Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc. **SoSe 2018**

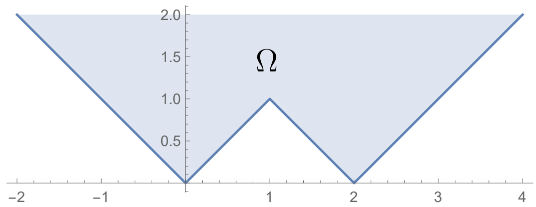
Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 10

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten für Partielle Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 28.06.2018, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (4+4 Punkte)**:** Wir betrachten das Gebiet

$$\Omega = \{\, (x,t) \ ; \ 2 > t > |x| \ \text{ oder } 2 > t > |x-2| \,\} \ .$$



Den unteren (W-förmigen) Rand von Ω bezeichnen wir mit

$$W := \partial\Omega \setminus \{\, (x,t) \ ; \ t = 2 \,\} \ .$$

Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) - u_t(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \Omega \,, \\ u(x,t) = t & \text{für } (x,t) \in W \,. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass das Problem (1) höchstens eine Lösung hat.

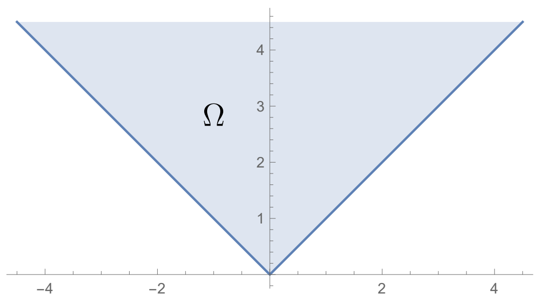
(b) Sei nun $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Lösung von (1). Berechnen Sie das Maximum dieser Lösung auf $\overline{\Omega}$.

Aufgabe 2: Wir betrachten das Gebiet $\Omega = \{\, (x,t) \ ; \ t > |x| \,\}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - 2u_{xx}(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \Omega \,, \\ u(x,t) = t & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \,. \end{cases}$$

höchstens eine Lösung hat.



(b) Zeigen Sie, dass

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \frac{1}{2}u_{xx}(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \Omega \,, \\ u(x,t) = t & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \,. \end{cases}$$

nicht eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte)**:** Wir betrachten das Gebiet $\Omega = \{\, (x,t) \ ; \ t > |x| \,\}$ (siehe Aufgabe 2). Sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung von

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \Omega\,, \\ u(x,t) = t & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Desweiteren sei $E(t) := \int\limits_{-t}^{t} \frac{1}{2} \left(u(x,t)\right)^2 \, dx$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Maximumprinzips, dass $E(t) \le t^3$.

(b) Zeigen Sie $u(x,t) \ge x$ und $u(x,t) \ge -x$. Folgern Sie $u_x(t,t) \le 1$ und $u_x(-t,t) \ge -1$.

(c) Zeigen Sie, dass $E'(t) \le t^2 + 2t$ und damit $E(t) \le \frac{1}{3}t^3 + t^2$ gilt.

Aufgabe 4: Sei $W(x,t,r) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ eine Wärmeleitungskugel. Bestimmen Sie

$$d := \sup\{|y_1 - y_2| \ ; \ \exists_{s\in\mathbb{R}} : (y_1, s) \in W(x,t,r) \text{ und } (y_2, s) \in W(x,t,r)\}$$

und

$$h := \sup\{|s_1 - s_2| \ ; \ \exists_{y\in\mathbb{R}^n} : (y, s_1) \in W(x,t,r) \text{ und } (y, s_2) \in W(x,t,r)\}.$$

Aufgabe 5 (3+3+0 Punkte)**:** Betrachten Sie

$$\begin{cases} \left(\partial_t - \partial_x^2\right) u\,(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}^+, \\ u\,(x,0) = u_0\,(x) & \text{für } x \in (0,1)\,, \\ u\,(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \{0,1\} \times \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

für $u_0 \in C_0^0\,[0,1]$. Zeigen Sie, dass für die Lösung

$$u\,(x,t) \in C^2([0,1] \times (0,\infty)) \cap C^0([0,1] \times [0,\infty))$$

die folgenden Abschätzungen gelten:

(a) $\|u\,(\cdot,t)\|_{L^\infty(0,1)} \le \|u_0\|_{L^\infty(0,1)}$.

Hinweis: Maximumprinzip.

(b) $\|u\,(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)} \le e^{-\pi^2 t}\,\|u_0\|_{L^2(0,1)}$.

Hinweis: Betrachten Sie $\partial_t \int_0^1 u(x,t)^2 dx$ und nutzen Sie, dass für $w \in C^2\,[0,1] \cap C_0\,[0,1]$ gilt: $\int_0^1 w'\,(x)^2\,dx \ge \pi^2 \int_0^1 w\,(x)^2\,dx$.

(c) $\|u\,(\cdot,t)\|_{L^\infty(0,1)} \le \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,\|u_0\|_{L^1(0,1)}$.

Hinweis: Maximumprinzip.