Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.

SoSe 2018

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 11

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten für Partielle Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 05.07.2018, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Sei $R = (0,a) \times (0,b)$ und $f \in L^2(R)$. Dann ist $\{\varphi_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{N}^+}$ mit

$$\varphi_{m,n}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(m\tfrac{\pi}{a}x\right) \sin\left(n\tfrac{\pi}{b}y\right)$$

ein vollständiges Orthonormalsystem für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } R\,, \\ u = 0 & \text{auf } \partial R\,. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\varphi_{m,n}$ Eigenfunktionen des Problems sind, d.h. Lösungen von (1) mit rechter Seite $f = \lambda_{m,n}\varphi_{m,n}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_{m,n}$.

(b) Zeigen Sie die Orthonormalität in $L^2(R)$:

$$\langle \varphi_{m,n}, \varphi_{k,l} \rangle_{L^2(R)} := \int_0^a \int_0^b \varphi_{m,n}(x,y)\varphi_{k,l}(x,y)\,dy\,dx = \delta_{m,k}\delta_{n,l}$$

(c) Wie konstruiert man Lösungen von (1) mit diesem Orthonormalsystem?

Aufgabe 2: Zeigen Sie, wie man mit Hilfe des Orthonormalsystems aus Aufgabe 1 auch Lösungen für

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } R\,, \\ u = u_{nn} = 0 & \text{auf } \partial R\,. \end{cases}$$

konstruieren kann. Hierbei ist u_{nn} die zweite Normalenableitung auf ∂R.

Aufgabe 3 (2+2+0 Punkte)**:** Der stetige Erweiterungsoperator $E : C_b^1\left([0,\infty) \times \mathbb{R}\right) \to C_b^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ ist definiert durch

$$(Ef)(x_1,x_2) := \begin{cases} f(x_1,x_2) & \text{für } x_1 \geq 0\,, \\ \alpha f(-x_1,x_2) + \beta f(-\frac{1}{2}x_1,x_2) & ,\ \text{für } x_1 < 0\,. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie α und β.

(b) Zeigen Sie $E\left(C_b^2\left([0,\infty) \times \mathbb{R}\right)\right) \not\subset C_b^2\left(\mathbb{R}^2\right)$.

(c)* Mit dem gleichen E ist $E : W^{2,2}\left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\right) \to W^{2,2}\left(\mathbb{R}^2\right)$ jedoch stetig. Zeigen Sie dies.

Aufgabe 4 (0+2+2+2 Punkte)**:** Es sei

$$\Psi_1(x) = \sinh(x) - \sin(x) \qquad \text{und} \qquad \Psi_2(x) = \cosh(x) - \cos(x)\,.$$

(a) Zeigen Sie: Die Funktion $\Phi_a(x) = \Psi_1(x)\Psi_2(a) - \Psi_1(a)\Psi_2(x)$ löst das Problem

$$\begin{cases} \Phi'''' = \Phi & \text{in } (0,a)\,, \\ \Phi(0) = \Phi'(0) = 0 = \Phi(a) & . \end{cases}$$

(b) Zeigen Sie, dass es eine Folge $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ gibt, sodass $\Phi_a'(a) = 0$ genau dann, wenn $a = 0$ oder $a = a_k$ oder $a = -a_k$ für ein passendes $k \in \mathbb{N}^+$.

Mit Hilfe von $\varphi_k(x) = \Phi_{a_k}(a_k x)$ für $k \in \mathbb{N}^+$ findet man ein vollständiges Orthogonalsystem von

$$\begin{cases} u'''' = f & \text{in } (0,1)\,, \\ u = u' = 0 & \text{auf } \partial(0,1)\ . \end{cases} \tag{2}$$

(c) Zeigen Sie die Orthogonalität der φ_k in $L^2(0,1)$.

(d) Wie erhält man nun für $f \in L^2(0,1)$ eine Lösung des Problems (2)?

Aufgabe 5 (2 Punkte)**:** Kann man mit Hilfe der Eigenfunktionen aus Aufgabe 4 auch ein vollständiges Orthogonalsystem für den zweidimensionalen Fall

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } (0,a) \times (0,b)\,, \\ u = u_n = 0 & \text{auf } \partial\left((0,a) \times (0,b)\right)\ , \end{cases}$$

konstruieren?

Aufgabe 6 (2+1+2+3 Punkte)**:**

(a) Sei $u \in C^4(\Omega)$ harmonisch. Zeigen Sie, dass $\Delta^2\left(|x|^2\, u(x)\right) = 0$.

(b) Beweisen Sie: $u(x) = c_1 + c_2\,|x|^2 + c_3\,|x|^{2-n} + c_4\,|x|^{4-n}$ für $c_i \in \mathbb{R}$ löst die Gleichung

$$\Delta^2 u = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ für } n \notin \{2,4\}.$$

(c) Begründen Sie, warum alle radialsymmetrischen Lösungen dieser Gleichung diese Form haben.

(d) Bestimmen Sie mithilfe dieser Funktionen eine Funktion $F_n : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ für $n > 4$, so dass

$$\Delta^2 F_n = \delta_0 \text{ in } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$$

und $\lim\limits_{|x|\to\infty} F_n(x) = 0$.