele: Partial differential equations. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1995.
- [3] Evans, Lawrence C.: Partial differential equations. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [4] Pinchover, Yehuda; Rubinstein, Jacob: An introduction to partial differential equations. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [5] Grunau, Hans-Christoph: Partielle Differentialgleichungen, Skript zur Vorlesung 2008/09.
- [6] Gilbarg, David und Trudinger, Neil S.: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, 1983.