Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc. **SoSe 2018**

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 1

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten für Partielle Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 19.04.2018, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (5 Punkte)**:** Betrachte die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-\|x\|^2}} & \text{für } \|x\| < 1, \\ 0 & \text{für } \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass es Polynome p_α derart gibt, sodass

$$D^\alpha u(x) = \frac{p_\alpha(x)}{\left(1 - \|x\|^2\right)^{2|\alpha|}} e^{\frac{-1}{1-\|x\|^2}}$$

für $\|x\| < 1$ gilt.

(b) Verwenden Sie $\lim_{t\to\infty} t^{2|\alpha|}e^{-t} = 0$ für alle $|\alpha| \in \mathbb{N}$ um zu zeigen, dass $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Aufgabe 2: Für welche $\alpha \in [0,1]$ sind die folgenden Funktionen in $C^{0,\alpha}([0,1])$?

(a) $f_1(x) = x^\beta$ mit $\beta \in [0,\infty)$

(b) $f_2(x) = \begin{cases} -x\ln(x) & , x \in (0,1] \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

Aufgabe 3: Wir betrachten die Funktionenfolgen

- $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = e^{-nx^2}$ und
- $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_n(x) = e^{-(x-n)^2}$.

Prüfen Sie jeweils:

(a) Ist diese Familie gleichmäßig beschränkt?

(b) Ist diese Familie gleichgradig stetig?

(c) Gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge?

Aufgabe 4: Sei $L > 0$ gegeben.

$$\mathcal{F}_L := \{\, f : [0,1] \to \mathbb{R}^n \;\; ; \; f \text{ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante } L \,\}$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $\mathcal{F}_L$ ist gleichmäßig beschränkt.

(b) $\mathcal{F}_L$ ist gleichgradig stetig.

Aufgabe 5: Berechnen Sie:

(a) $\displaystyle\int_{0<x<y<1} \frac{x}{y} \; d(x,y)$ (b) $\displaystyle\int_{x^2+y^2\le 1} (2x^2+y^2) \; d(x,y)$

(c) $\displaystyle\int_{x^2+y^2<1} \nabla \cdot \begin{pmatrix} x\cos(1-x^2-y^2) \\ 1+x^2 \end{pmatrix} d(x,y)$

Aufgabe 6: Zeigen Sie: Für Polarkoordinaten, also $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$, gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Aufgabe 7 (5 Punkte)**:** Zeigen Sie, dass für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die nur von $\|x\|$ abhängen, für die also ein $\tilde{f}$ mit $f(x) = \tilde{f}(\|x\|)$ existiert, folgendes gilt:

$$\Delta f\,(x) = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r} r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r}\tilde{f}\,(r) \;\text{ für } r = \|x\|\,.$$

Aufgabe 8 (10 Punkte)**:** (a) Zu welcher Differentialgleichung wird

$$u_{xx} - u_{yy} = f,$$

wenn die Substitution $s = x + y$, $t = x - y$ durchgeführt wird?

(b) Zeigen Sie, dass jedes Paar von Funktionen $g, h \in C^2(\mathbb{R})$ durch

$$u(x,y) = g(x-y) + h(x+y) \tag{1}$$

eine Lösung liefert zu

$$u_{xx} - u_{yy} = 0. \tag{2}$$

(c) Zeigen Sie, dass sich jede klassische Lösung von (2) schreiben lässt wie in (1).