Name: Aufgabe 1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$\star$}$$

(i) Vereinfachen Sie

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + u^2 \right) dx$$

und zeigen Sie damit, dass

$$\int_\Omega u^2 dx \le \int_\Omega f u \, dx.$$

(ii) Zeigen Sie

$$\int_\Omega u^2 dx \le \int_\Omega f^2 \, dx.$$

(iii) Zeigen Sie, dass ($\star$) höchstens eine Lösung in $C^2(\overline{\Omega})$ hat.

Name: Aufgabe 2

Wir betrachten

$$\begin{cases} u_y(x,y) + u_x(x,y) \exp(u(x,y)) = 1 & \text{für } (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = \arctan(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{$\circledast$}$$

(i) Welches Anfangswertproblem für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen liefert lokal eine Lösung für ($\circledast$)?

(ii) Berechnen Sie diese parametrisierte Lösung.

(iii) Begründen Sie, dass keine Schockwellen auftreten auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

NAME: AUFGABE 3

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0.$$

(i) Ist diese Differentialgleichung parabolisch, hyperbolisch, elliptisch oder noch anders?

(ii) Finden Sie eine Lösung auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ mit $u(x, 0) = \sin(x)$ als Randbedingung.

Hinweis: Diese Lösung ist nicht eindeutig.

(iii) Geben Sie eine zweite zusätzliche Randbedingung an, sodass die Kriterien von Hadamard erfüllt sind.

(iv) Berechnen Sie die eindeutige Lösung mit der Randbedigung aus (ii) und Ihrer Randbedingung aus (iii).

NAME: AUFGABE 4

Betrachten Sie die Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) = \frac{\exp(-|x|)}{4\pi |x|}.$$

(i) Berechnen Sie für $r > 0$

$$r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\exp(-r)}{r}.$$

(ii) Zeigen Sie, dass im Sinne von Distributionen gilt

$$-\Delta F + F = \delta_0.$$

(iii) Sei $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Geben Sie eine Lösungsformel für

$$\begin{cases} -\Delta u + u = g \text{ in } \mathbb{R}^3, \\ \lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0. \end{cases}$$

Name: Aufgabe 5

Sei $u \in C^2([0,\pi] \times [0,\infty))$ eine Lösung von

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}^+, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{für } t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in (0,\pi)\,. \end{cases}$$

(i) Wir definieren $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$F(t) = e^t \int_0^\pi \sin(x)\, u(x,t)\, dx\,.$$

Zeigen Sie, dass F konstant ist.

(ii) Nehmen Sie an, dass es ein $c \in \mathbb{R}^+$ derart gibt, dass für alle $x \in [0,\pi]$ gilt:

$$-c\sin(x) \leq u_0(x) \leq c\sin(x)\ .$$

Zeigen Sie, dass dann für alle $x \in [0,\pi]$ und $t \geq 0$ gilt:

$$-c\, e^{-t} \sin(x) \leq u(x,t) \leq c\, e^{-t} \sin(x)\ .$$

Name: Aufgabe 6

Wir betrachten für $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ die Lösung $u \in C^2\left(\overline{B_1(0)}\right)$ von

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } B_1(0)\,, \\ u = g & \text{auf } \partial B_1(0)\,. \end{cases}$$

(i) Für welches $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$u(x,y) = c\left(1 - x^2 - y^2\right) \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{g(\cos\varphi, \sin\varphi)}{(x-\cos\varphi)^2 + (y-\sin\varphi)^2} d\varphi.$$

(ii) Berechnen Sie im Fall, dass $g(x,y) = \max(x,0)^2$ den Wert $u(0,0)$.

(iii) Welches Bild gehört zu der Lösung u mit g wie in (ii)? Begründen Sie Ihre Antwort.