Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.

SoSe 2018

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 0

Dieses Übungsblatt ist unbepunktet, muss nicht abgegeben werden und wird in der zweiten Vorlesungswoche besprochen.

Aufgabe 1: Entscheiden Sie bei den folgenden Mengen jeweils, ob der Rand folgende C^0- bzw. C^1-Regularität besitzt.

(a) $\Omega = \left\{ (x, y) \in (-1, 1)^2 \ ; \ y < \sqrt{|x|} \right\}$

(b) $\Omega = \{ (x, y) \in (-1, 1)^2 \ ; \ y < |x| \}$

(c) $\Omega = B_1(0) \backslash \{0\}$

(d) $\Omega = \left\{ (x, y) \in (-1, 1) \times \mathbb{R} \ ; \ y < \tan \left(x \frac{\pi}{2} \right) \right\}$

(e) $\Omega = B_2(0) \backslash \partial B_1(0)$

(f) Die Menge $\Omega = \{ (s + t^2, t^3) \ ; \ s \in \mathbb{R}_+, t \in \mathbb{R} \}$, welche rechts von der Kurve $t \mapsto (t^2, t^3)$ liegt.

Aufgabe 2: Gegeben seien die folgenden Funktionen $u_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sin \left(\frac{1}{x} \right) \\ u_1(x) &= x \sin \left(\frac{1}{x} \right) \\ u_2(x) &= x^2 \sin \left(\frac{1}{x} \right) \\ u_3(x) &= x^3 \sin \left(\frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

Es gilt $u_i \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$. Überlegen Sie, ob sich die Funktionen so fortsetzen lassen, dass die Fortsetzung in $C^1(\mathbb{R})$ oder $C^0(\mathbb{R})$ ist.

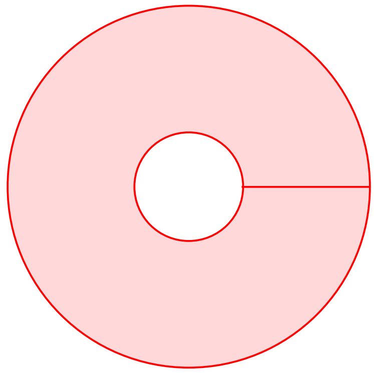
Aufgabe 3: Sei Ω ein beschränktes Gebiet.

(a) Geben sie alle Inklusionen zwischen den Mengen $C^0(\bar{\Omega}), C^{0,1}(\bar{\Omega}), C^{1,0}(\bar{\Omega})$ an.

(b) Geben sie alle Inklusionen zwischen den Mengen $C^0(\Omega), C^{0,1}(\Omega), C^{1,0}(\Omega), C_c^{1,0}(\Omega)$ an.

(c) In welcher wichtigen Eigenschaft unterscheiden sich $(C^1(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^1})$ und $(C^1(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^0})$?

Aufgabe 4: Überlegen Sie sich ein beschränktes Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $u \in C^1(\Omega)$ mit $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$, $\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$, so dass u nicht zu einer Funktion in $C^0(\bar{\Omega})$ fortgesetzt werden kann.
Gibt es so eine Funktion auf $B_1(0)$? Wann kann man so eine Funktion nur finden?



Aufgabe 5: Sei $\gamma \in (0, 1)$ und seien $u, v \in C^{0,\gamma}([0, 1]; [0, 1])$. Liegen die folgenden Funktion in $C^{0,\gamma}([0, 1]; \mathbb{R})$?

(a) $u + v$ (b) $u\,v$ (c) $u \circ v$

Aufgabe 6: Sei Ω ein beschränktes Gebiet. Der Raum $C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$ ist mit der Norm

$$\|u\|_{C^{0,\beta}} := \|u\|_{C^0} + [u]_{C^{0,\gamma}}$$

ein Banachraum. Dabei ist

$$[u]_{C^{0,\gamma}} := \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma}\,.$$

Sei $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ und $\{u_n\} \subset C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$ in der dazugehörigen Norm beschränkt.

(a) Zeigen Sie, dass es ein $C > 0$ gibt, so dass $\|u\|_{C^{0,\alpha}} \leq C$.

(b) Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Arzelà-Ascoli, dass es eine geeignete Teilfolge von $\{u_n\}$ gibt, die in $C^0(\bar{\Omega})$ konvergiert.

(c) Zeigen Sie nun, dass die Hölder-Seminorm von $u_n - u_m$

$$[u_n - u_m]_{C^{0,\alpha}} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|(u_n(x) - u_m(x)) - (u_n(y) - u_m(y))|}{|x - y|^\alpha}$$

für eine geeignete Teilfolge gegen Null geht.

Man kann eine Fallunterscheidung $|x - y| < \delta$ und $|x - y| \geq \delta$ machen. Dann kann in dem einen Fall δ ausreichend klein gewählt werden und im anderen Fall die gleichmäßige Konvergenz der Teilfolge genutzt werden.

(d) Zeigen Sie nun, dass für jede Menge A gilt: Falls A in $C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$ beschränkt ist, dann ist A in $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ präkompakt.